D. SPENLÉ
R. GOURHANT

GUIDE DU CALCUL EN MÉCANIQUE

POUR MAÎTRISER
LA PERFORMANCE DES SYSTÈMES
INDUSTRIELS



HACHETTE
Technique

D. SPENLÉ

Agrégé de mécanique.
Membre de la commission U.N.M. 08
à l'Union de la normalisation de la mécanique.

R. GOURHANT

Ingénieur Arts et Métiers. Agrégé de mécanique.

GUIDE DU CALCUL EN MÉCANIQUE

POUR MAÎTRISER LA PERFORMANCE DES SYSTÈMES INDUSTRIELS

À l'usage :
des élèves de l'enseignement technique industriel,
lycées techniques et lycées professionnels,
instituts universitaires de technologie,
sections de techniciens supérieurs,
des auditeurs de la formation continue,
des techniciens en activité dans les entreprises.



Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux élèves de lycée et aux techniciens engagés dans la vie professionnelle qui, au cours de projets ou de travaux pratiques, sont confrontés à des calculs de mécanique. Pour donner à l'utilisateur une **autonomie suffisante**, nous avons construit ce guide autour de **quatre niveaux d'approfondissement des connaissances** :

- **L'information** par des tableaux réunissant de nombreuses valeurs numériques de grandeurs usuelles, dont les symboles respectent les normes officielles.
- **La connaissance** à partir d'énoncés des relations fondamentales de la mécanique.
- **L'application** en donnant des exercices résolus.
- **La synthèse** en utilisant des organigrammes ou une méthodologie définissant les principales étapes d'un raisonnement ayant un caractère général.

En rédigeant ce guide, nous avons voulu :

- Réserver une **place importante à la modélisation**, étape préalable à la résolution de tout problème de mécanique.
- **Assurer une continuité** de la classe de première aux S.T.S. et I.U.T. et garder une **cohérence à la démarche** en introduisant le **torseur** dans les différentes parties.

Pour éviter un **excès de formalisme**, nous avons réduit ces torseurs à des glisseurs d'expression plus simple, lorsque des considérations de symétrie, ou la **nullité de l'invariant scalaire**, le permettaient.

PRINCIPALES MISES À JOUR PAR RAPPORT À L'ÉDITION 1995-1996

Chapitre	Modifications
3-5-12	Mise en place d'exemples plus simples et plus clairs.
10	Nouvelle présentation distincte de celle du chapitre 7.
16	Poussée hydrostatique sur une surface quelconque.
22-28	Nouvelle présentation des vitesses linéaires et angulaires. Nouvelle application de l'équiprojectivité.
33	Applications de résistance au pivotement.
34	Ajout d'une application sur le plan.
38	Nouveau chapitre méthodologique ; ordonnancement des isolements.
50	Calculs d'assemblages collés, pressés-collés, frettés-collés.
64	Ajout de la relation de calcul de la poussée hydrostatique.

NOTA : si cette mise à jour a parfois entraîné des modifications de pagination, la numérotation des chapitres et des paragraphes a été maintenue dans la majeure partie des cas.

Réalisation et fabrication : SG Production
Dessins : SG Production / Fractale (pages 110 à 178)
Photographie de couverture : Frein carbone Messier Bugatti, Airbus A 320 (SNECMA)

I.S.B.N. 2.01.16.7585.5

Table des matières

Modélisation

Cinématique

Statique

Résistance des matériaux

Dynamique – Énergétique

Mécanique des fluides

Thermique

Renseignements divers

Index alphabétique

NOTA : Les mots d'appel de cet index appartiennent aux cinq catégories suivantes :

- Les **noms propres** qui ont marqué un ou plusieurs domaines particuliers (Archimède, Bernoulli, Euler…)
- Les **noms d'éléments technologiques** (arbre, engrenage, roulement…) ou de corps (fluide, gaz, solide…)
- Les **noms de grandeurs** (accélération, force, moment, pression, travail…)
- Les **noms de phénomènes physiques** (adhérence, basculement, écoulement, dilatation…)
- Les noms divers (liaisons, méthodes, sécurité, unités…)

Ces mots sont, en général, suivis d'un **nom précisant la nature** (coefficient, définition, formulaire, théorème… ou **l'activité associée** (calcul, détermination, modélisation…). Il n'y a jamais d'appel par ces mots.
Exemples : Vitesse (définition) ; Roulements (modélisation).
Pour rechercher un nom de chapitre, se reporter plutôt à la table des matières, page précédente.

A

B

C

* a. m. : action mécanique. **cin. : cinématique.

M

N

P

Q

R

* a. m. : action mécanique. **cin. : cinématique.

NOTA GÉNÉRAL
L'abréviation G.D. suivie d'un numéro signale le chapitre ou le paragraphe du ***Guide du dessinateur industriel*** de A. CHEVALIER (Hachette) qui traite de cette question.

1 Solides

Selon le type de problème que l'on a à traiter, on considère en mécanique divers types de «solides».

1 ■ 1 Solide réel

Il s'agit d'un ensemble physique dont l'aspect paraît invariable lorsqu'on le soumet à des sollicitations diverses et dosées **(par opposition aux fluides : liquides ou gaz)**.

> ■ **La masse d'un solide réel reste constante ;**
> ■ **La forme du solide réel varie très faiblement selon les sollicitations qu'on lui impose, suivant une loi inconnue.**

1 ■ 2 Solide déformable

Il s'agit d'un ensemble physique dont la déformation doit être prise en compte (chapitre 15).

> **Par hypothèse :**
> ■ **La masse d'un solide déformable reste constante ;**
> ■ **La forme varie de façon prévisible et quantifiable en fonction des efforts appliqués.**

On distingue 3 types de «solides» déformables :

■ **Le solide flexible** : il supporte sans réaction notable, la déformation qu'on lui impose ;

■ **Le solide élastique** : il accumule l'énergie de déformation qu'on lui communique et est capable de la restituer en reprenant sa forme initiale ;

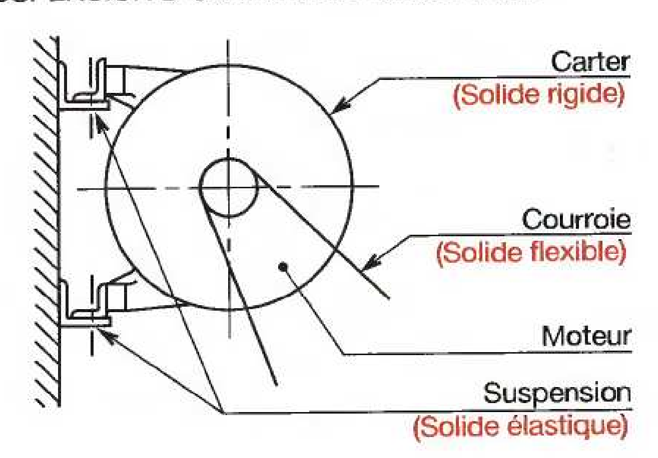
■ **Le solide souple** : il peut se déformer à l'état libre par rapport à la forme requise pour sa fonction ; on peut le reconformer.

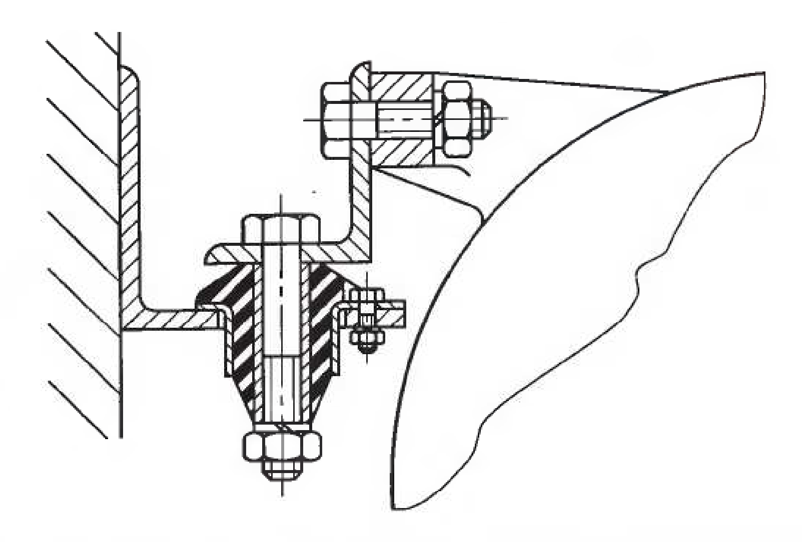
1 ■ 3 Solide parfait

Il s'agit d'un modèle théorique souvent utilisé.

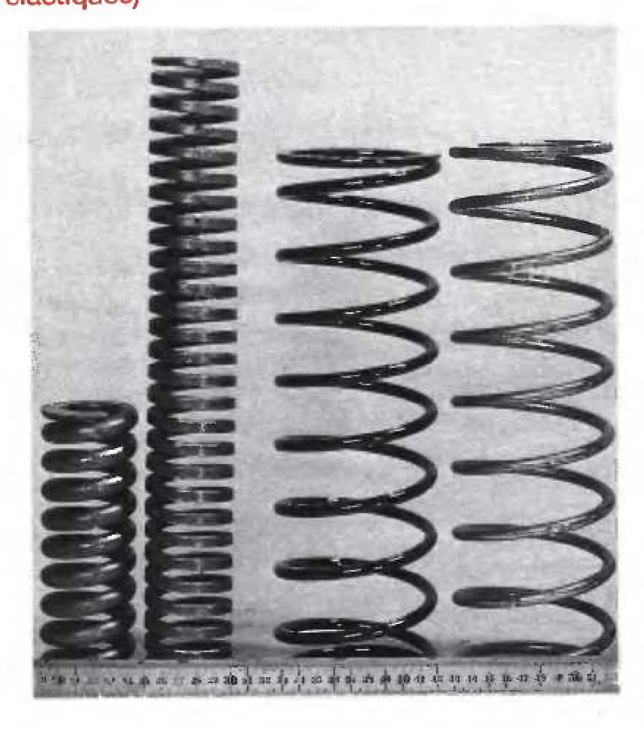
> ■ **La masse d'un solide parfait reste constante ;**
> ■ **Sa forme ne varie pas quelles que soient les sollicitations qu'on lui impose (indéformable) ;**
> ■ **La distance entre deux points quelconques est invariante au cours du temps (rigide).**

SUSPENSION D'UN MOTEUR ÉLECTRIQUE





RESSORTS DE COMPRESSION
(Solides élastiques)



Photographie : ressorts Vanel - 69140 Rillieux la Pape.

2 Modélisation géométrique d'un solide

On reconstitue le solide à l'aide de volumes élémentaires :

- plans,
- cylindres de révolution,
- cônes de révolution,
- sphères,
- tores.

REMARQUES :

- On néglige les dépouilles faibles, les congés, les petits arrondis de raccordements.
- L'informatique permet d'obtenir une forme approchée d'un ensemble complexe en associant des surfaces et des volumes élémentaires.

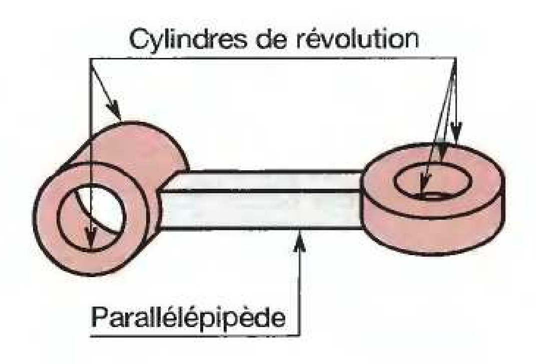
Pour analyser la déformation d'un solide ou ses efforts internes sous charge, on peut le modéliser, selon la complexité :

- soit comme une poutre (voir chapitre 45),
- soit à l'aide de programmes informatiques utilisant, par exemple la méthode des éléments finis.

La méthode consiste à «découper» (on dit aussi : «discrétiser») le solide en un très grand nombre d'éléments triangulaires, donc de petites barres supposées articulées aux «nœuds». L'allongement ou le raccourcissement de ces «éléments finis» permet donc d'étudier les déformations et les efforts internes sous charge.

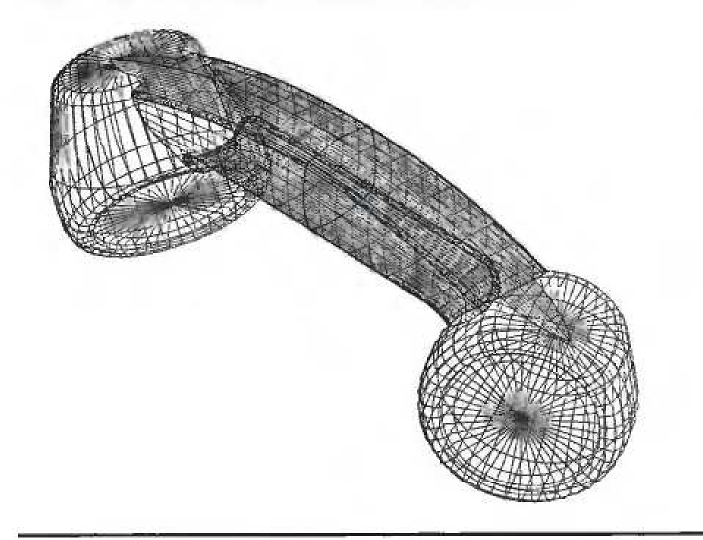
MODÉLISATION D'UN SOLIDE



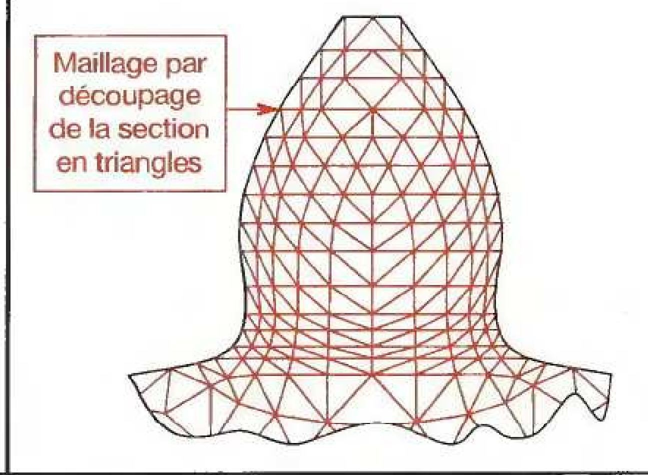


On ajoute ensuite : les congés*
les dépouilles
etc.

REPRÉSENTATION TRIDIMENSIONNELLE



ÉTUDE D'UNE DENT D'ENGRENAGE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS



* Vocabulaire : voir G.D.

3 Repérage d'une liaison

3■1 Repère général

Pour repérer une liaison, le mécanicien est amené à choisir :

- un point fixe, généralement lié au bâti ;
- une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (voir § 74.2) avec des vecteurs unitaires – donc des axes – dirigés selon des directions caractéristiques de l'ensemble : axes de symétries de certaines pièces essentielles, pouvant servir de lignes de références à la cotation.

EXEMPLE :

Pour repérer l'emplacement de tous, les organes d'un véhicule, les constructeurs associent un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au chassis tel que :

$(O, \vec{x})$: axe longitudinal du véhicule ;

$(O, \vec{y})$: axe des roues avant ;

$(O, \vec{z})$: axe perpendiculaire au sol.

- Dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$, on peut repérer le milieu E du pare-chocs arrière :

$$\overrightarrow{OE} = (4\,129 - 842)\,\vec{x} + (713 - 205)\,\vec{z}$$

ou bien $\overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} +\,3\,287 \\ 0 \\ +\,508 \end{pmatrix}$.

- Dans le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$, on peut repérer le centre du contact A du pneu sur le sol :

$$\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{1\,450}{2}\right)\vec{y} - 205\,\vec{z}$$

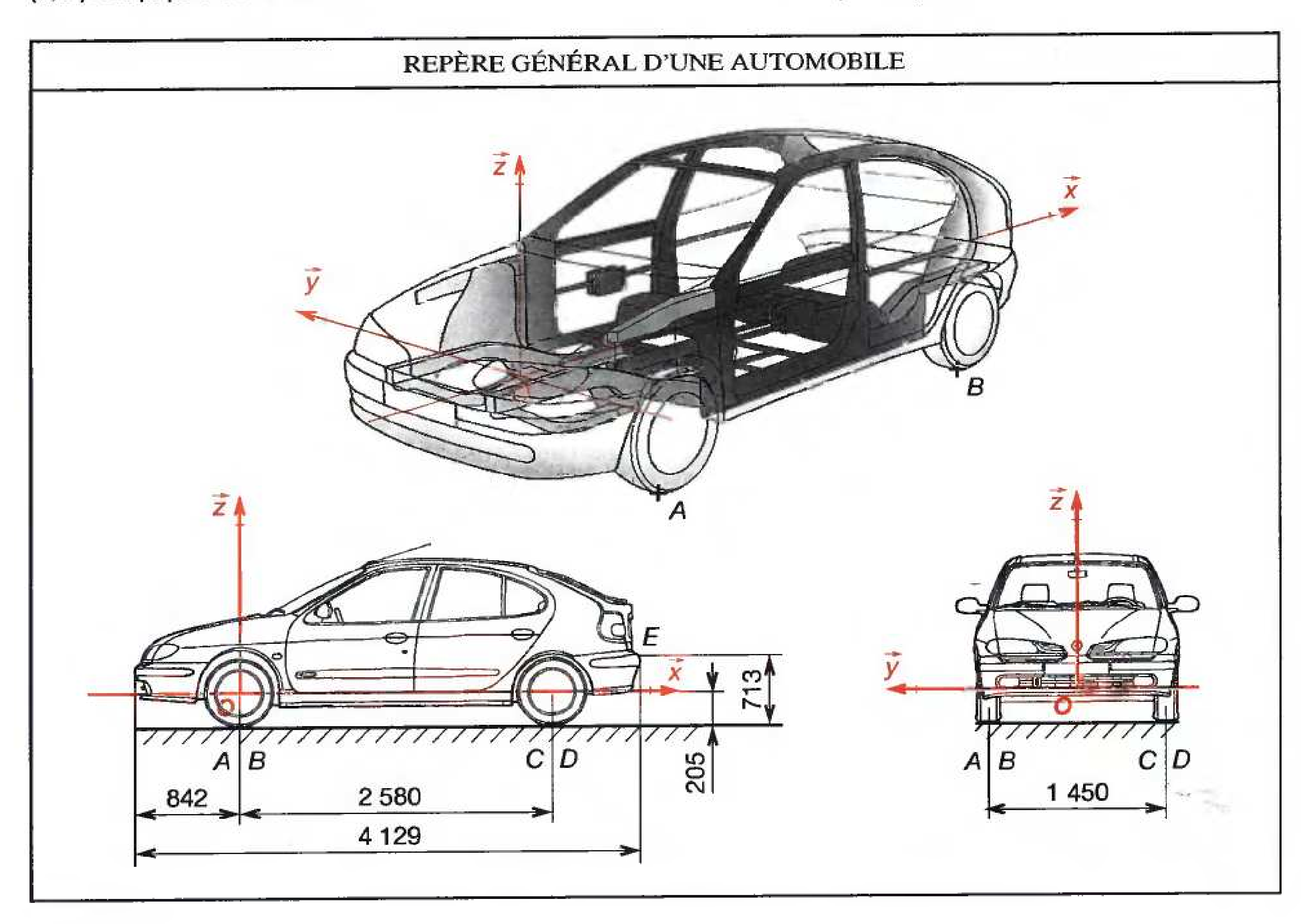
ou bien $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ -\,725 \\ -\,205 \end{pmatrix}$.

- Dans le trièdre $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le milieu C du contact du pneu arrière gauche sur le sol est tel que :

$$\overrightarrow{OC} = 2\,580\,\vec{x} - \frac{1\,450}{2}\,\vec{y} - 205\,\vec{z}$$

ou bien $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 2\,580 \\ -\,725 \\ -\,205 \end{pmatrix}$.

REPÈRE GÉNÉRAL D'UNE AUTOMOBILE



3.2 Repère local

Le repère local permet de caractériser une liaison selon sa forme géométrique particulière :

- axes de symétrie ;
- normale à un plan particulier de cette liaison.

Les axes du repère local doivent tenir compte de ces particularités.

L'origine du repère local sera précisée à partir d'un repère général (§ 3.1).

REMARQUES :

- Pour une liaison n'ayant pas de particularité géométrique évidente (encastrement par exemple), il suffit de choisir un repère local ayant même base que le repère général.
- La position angulaire d'un repère local peut toujours s'exprimer à l'aide des « trois angles d'Euler » :

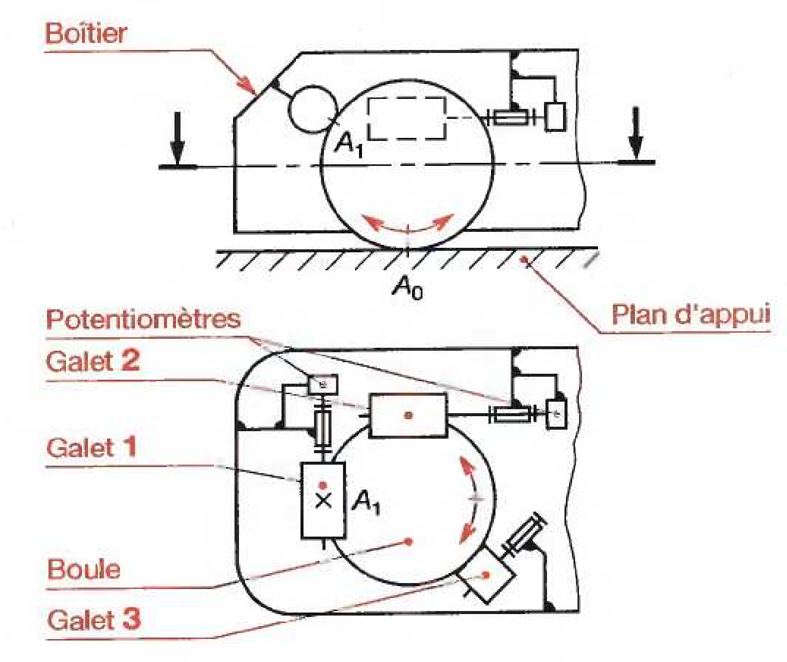
Ψ, angle de précession : rotation autour de $(A_0, \vec{z_0})$.
θ, angle de nutation : rotation autour de $(A_0, \vec{x_1})$.
φ, angle de rotation propre : autour de $(A, \vec{z_2})$.

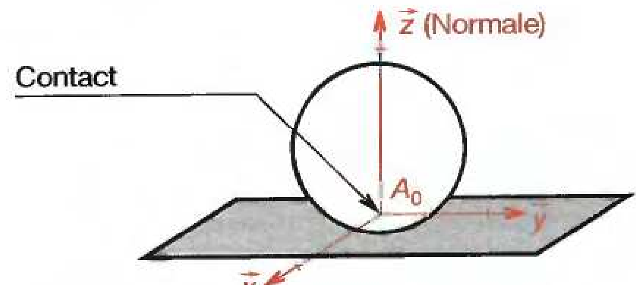
EXEMPLE :

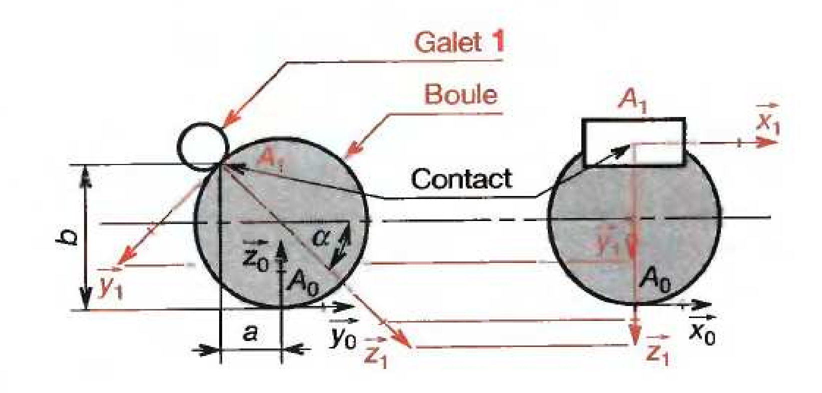
Le repère $(A_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, ci-contre, va permettre de localiser les efforts transmissibles et la zone de contact entre la boule et le galet **1** d'une souris d'ordinateur.

- Dans le repère général choisi $(A_0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$, on relève les coordonnées de A_1 : 0 ; $-a$; $+b$;
- Pour obtenir les directions de $\vec{x_1}$, $\vec{y_1}$, $\vec{z_1}$ à partir de $\vec{x_0}$, $\vec{y_0}$, $\vec{z_0}$, il faut placer un repère $(A_1, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ puis le faire tourner autour de $(A_1, \vec{x_1})$ d'un angle θ, afin d'amener $\vec{y_0}$ en $\vec{y_1}$ selon la tangente au galet **1** et à la boule.

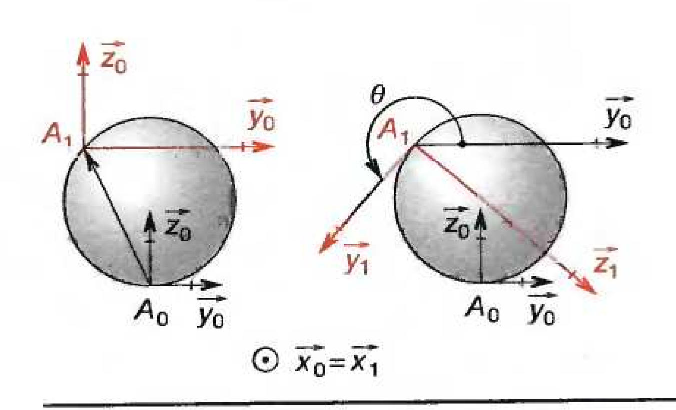
SOURIS D'ORDINATEUR



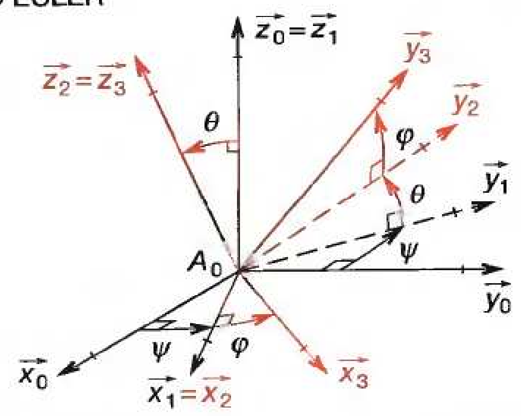




MISE EN PLACE D'UN REPÈRE LOCAL



ANGLES D'EULER



4 Modélisation des liaisons

■ Une liaison élémentaire entre deux solides **1** et **2** est créée par le **contact** d'une surface associée au solide **1** sur une surface associée à **2**.

■ Pour caractériser la nature de leur liaison, il faut étudier les **mouvements relatifs** de **1/2**.

■ Les mouvements relatifs s'étudient dans un **repère local** associé à la liaison, dans lequel :

T_x : caractérise **la liberté de translation** selon l'axe $(A, \vec{x})$ de **1** par rapport à **2** et réciproquement.

R_x : caractérise **la liberté de rotation** autour de l'axe $(A, \vec{x})$ de **1** par rapport à **2** et réciproquement.

REMARQUES :

■ Une liaison entre **1** et **2** peut avoir **au plus six degrés de liberté**. C'est une **liaison libre** (voir fig. ci-contre).

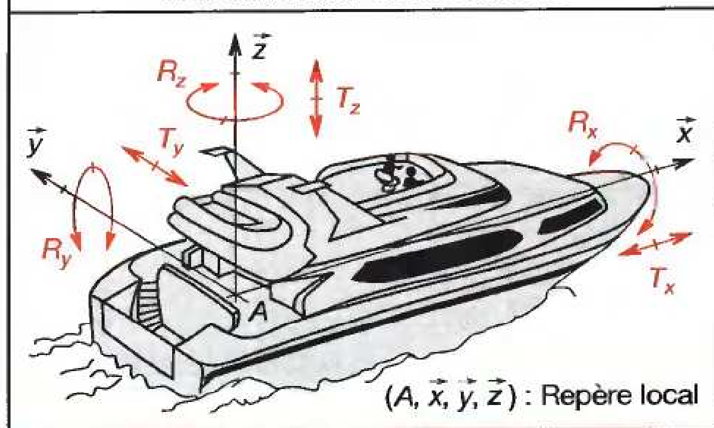
■ Un degré de liberté est une variable qui peut prendre deux états auxquels on peut associer :

le **chiffre 0**, lorsque le degré de liberté est **impossible**,

le **chiffre 1**, lorsque le degré de liberté est **possible**.

■ À un degré de liberté supprimé correspond **un degré de liaison**.

DEGRÉS DE LIBERTÉ D'UN BATEAU **1** PAR RAPPORT À LA TERRE **2**



Possibilités	Nature du mouvement
$R_x = 1$ $R_y = 1$ $R_z = 1$	Rotation autour de $(A, \vec{x})$ possible. Rotation autour de $(A, \vec{y})$ possible. Rotation autour de $(A, \vec{z})$ possible.
$T_x = 1$ $T_y = 1$ $T_z = 1$	Translation selon $(A, \vec{x})$ possible. Translation selon $(A, \vec{y})$ possible. Translation selon $(A, \vec{z})$ possible.

4 ■ 1 LIAISON ENCASTREMENT OU FIXE

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** ne permettant aucun mouvement de l'un par rapport à l'autre : aucune rotation ou translation.

Surfaces de liaison

■ Aucune forme n'est imposée (elles peuvent être de révolution ou prismatique selon l'usinage, le montage).

■ Le soudage supprime les surfaces de liaison.

Repère local orthonormé

■ L'origine *A* est prise soit au centre géométrique de la liaison (fig. 1, 2, 4), soit dans le plan d'encastrement (fig. 3)*.

■ Aucune direction n'est imposée. Prendre $(O, \vec{x})$ selon l'axe longitudinal de **1** ou **2**, s'il existe, et $(O, \vec{y})$ dans le plan de symétrie, s'il existe (fig. 3 et 4).

Schéma spatial

$\vec{y}$ 1 $\vec{x}$ A 2 $\vec{z}$

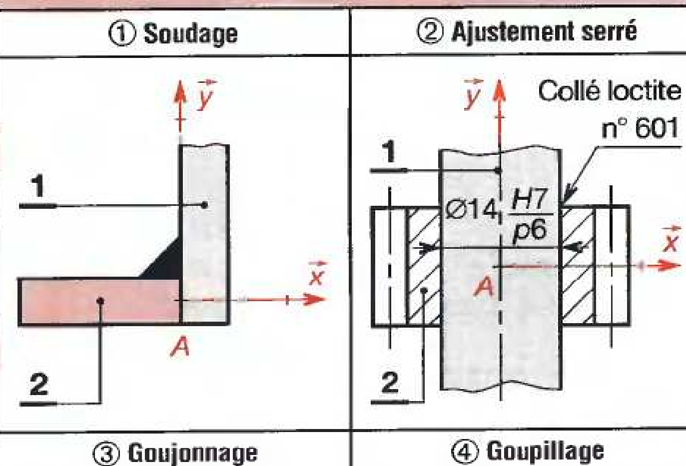
T	R
0	0
0	0
0	0

Schéma plan

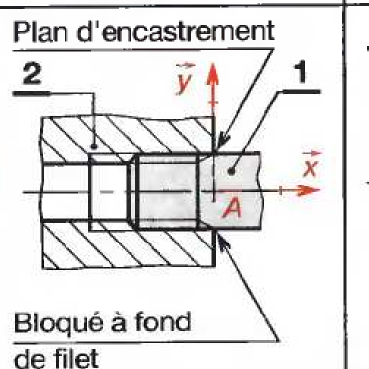
$\vec{y}$ 2 1 $\vec{x}$ A $\odot \vec{z}$

Exemples de solutions technologiques

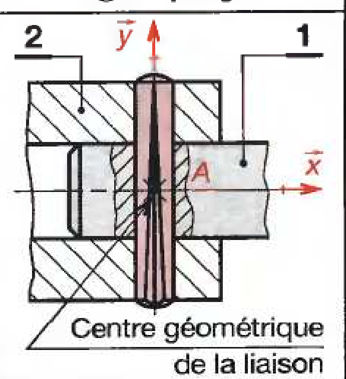
① **Soudage** ② **Ajustement serré**



③ **Goujonnage**



④ **Goupillage**



* Cas les plus généraux, *A* peut être quelconque.

4 ■ 2 LIAISON PIVOT

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant un mouvement de rotation de l'un par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

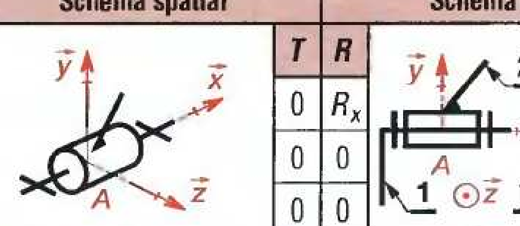
- Surfaces de révolution complémentaires (coussinet) : un seul coussinet si $\ell/d > 1{,}5$; deux si $\ell/d < 0{,}5$.
- Interposition fréquente d'éléments roulants : un ou plusieurs roulements selon jeux, rotulages, etc.



Repère local orthonormé

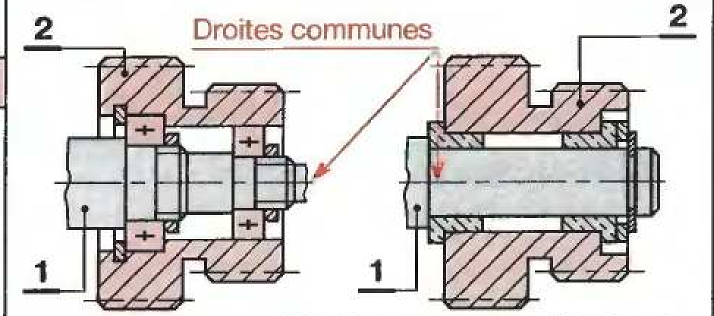
- L'origine est choisie sur l'axe de la liaison.
- L'un des axes doit être orienté selon l'axe de rotation.



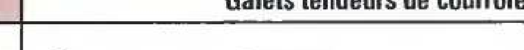
Schéma spatial	T	R	Schéma plan
	0	R_x	
	0	0	
	0	0	

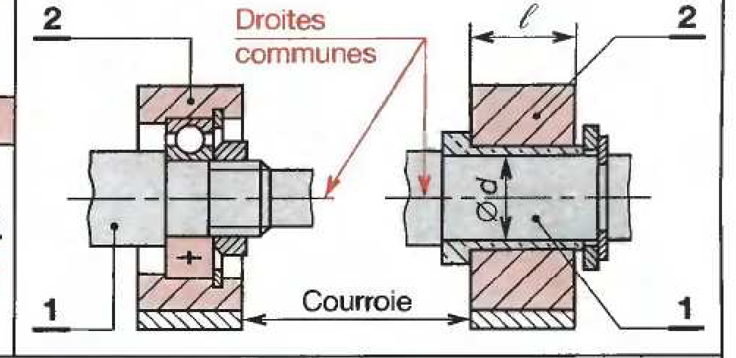
Exemples de solutions technologiques

Roulements ou coussinets



Galets tendeurs de courroie





4 ■ 3 LIAISON GLISSIÈRE

Définition

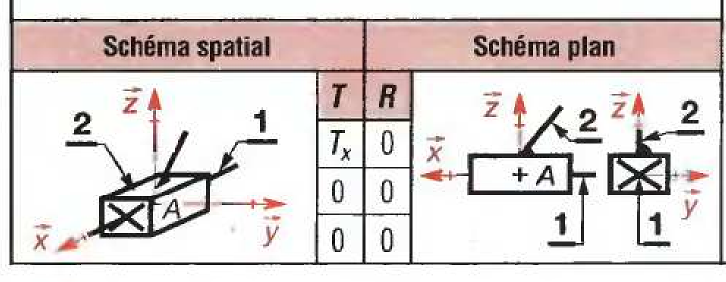
C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant un mouvement de translation de l'un par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

Formes variées conduisant généralement à des liaisons hyperstatiques nécessitant des réglages (exceptés certains guidages sur machines-outils).

Repère local orthonormé

- L'origine *A* est prise à l'intérieur de la glissière.
- L'un des axes doit être dirigé selon la direction du glissement, les autres pouvant exploiter des particularités géométriques (axes de symétrie…).

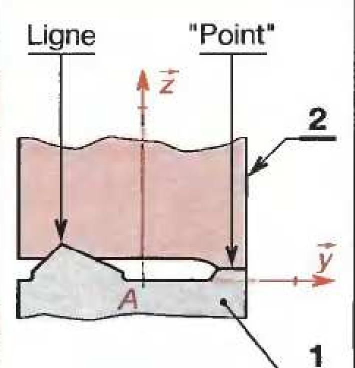
Schéma spatial	T	R	Schéma plan
	T_x	0	
	0	0	
	0	0	

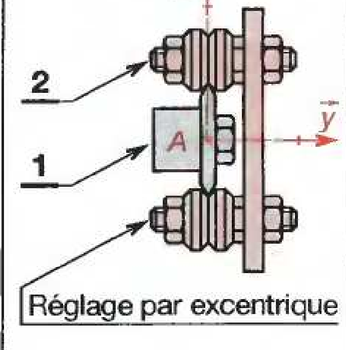
Exemples de solutions technologiques



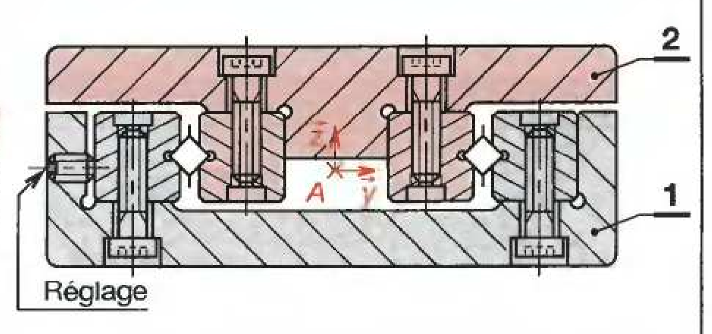
Banc de machine	Rail de guidage

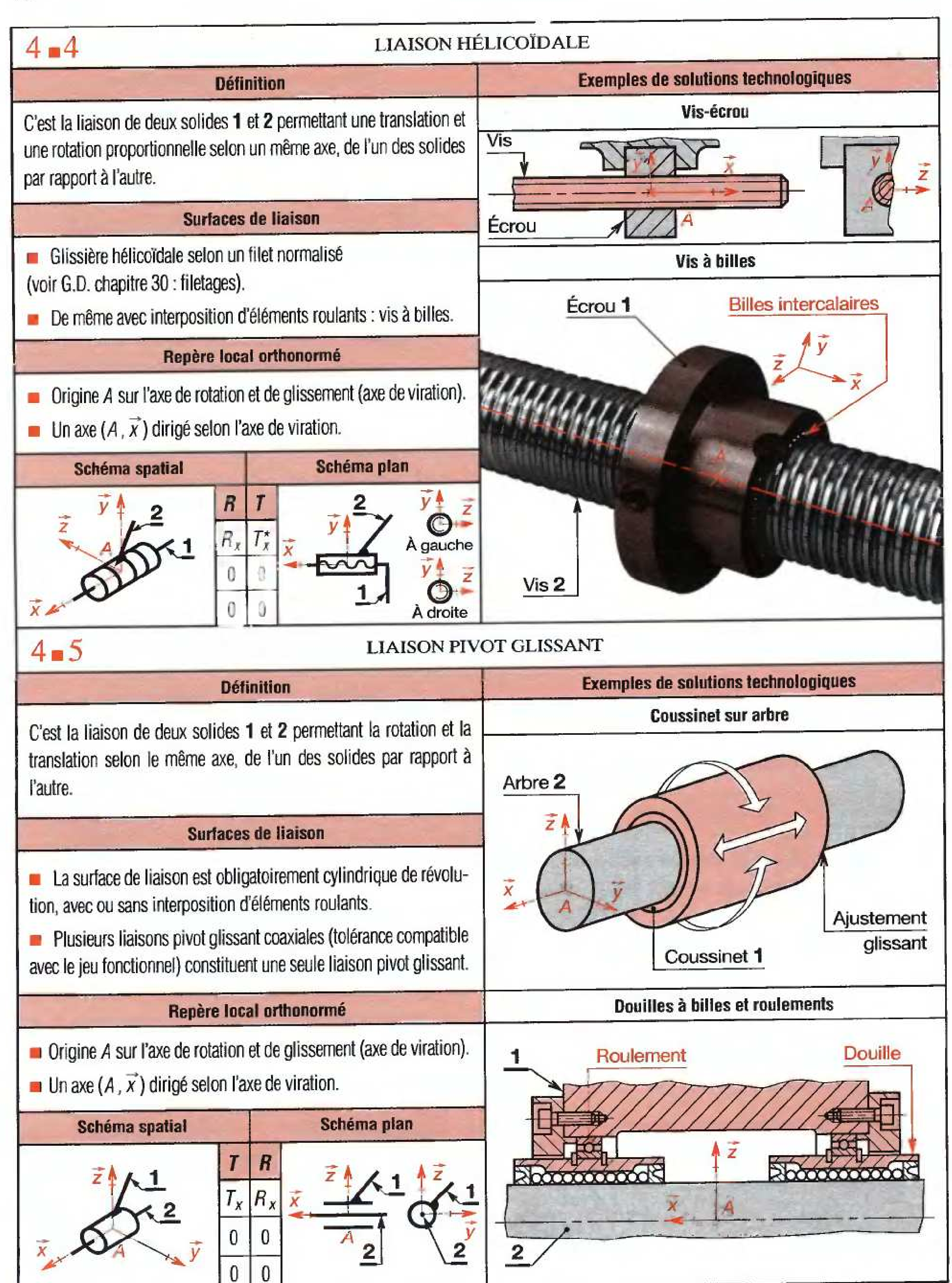






Par glissières à rouleaux





4.4 LIAISON HÉLICOÏDALE

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant une translation et une rotation proportionnelle selon un même axe, de l'un des solides par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

- Glissière hélicoïdale selon un filet normalisé (voir G.D. chapitre 30 : filetages).
- De même avec interposition d'éléments roulants : vis à billes.

Repère local orthonormé

- Origine A sur l'axe de rotation et de glissement (axe de viration).
- Un axe $(A, \vec{x})$ dirigé selon l'axe de viration.

Schéma spatial / Schéma plan

R	T
R_x	T^*_x
0	0
0	0

Exemples de solutions technologiques

Vis-écrou

Vis à billes

4.5 LIAISON PIVOT GLISSANT

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la rotation et la translation selon le même axe, de l'un des solides par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

- La surface de liaison est obligatoirement cylindrique de révolution, avec ou sans interposition d'éléments roulants.
- Plusieurs liaisons pivot glissant coaxiales (tolérance compatible avec le jeu fonctionnel) constituent une seule liaison pivot glissant.

Repère local orthonormé

- Origine A sur l'axe de rotation et de glissement (axe de viration).
- Un axe $(A, \vec{x})$ dirigé selon l'axe de viration.

Schéma spatial / Schéma plan

T	R
T_x	R_x
0	0
0	0

Exemples de solutions technologiques

Coussinet sur arbre

Douilles à billes et roulements

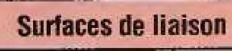
* R_x et T_x sont conjugués : $T_x = k.R_x$.

Photographie : vis Transrol / SKF.

4 ■ 6 LIAISON SPHÉRIQUE À DOIGT

Définition

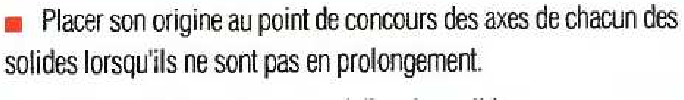
C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la rotation autour de deux axes concourants, de l'un des solides par rapport à l'autre.



Surfaces de liaison

Elles se ramènent à des cannelures bombées (forme sphérique cannelée) emboîtées dans des cannelures rectilignes (alésage cannelé).

Repère local orthonormé



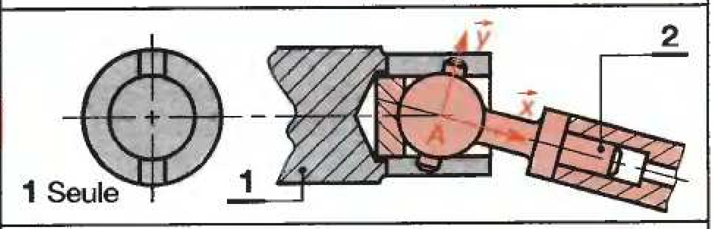
- Placer son origine au point de concours des axes de chacun des solides lorsqu'ils ne sont pas en prolongement.
- Associer les deux autres axes à l'un des solides.

Schéma spatial / Schéma plan

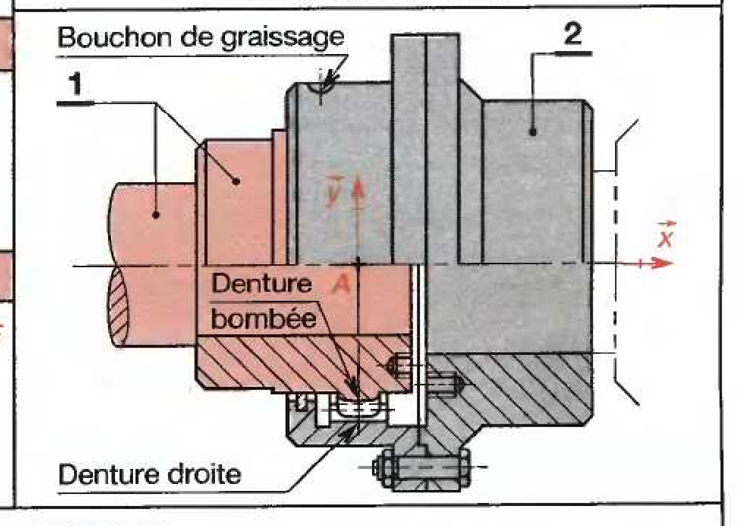
T	R
0	0
0	R_y
0	R_z

Exemples de solutions technologiques

Accouplement à ergots



Accouplement à denture



4 ■ 7 LIAISON APPUI-PLAN

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la translation selon deux axes et une rotation autour du troisième, de l'un des solides par rapport à l'autre.

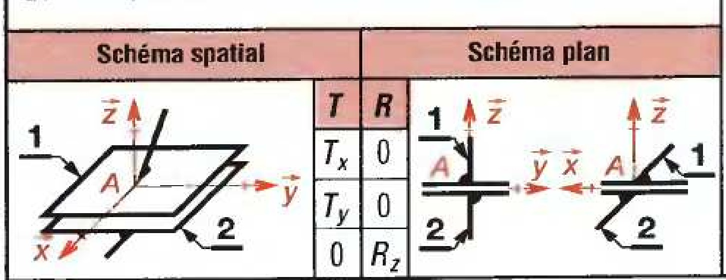
Surfaces de liaison

- Toutes surfaces définissant un plan : plans coplanaires, droites parallèles, trois points, droite et point, etc.
- Sur le dessin ci-contre, on peut remarquer les surfaces S_i.

Repère local orthonormé

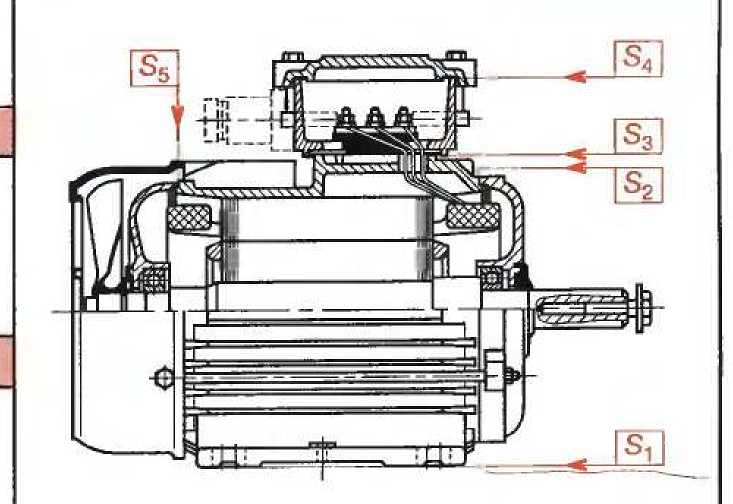
- Origine A dans le plan de contact.
- Un axe dirigé selon la normale au plan, les deux autres étant liés à l'un des solides.

Schéma spatial / Schéma plan



T	R
T_x	0
T_y	0
0	R_z

Exemples de solutions technologiques



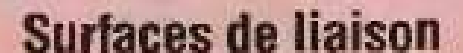
S_1 (appui semelle-support),
S_2 (flasque avant sur carter),
S_3 (bornier-carter),
S_4 (bornier-couvercle),
S_5 (flasque arrière-carter), etc.



4.8 LIAISON ROTULE OU SPHÉRIQUE

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la rotation autour des trois axes, de l'un des solides par rapport à l'autre.



Surfaces de liaison

Sphère mâle et sphère femelle ;

EXEMPLE :

Tête d'attelage à fermeture automatique.

Repère local orthonormé

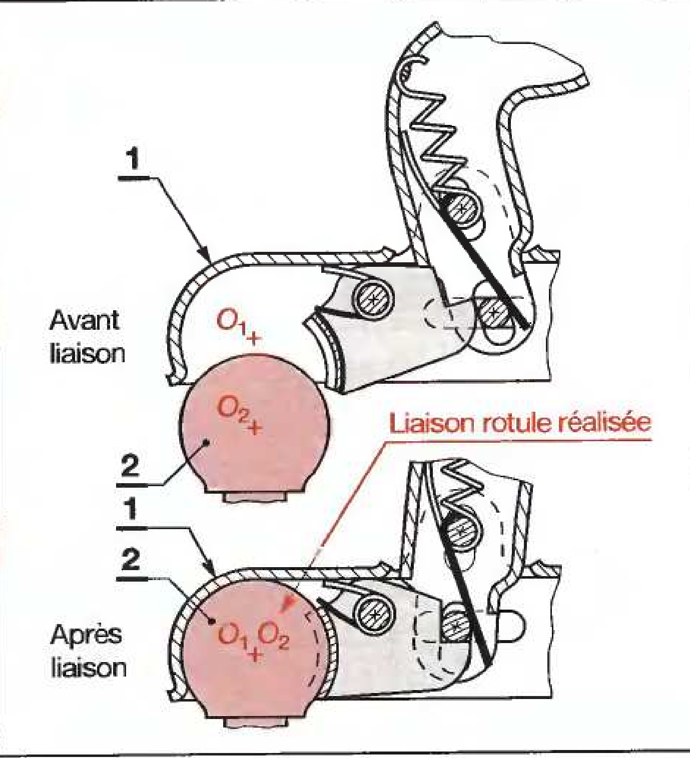
- Origine au centre de rotulage, confondu avec les centres des deux sphères assemblées.
- Axes liés à l'une des sphères.

Schéma spatial / Schéma plan

T	R
0	R_x
0	R_y
0	R_z

Exemples de solutions technologiques

Tête d'attelage



4.9 LIAISON LINÉAIRE RECTILIGNE

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la translation selon deux axes, la rotation autour de l'un deux, la rotation autour d'un troisième perpendiculaire, de l'un des solides par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

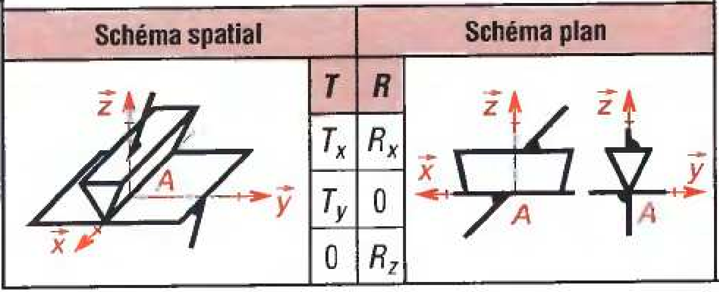
Elle se réduit à une ligne rectiligne (théorique) :

- Arête de deux plans sécants sur un troisième (couteaux de balance).
- Cylindre en appui sur un plan par sa génératrice.

Repère local orthonormé

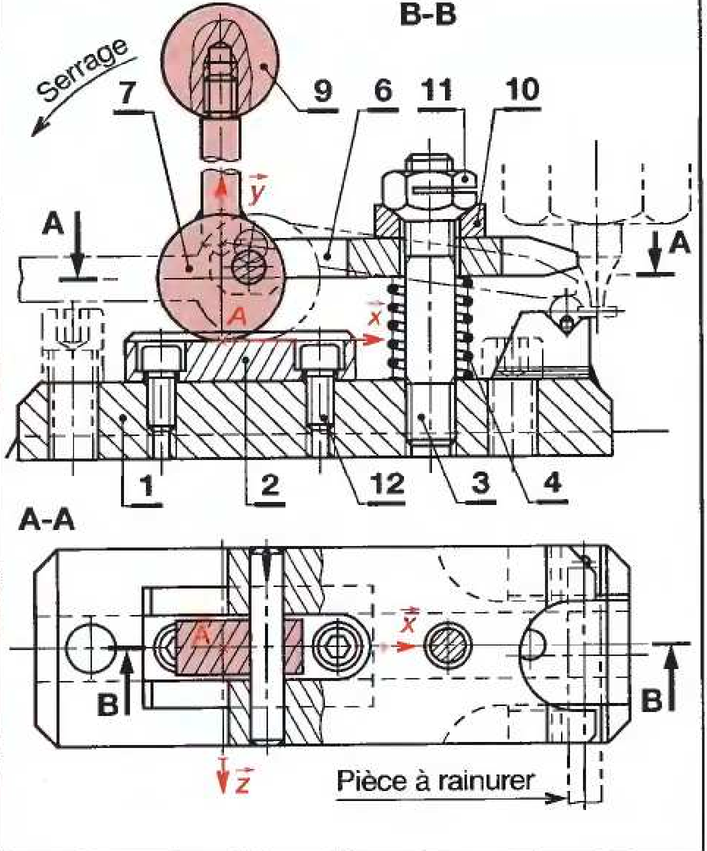
- Origine sur la ligne de contact.
- Un axe dirigé selon la droite de contact et un autre axe dirigé selon la normale au plan tangent commun aux deux solides.

Schéma spatial / Schéma plan



T	R
T_x	R_x
T_y	0
0	R_z

Exemples de solutions technologiques



4 ■ 10 LIAISON SPHÈRE-CYLINDRE OU LINÉAIRE ANNULAIRE

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la rotation autour de trois axes, la translation selon l'un d'eux, de l'un des solides par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

- Contacts entre l'arbre et les joints d'étanchéité.
- Centrages courts de chaque chapeau avec le carter.
- Contacts sous tête réduits de chaque vis avec le carter.
- Guidage par roulement dès l'instant que l'arrêt axial s'effectue sur l'autre roulement (selon sens de rotation).
- Sphère et cylindre de même diamètre tangents intérieurement.

Repère local orthonormé

- Origine au centre de symétrie de la liaison.
- Axe selon celui du « cylindre ».

Schéma spatial — Schéma plan

T	R
T_x	R_x
0	R_y
0	R_z

Exemples de solutions technologiques

Dans un réducteur roue-vis sans fin

Vis
Roue
Arbre
Jeu axial
Joint
Joint
Roulement
Chapeau
Carter

4 ■ 11 LIAISON SPHÈRE-PLAN OU PONCTUELLE

Définition

C'est la liaison de deux solides **1** et **2** permettant la rotation autour de trois axes et la translation selon deux d'entre eux, de l'un des solides par rapport à l'autre.

Surfaces de liaison

Sur l'exemple de la souris d'ordinateur, on observe des liaisons ponctuelles entre :

- Sphère et plan (proche du schéma normalisé), en A_0 ;
- Sphère et cylindre en A_1 ;

on peut trouver aussi dans d'autres assemblages :

- Cône-plan ; etc.

Repère local orthonormé

- Origine au point de contact.
- Un axe selon la normale au plan tangent commun.

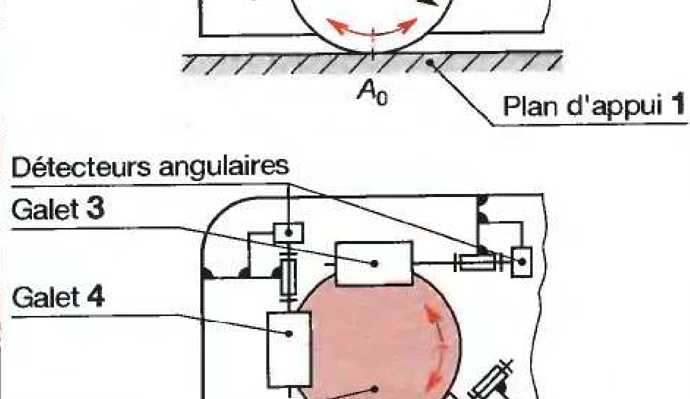
Schéma spatial — Schéma plan

T	R
T_x	R_x
T_y	R_y
0	R_z

Exemples de solutions technologiques

Souris d'ordinateur

Plan tangent commun en A_1
Boîtier (transparent)
Normale au plan
Plan d'appui **1**



5 Modélisation de mécanismes

5.1 Objet

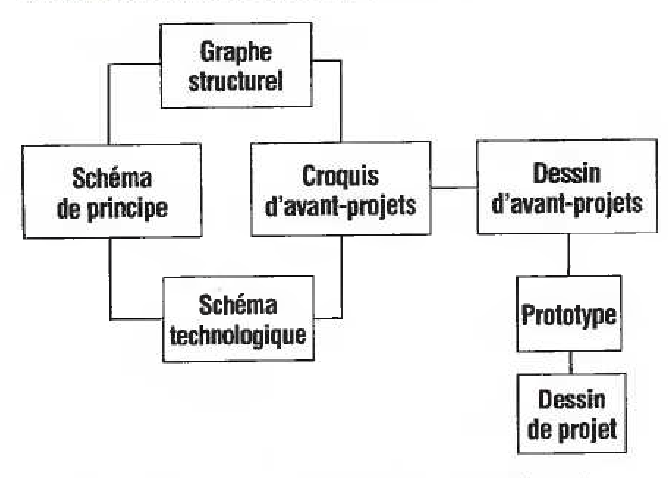
Donner une image simplifiée et symbolique d'un mécanisme afin de faciliter :

- L'étude des mouvements.
- L'étude des efforts.

5.2 Méthodes

5.21 En phase de conception

La démarche s'effectue selon le processus :



L'utilisation des symboles normalisés (voir G.D. 53) est vivement conseillée.

5.22 En phase d'analyse

À partir du plan d'ensemble du mécanisme ;

1° Analyser le fonctionnement

- Mouvements ou équilibres stricts envisageables.
- Justification des divers usinages, des types de montages.

2° Définir les classes d'équivalence

- Colorier d'une même couleur, toutes les pièces en contact n'ayant aucun mouvement relatif pendant l'usage du mécanisme que l'on étudie, à l'exception des pièces déformables (ressorts, membranes…) et des billes ou rouleaux des roulements.

Chaque groupe colorié constitue une classe d'équivalence selon la relation « pas de mouvement relatif » et peut être affecté d'un même repère (par exemple, celui de la pièce principale).

3° Tracer le graphe de structure (ou de liaison) et rechercher dans la norme, le type de liaison reliant chaque groupe.

4° Dessiner le schéma cinématique minimal en y reportant chaque repère de groupe.

SCHÉMA PLAN D'UNE COMMANDE D'AXE

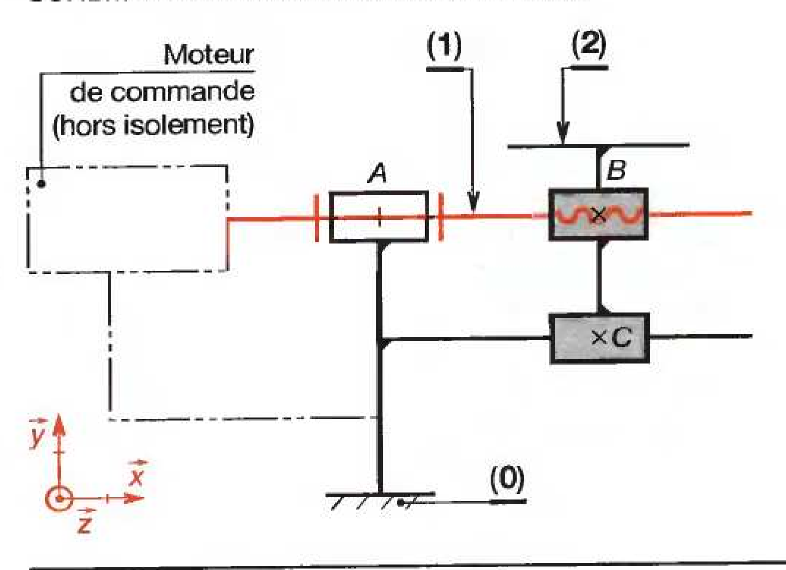
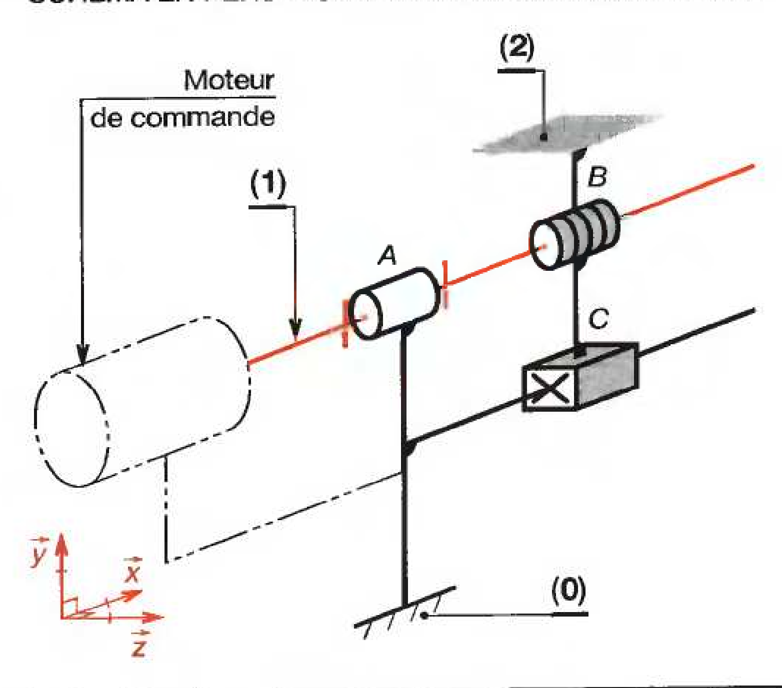
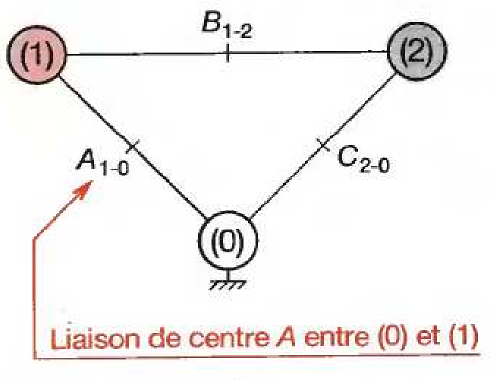


SCHÉMA EN PERSPECTIVE D'UNE COMMANDE D'AXE



GRAPHE DE STRUCTURE (OU DE LIAISONS)

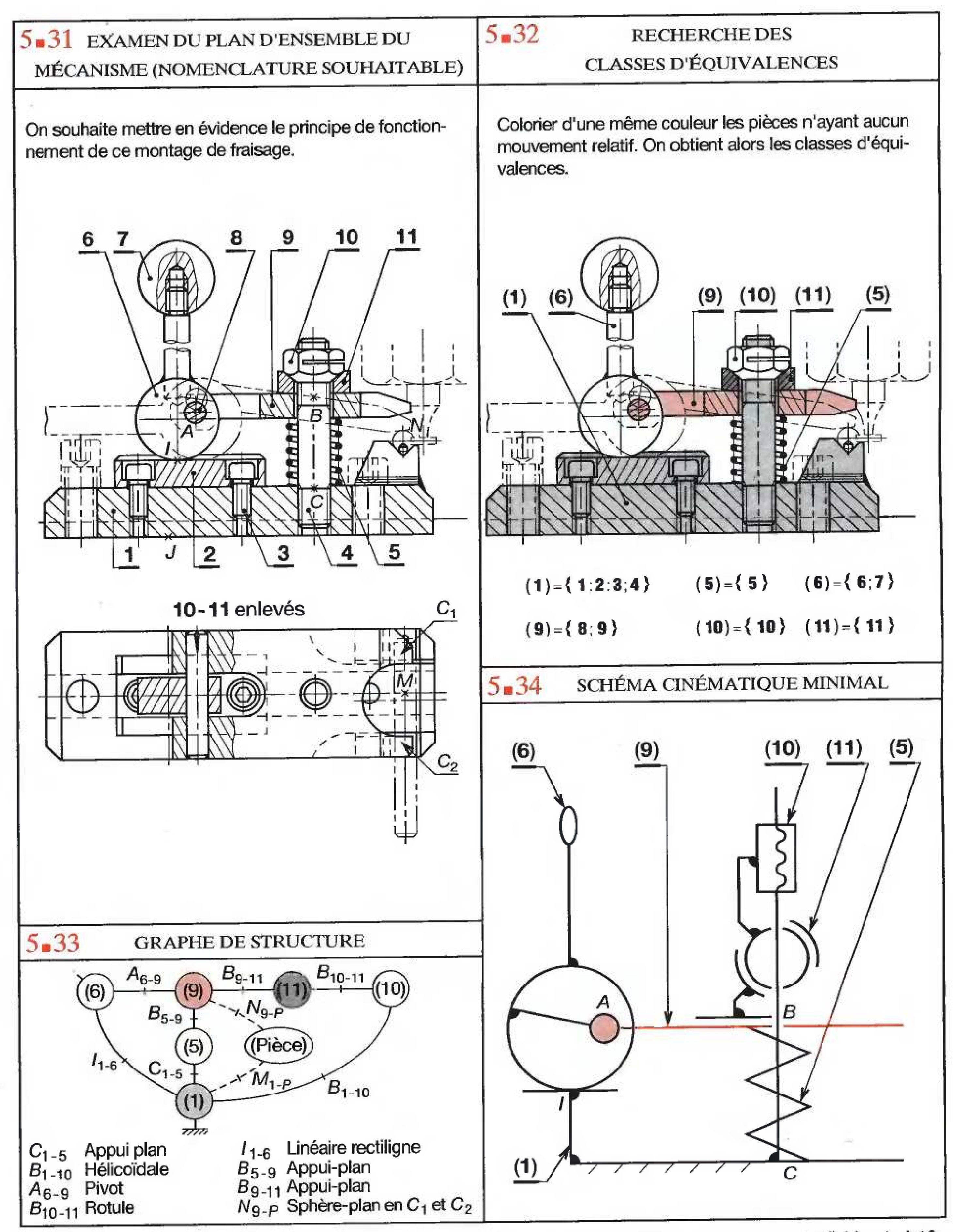


$A_{1\text{-}0}$: liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$

$B_{1\text{-}2}$: liaison hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x})$

$C_{2\text{-}0}$: liaison glissière d'axe $(C, \vec{x})$

5.3 Exemple de modélisation en phase d'analyse



* I_{1-6} devient sphère-plan si l'on considère que les doigts C_1 et C_2 appuient sur la pièce et que le jeu entre **8** et **7**, trop faible, interdit un contact linéaire entre **1** et **6**.

6 Modélisation des actions mécaniques

6.1 Définition d'une action mécanique

On désigne par « action mécanique » toute cause physique capable :

- de modifier le mouvement d'un corps ;
- d'interdire le mouvement d'un corps susceptible de se déplacer ;
- de déformer un corps.

6.2 Formes d'actions mécaniques

- Les forces : elles génèrent ou interdisent un mouvement **selon une droite**.
- Les moments (ou les couples) : ils génèrent ou interdisent un mouvement **autour d'une droite**.

6.3 Représentation vectorielle*

6.31 Glisseur $\left((\Delta), \vec{F}\right)$

Utilisé en statique, il matérialise la force $\vec{F}$:

- par sa direction (Δ),
- son sens,
- sa norme, proportionnelle à l'intensité de $\vec{F}$.

EXEMPLE 1 :
Le ressort exerce sur le clapet **1** une force modélisable par $\left((\Delta), \overrightarrow{A_{2/1}}\right)$.

EXEMPLE 2 :
Pour ouvrir le clapet **1**, l'eau exerce un effort modélisable par $\overrightarrow{B_{4/1}}$.

6.32 Pointeur $\left(P, \vec{F}\right)$

Utilisé en résistance des matériaux et en dynamique, il représente la force $\vec{F}$ avec les caractéristiques du glisseur auxquelles on ajoute un point d'application P.

EXEMPLE :
Sur chaque point A_i de la paroi, l'eau exerce une force élémentaire $\vec{f_i}$ modélisable par un pointeur $(A_i, \vec{f_i})$ ou $(A_j, \vec{f_j})$.

6.33 Couple (ou moment) $\vec{C}$

Pour débloquer le contre-écrou **3** avant réglage, l'opérateur doit exercer un couple $\vec{C}$ caractérisé par :

- l'axe du vissage (ou de rotation) : $(O, \vec{x})$
- le sens de rotation : $+\vec{x}$ (voir règle § 74.4),
- une norme, proportionnelle à cette action mécanique.

6.34 Torseur « force » $\{\mathscr{F}\ \bar{s}/s\}$

Il permet de représenter toutes actions mécaniques exercées par le milieu extérieur $(\bar{s})$ sur (s).

- Glisseurs et pointeurs :

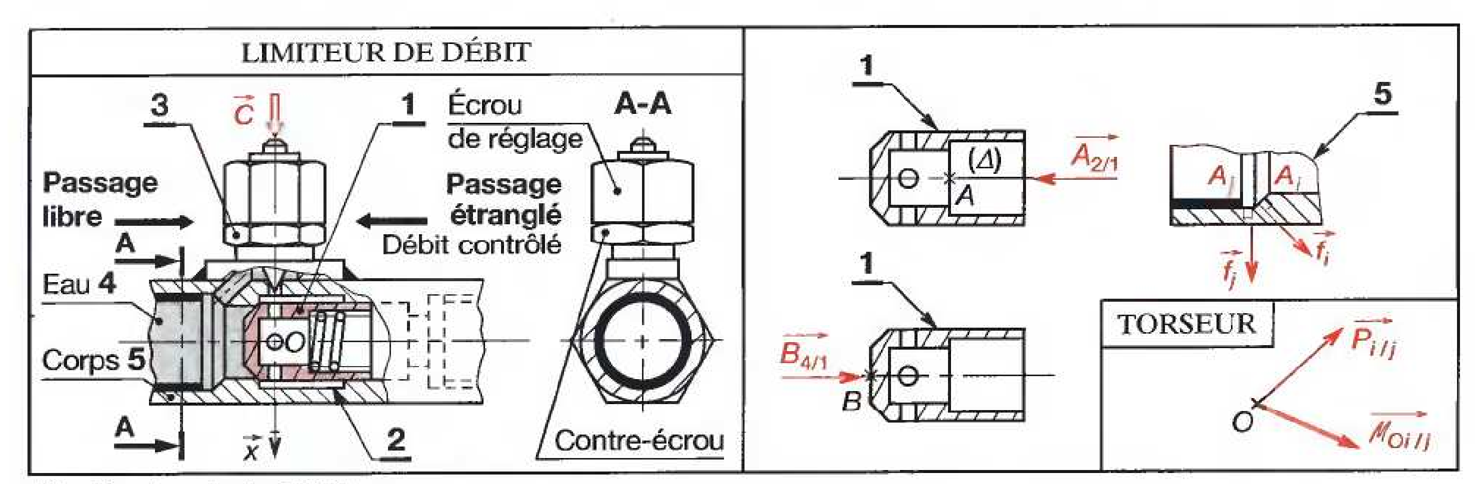
$${}_A\left\{\overrightarrow{A_{2/1}}\ \ \vec{0}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\ ;\ {}_B\left\{\overrightarrow{B_{4/1}}\ \ \vec{0}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\ ;\ {}_{A_i}\left\{\vec{f_i}\ \ \vec{0}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.$$

- Couple : $\left\{\vec{0}\ \ \vec{C}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ (torseur-couple).

- Effort transmissible par une liaison, repérée en un point P, entre un corps ***i*** et un corps ***j*** :

$${}_O\left\{\overrightarrow{P_{i/j}}\ \ \overrightarrow{M_{O\,i/j}}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est alors la base où l'on exprime l'effort.



* Compléments aux chapitres 71 à 74.

6.4 Mise en place d'un torseur «force»

Il s'agit de représenter, le plus précisément possible, les actions mécaniques susceptibles d'être transmises par la zone de contact commune à deux corps **1** et **2**.
On choisit un point, A par exemple, au voisinage de la zone de contact.

Une observation macrogéométrique montrerait que les deux corps **1** et **2** n'ont que quelques points en contact : $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_n$. En chacun de ces points, **2** exerce sur **1** des forces que l'on peut représenter par des pointeurs $(A_1, \vec{f_1}), (A_2, \vec{f_2}), \ldots (A_i, \vec{f_i}), \ldots (A_n, \vec{f_n})$. (**1** exerce les actions opposées sur **2**.)

> **En un point A_i, de la surface de contact, voisine du point A, le corps 2 exerce sur le corps 1 une force élémentaire $(A_i, \vec{f_i})$ et réciproquement.**

Un ensemble de pointeurs se représente aisément par un torseur. D'où le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison A entre **2** et **1** :

$$\{A_{2/1}\} = \left\{\overrightarrow{A_{2/1}} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}}\right\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{A_{2/1}} = \Sigma \vec{f_i} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} = \Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(A_i, \vec{f_i}) \end{cases}$$

REMARQUES :

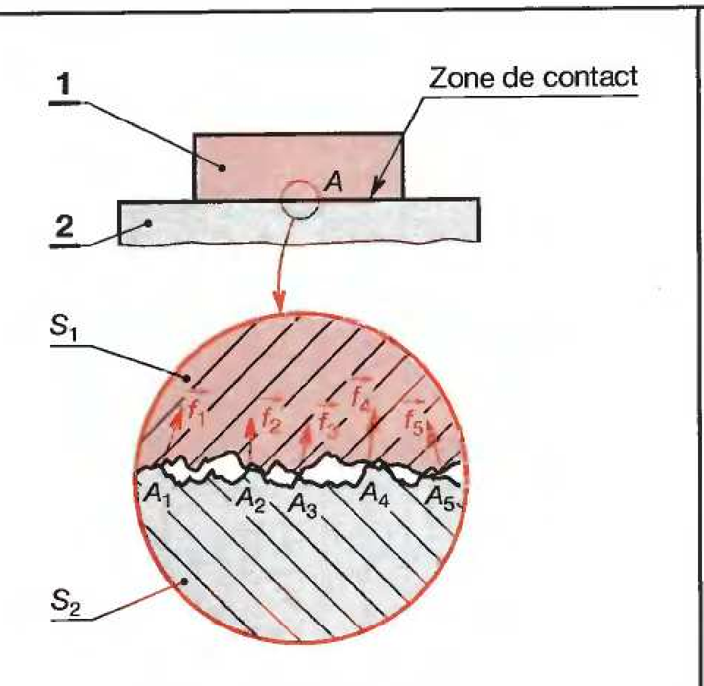
- Le point ne fait que situer la liaison ; on peut le choisir arbitrairement (souvent placé au centre).
- On représente l'action du milieu extérieur **sur le corps que l'on isole .**
- Lors d'un contact, les actions exercées par les éléments du milieu extérieur sont dirigées **vers l'intérieur de la matière** du corps isolé .
- Dans le cas d'une liaison encastrement, on peut conserver le raisonnement et considérer les forces de cohésion de la matière ; les actions élémentaires n'ont alors aucun sens privilégié.
- Le torseur des efforts transmissibles peut être représenté par sa somme et son moment ; on les dessine alors en A.
- Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé direct que l'on peut choisir localement, les éléments de réduction du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison quelconque admettent six projections que l'on note conventionnellement :

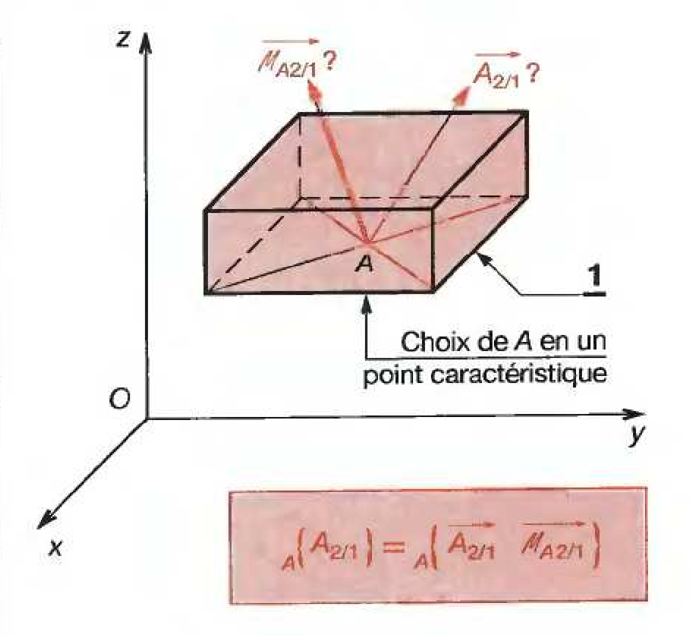
$$\overrightarrow{A_{2/1}} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix}$$

Il convient, en cas d'ambiguïté, de distinguer les repères 1 et 2 des corps **1** et **2** :

$$\overrightarrow{A_{2/1}} \begin{pmatrix} X_{A\,2/1} \\ Y_{A\,2/1} \\ Z_{A\,2/1} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} \begin{pmatrix} L_{A\,2/1} \\ M_{A\,2/1} \\ N_{A\,2/1} \end{pmatrix}$$

- Ces six projections montrent que, quelle que soit **la liaison, elle ne pourra jamais présenter plus de six inconnues scalaires.**





7 Actions des liaisons parfaites dans l'espace

Une liaison parfaite entre **1** et **2** est caractérisée par :

- **Des surfaces de liaison géométriquement parfaites, indéformables et des ajustements sans jeu :**
- **Des contacts sans frottement :**

Les composantes de la résultante $\overrightarrow{A_{2/1}}$ sont nulles selon les axes $(A,\vec{x})$ et $(A,\vec{y})$ car $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est perpendiculaire à π. Les translations T_x et T_y sont possibles (voir fig. 2).

La composante du moment résultant $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}}$ est nulle selon l'axe de rotation $(A,\vec{z})$. La rotation R_z est possible (voir fig. 2).

② Identifier la liaison

Liaison **1-2** :

Appui-plan
$T_x = 1$
$T_y = 1$
$R_z = 1$

$${}_A\{A_{2/1}\} \overset{?}{=} {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$$

DÉMARCHE :

On identifie les composantes nulles du torseur transmissible ${}_A\{A_{2/1}\}$, dans le repère local $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en respectant les deux étapes suivantes :

- les composantes nulles de la résultante $\overrightarrow{A_{2/1}}$ correspondent aux translations possibles de **1/2** selon les trois axes ;
- les composantes nulles du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}}$ correspondent aux rotations possibles de **1/2** selon les trois axes.

③ Identifier les composantes nulles

Translation selon :
- $(A,\vec{x})$ possible : $T_x = 1 \Rightarrow X_A = 0$
- $(A,\vec{y})$ possible : $T_y = 1 \Rightarrow Y_A = 0$
- $(A,\vec{z})$ impossible : $T_z = 0 \Rightarrow Z_A \neq 0$

Rotation selon :
- $(A,\vec{x})$ impossible : $R_x = 0 \Rightarrow L_A \neq 0$
- $(A,\vec{y})$ impossible : $R_y = 0 \Rightarrow M_A \neq 0$
- $(A,\vec{z})$ possible : $R_z = 1 \Rightarrow N_A = 0$

① Choisir le repère local $\mathcal{R}$ $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

- A : centre géométrique de la liaison *.
- $(A,\vec{x})$, $(A,\vec{y})$ dans le plan π.
- $(A,\vec{z})$ normal au plan π.

④ Écrire le torseur transmissible

$${}_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} & \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Cette démarche est commune à toutes les liaisons ci-dessous.

Liaison	Schématisation	Translation		${}_A\{A_{2/1}\}$	Rotation		Représentation de ${}_A\{A_{2/1}\}$
Encastrement ou fixe $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})=(\mathcal{R})$ **quelconque** **		T_x	0	${}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	0	R_x	
		T_y	0		0	R_y	
		T_z	0		0	R_z	
		$n_s = 6$ ***					
Pivot de centre : A, d'axe : $(A,\vec{z})$		T_x	0	${}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	0	R_x	
		T_y	0		0	R_y	
		T_z	0		1	R_z	
		$n_s = 5$					
Glissière de centre : A, d'axe : $(A,\vec{x})$		T_x	1	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	0	R_x	
		T_y	0		0	R_y	
		T_z	0		0	R_z	
		$n_s = 5$					

* Cas le plus général. ** A est souvent situé dans le plan d'encastrement. *** n_S : nombre d'inconnues statiques ou degré de liaison.

Liaison	Schématisation	Translation		${}_A\{\mathcal{A}_{2/1}\}$	Rotation		Représentation de ${}_A\{\mathcal{A}_{2/1}\}$
Hélicoïdale **Centre *A*** **Axe $(A, \vec{x})$**	$T_x = k . R_x$	T_x T_y T_z	1* 0 0	${}_A\begin{Bmatrix} X_A & kX_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}^{*}$ $n_s = 5$ **	1* 0 0	R_x R_y R_z	
Pivot glissant **Centre *A*** **Axe $(A, \vec{x})$**		T_x T_y T_z	1 0 0	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 4$	1 0 0	R_x R_y R_z	
Sphérique à doigt **Centre *A*** **Axe doigt $(A, \vec{z})$** **Rainure dans $(A, \vec{x}, \vec{z})$**		T_x T_y T_z	0 0 0	${}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 4$	0 1 1	R_x R_y R_z	
Appui-plan **Centre *A*** **Normale $(A, \vec{z})$**		T_x T_y T_z	1 1 0	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 3$	0 0 1	R_x R_y R_z	
Rotule ou sphérique **Centre *A***		T_x T_y T_z	0 0 0	${}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 3$	1 1 1	R_x R_y R_z	
Linéaire rectiligne **Centre *A*** **Normale $(A, \vec{z})$** **Arête $(A, \vec{x})$**		T_x T_y T_z	1 1 0	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 2$	1 0 1	R_x R_y R_z	
Sphère-cylindre **(Linéaire annulaire)** **Centre *A*** **Axe $(A, \vec{x})$**		T_x T_y T_z	1 0 0	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 2$	1 1 1	R_x R_y R_z	
Sphère-plan **(Ponctuelle)** **Normale $(A, \vec{z})$**		T_x T_y T_z	1 1 0	${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_s = 1$	1 1 1	R_x R_y R_z	

* T_x et R_x sont liés, force et moment aussi : $L_A = k . X_A$ où $k = \pm \frac{p}{2\pi}$ (pas cinématique) et p (pas). ** n_s = nombre d'inconnues statiques ou degré de liaison.

8 Modélisation, dans le plan, des actions mécaniques

Quand la surface de contact a une géométrie et des actions transmissibles qui présentent une symétrie par rapport à un plan, on peut effectuer une modélisation plane.

Choisir alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes de symétrie de la liaison.

EXEMPLE :

Sur la figure ci-contre, on suppose que (P), défini par les axes $(A, \vec{x})$ et $(A, \vec{y})$ est un plan de symétrie pour la liaison en A entre deux corps (S_1) et (S_2).

REMARQUES :

- Chaque point de contact A_i, voisin de A, possède un symétrique A'_i par rapport à (P) : $H_i A_i = H_i A'_i$;
- Chaque pointeur $(A_i, \vec{f}_i)$ admet un symétrique $(A'_i, \vec{f'}_i)$ tel que :

$$\vec{f}_i = f_{ix}.\vec{x} + f_{iy}.\vec{y} + f_{iz}.\vec{z}$$
$$\vec{f'}_i = f_{ix}.\vec{x} + f_{iy}.\vec{y} - f_{iz}.\vec{z}$$

- On en déduit la forme du torseur en A associé aux efforts transmissibles par cette liaison :

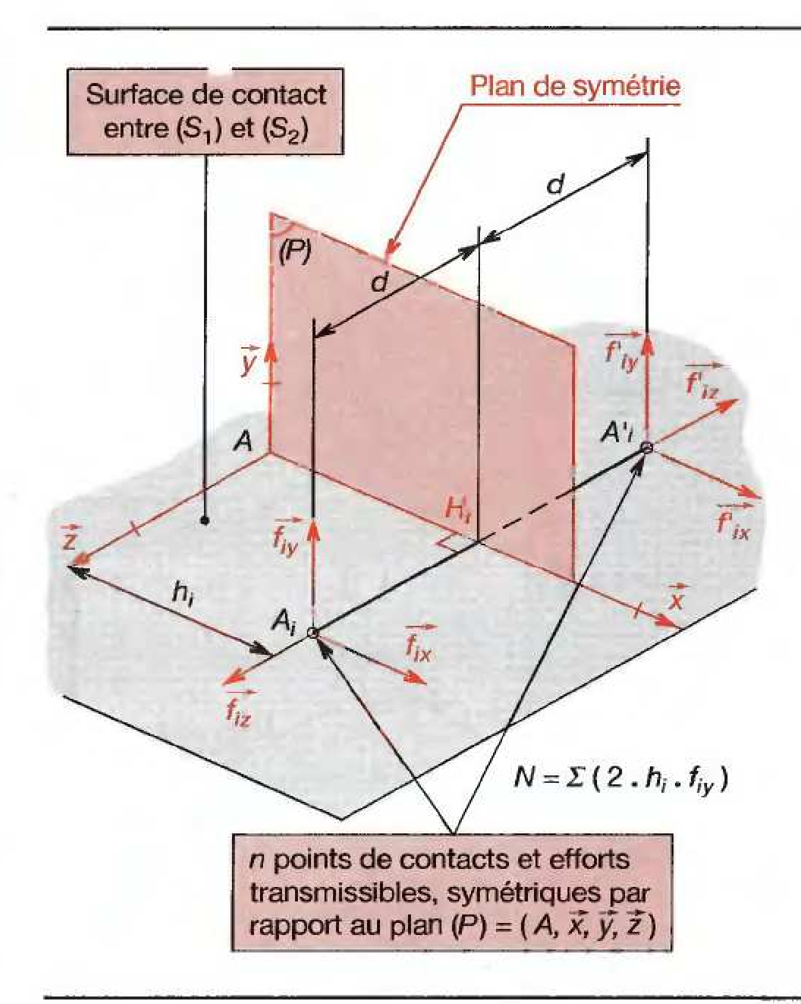
$$\Sigma(\vec{f}_i+\vec{f'}_i).\vec{x} = \Sigma(2.f_{ix}) = X \quad \Sigma\overline{\mathcal{M}}_{Ax}(A_i,\vec{f}_i) + \Sigma\overline{\mathcal{M}}_{Ax}(A'_i,\vec{f'}_i) = 0$$
$$\Sigma(\vec{f}_i+\vec{f'}_i).\vec{y} = \Sigma(2.f_{iy}) = Y \quad \Sigma\overline{\mathcal{M}}_{Ay}(A_i,\vec{f}_i) + \Sigma\overline{\mathcal{M}}_{Ay}(A'_i,\vec{f'}_i) = 0$$
$$\Sigma(\vec{f}_i+\vec{f'}_i).\vec{z} = 0 \quad \Sigma\overline{\mathcal{M}}_{Az}(A_i,\vec{f}_i) + \Sigma\overline{\mathcal{M}}_{Az}(A'_i,\vec{f'}_i) = N$$

- d'où le torseur :

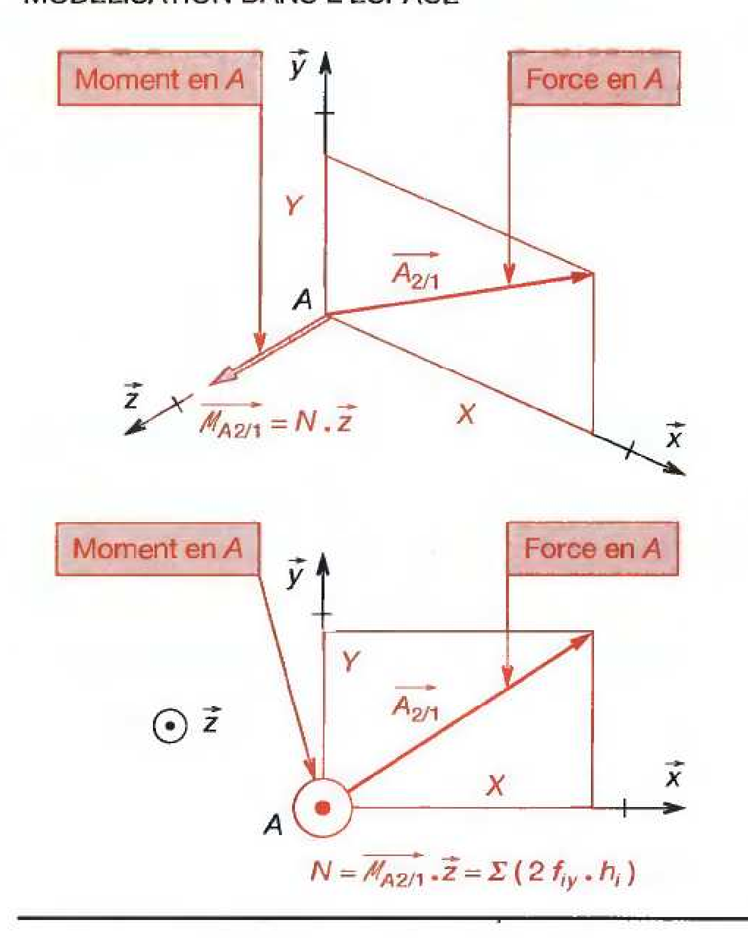
$$_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- **Il n'y a jamais plus de trois inconnues scalaires.**
- Il revient au même de projeter toutes les actions mécaniques dans le plan de symétrie et d'ajouter un moment.

Lorsqu'une liaison possède un plan de symétrie à la fois géométrique et pour les efforts transmissibles, on peut rapporter tous les efforts dans ce plan à condition d'ajouter un moment ; ce dernier admet une seule projection, perpendiculaire à ce plan.



MODÉLISATION DANS L'ESPACE



EXEMPLE :

Le dessin ci-contre montre le mécanisme de commande des quatre soupapes d'un cylindre de moteur à explosion.

Pour ouvrir l'une des soupapes, la came **1** agit en *A* sur le linguet **2** qui transmet une action mécanique à la soupape **6** par l'intermédiaire de la tige **3**, du culbuteur **4**, du poussoir réglable **5** en comprimant le ressort **7-8**.

L'examen de ce mécanisme montre que toutes ces pièces et les efforts appliqués ont un plan de symétrie en commun.

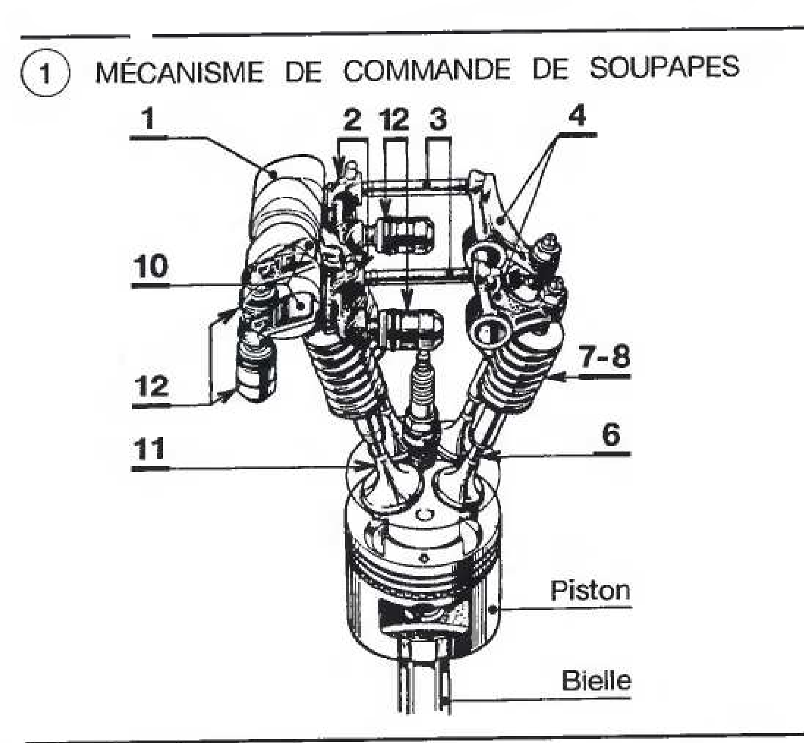
> **Un mécanisme dont toutes les pièces utiles admettent un même plan de symétrie pour la géométrie et les efforts est un mécanisme plan.**

REMARQUE :

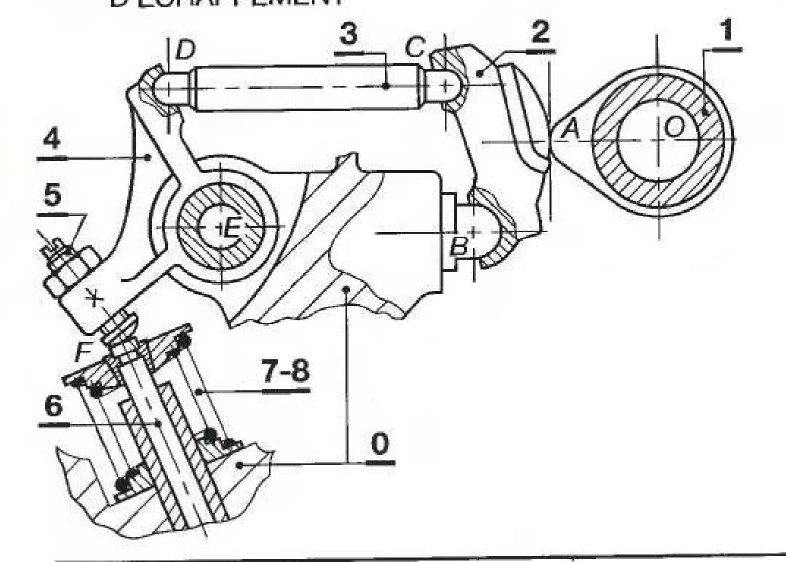
- Une seule vue permet de définir le fonctionnement d'un mécanisme plan (fig. 2).
- Le schéma cinématique du mécanisme se construit entièrement dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ (fig. 3).

Liaison	Repère local	Commentaires
0 - 1 (Pivot)	$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Axe de rotation $(O, \vec{z})$; $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ conviennent.
1 - 2 (Sphère-plan)	$(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	$(A, \vec{x})$ indique la normale au contact.
0 - 2 (Rotule)	$(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Seul *B* est important ; la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ convient.
2 - 3 (Rotule)	$(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Seul *C* est important ; la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ convient.
3 - (4-5) (Rotule)	$(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Seul *D* est important ; la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ convient.
(4-5) - 6 (Sphère-plan)	$(F, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$	$(F, \vec{y_1})$ décrit la normale au plan de contact. $(F, \vec{x_1}, \vec{y_1})$ est coplanaire à $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
6 - 0 (Pivot glissant)	$(I, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$	$(I, \vec{y_1})$ décrit l'axe du pivot glissant. Les axes $(F, \vec{x_1})$ et $(F, \vec{z})$ conviennent. Repère coplanaire à $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

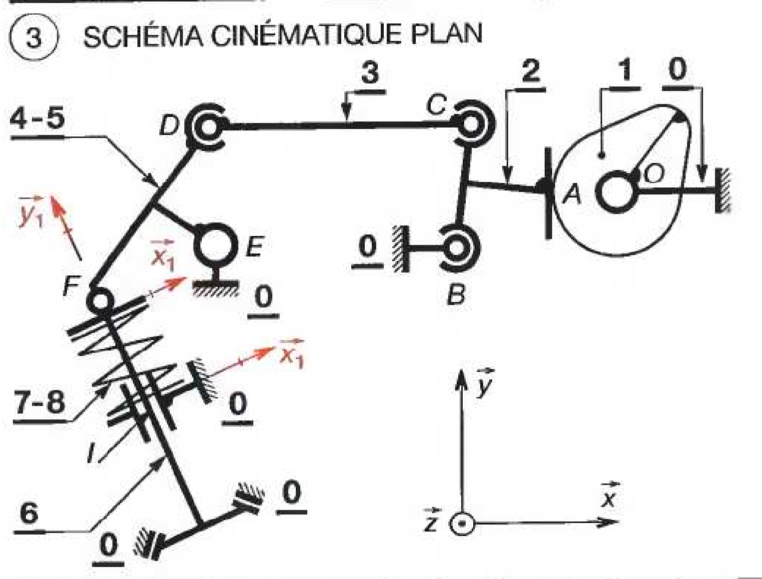
(1) MÉCANISME DE COMMANDE DE SOUPAPES



(2) MÉCANISME DE COMMANDE DE SOUPAPES D'ÉCHAPPEMENT



(3) SCHÉMA CINÉMATIQUE PLAN



9 Actions des liaisons parfaites dans le plan

Lorsqu'une liaison **1-2** présente un plan de symétrie $P = (A, \vec{x}, \vec{y})$ pour la géométrie et les efforts, les actions mécaniques de **2/1** sont modélisables en un point A, appartenant à (P), par un torseur dont la forme est :

$$_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ **(voir chapitre 8)**

avec : $(A, \vec{x})$ et $(A, \vec{y})$ contenus dans le plan (P) ;
$(A, \vec{z})$ perpendiculaire au plan (P).

Pour une liaison parfaite* particulière, parmi les composantes ci-dessus, certaines sont nulles.

① Choisir le repère local $\mathcal{R}$ $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

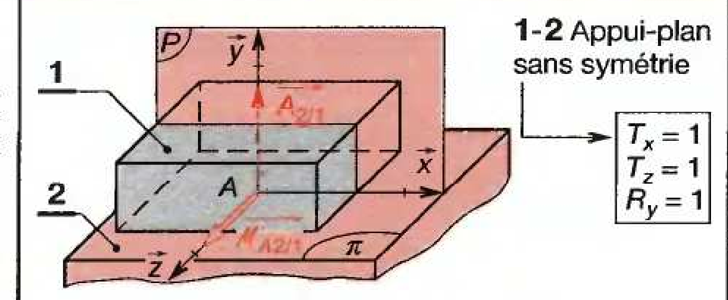
- A : centre géométrique de la liaison.
- $(A, \vec{x})$ dans le plan (π) et le plan (P) de symétrie.
- $(A, \vec{y})$ normal à (π) et dans le plan (P) de symétrie.
- $(A, \vec{z})$ dans le plan (π) et normal au plan (P).

② Poser les composantes nulles

Compte tenu de (P) et de $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on écrit :

Translations potentielles ▶ $${}_A\begin{Bmatrix} X_A? & 0 \\ Y_A? & 0 \\ 0 & N_A? \end{Bmatrix}$$ ◀ Rotation potentielle

③ Identifier la liaison



Pour un problème plan, avec symétrie : le degré de liberté se limite à T_x.

DÉMARCHE : (voir exemple ci-contre)

1° Choisir le repère local $\mathcal{R}(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. $(A, \vec{x})$ et $(A, \vec{y})$ étant dans le plan de symétrie, les composantes Z_A, L_A, M_A, sont nulles. Écrire les trois zéros correspondants.

2° Pour la liaison considérée, étudier les possibilités de déplacement de **1/2** selon les axes du repère en maintenant le plan (P_1) appartenant à **1** en coïncidence avec le plan (P_2) appartenant à **2**.

Il y a lieu de respecter les deux étapes suivantes :

- Les composantes nulles de la résultante $\overrightarrow{A_{2/1}}$ sur les deux axes contenus dans (P) correspondent aux possibilités de translation de **1/2** selon ces deux axes.
- La composante nulle du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}$ selon un axe perpendiculaire à (P) correspond à la possibilité de rotation de **1/2** autour de cet axe.

3° Calculer l'invariant scalaire : $J = \overrightarrow{A_{2/1}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}$.
Selon le résultat, le problème peut se simplifier.
Si $J = 0$, le torseur $_A\{A_{2/1}\}$ est réductible en un point A' à un glisseur d'expression plus simple car $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A'2/1}} = \vec{0}$.
La position de A' est à déterminer (chapitre 76).

④ Identifier les composantes nulles

Translation selon :	■ $(A, \vec{x})$ possible :	$T_x = 1$ ⇒	$X_A = 0$
	■ $(A, \vec{y})$ impossible :	$T_y = 0$ ⇒	$Y_A = 0$
Rotation selon :	■ $(A, \vec{z})$ impossible :	$R_z = 0$ ⇒	$N_A \neq 0$

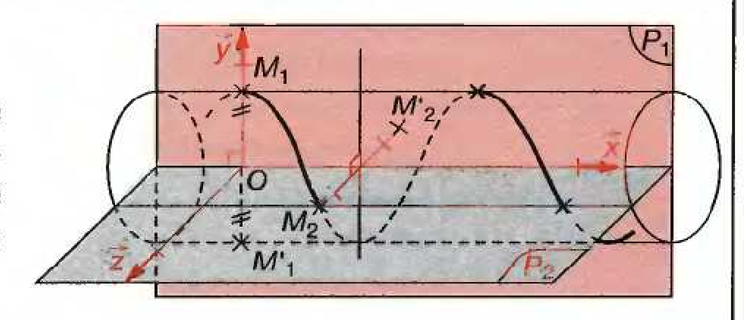
⑤ Écrire le torseur des efforts transmissibles

$$_A\{A_{2/1}\} = \left\{\overrightarrow{A_{2/1}} \;\; \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

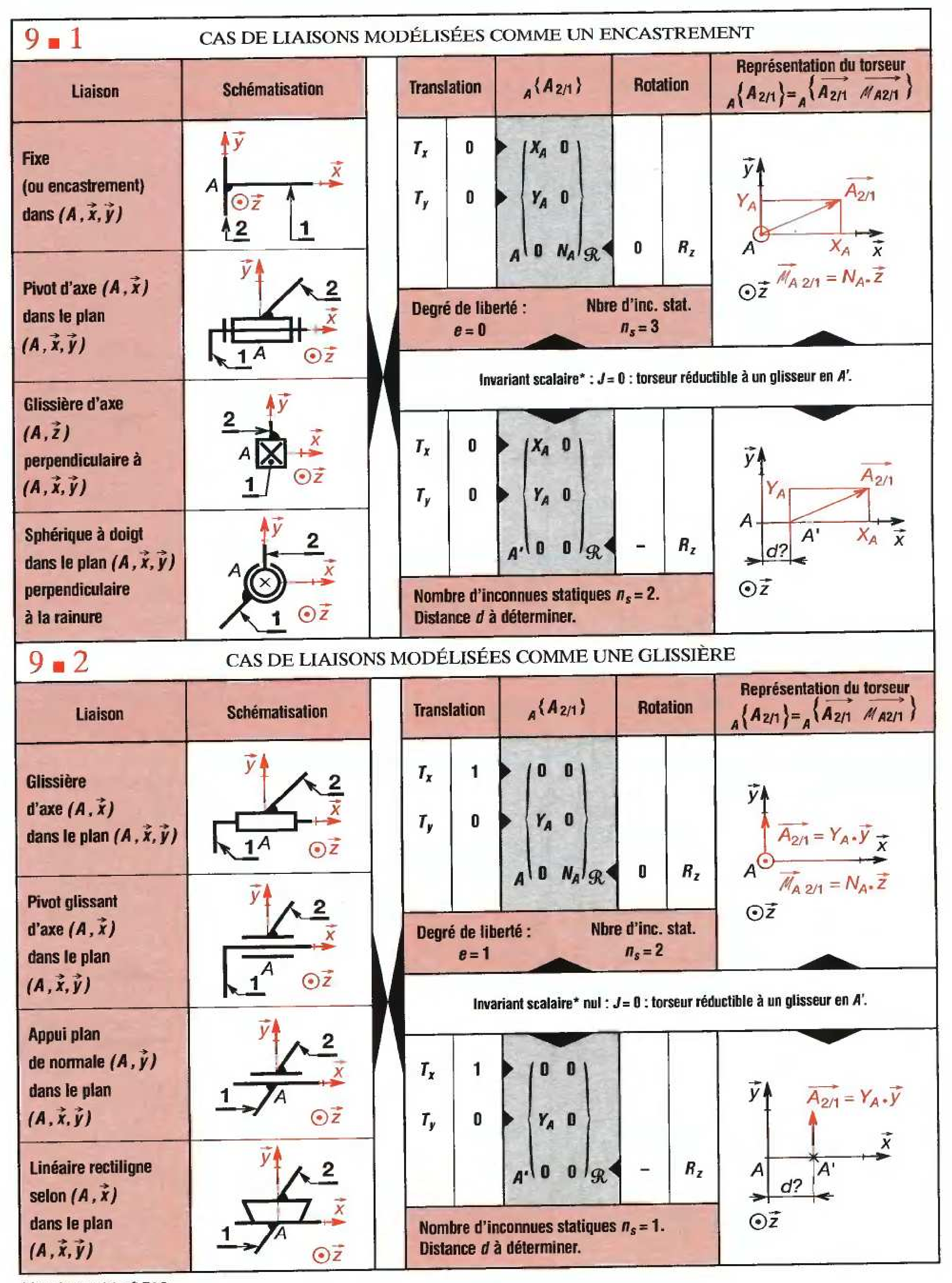
Cette démarche est commune à toutes les liaisons usuelles sauf la liaison hélicoïdale (voir ci-dessous).

EXCEPTION :

La liaison hélicoïdale possède une surface de liaison qui s'appuie sur une hélice. Quelque soit le plan (P) considéré, il est impossible d'associer à un point de contact M, un point M', symétrique de M par rapport à (P). La démonstration du chapitre 8 ne s'applique pas.



* Voir définition d'une liaison parfaite au chapitre 7.



9 ■ 1 CAS DE LIAISONS MODÉLISÉES COMME UN ENCASTREMENT

Liaison	Schématisation
Fixe (ou encastrement) dans $(A, \vec{x}, \vec{y})$	
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$ dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$	
Glissière d'axe $(A, \vec{z})$ perpendiculaire à $(A, \vec{x}, \vec{y})$	
Sphérique à doigt dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ perpendiculaire à la rainure	

Translation		$_A\{A_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur $_A\{A_{2/1}\} = {_A}\{\overrightarrow{A_{2/1}} \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\}$
T_x	0	X_A 0			$\vec{y}$, Y_A, $\overrightarrow{A_{2/1}}$, A, X_A, $\vec{x}$, $\odot\vec{z}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} = N_A \cdot \vec{z}$
T_y	0	Y_A 0			
		$_A$ 0 N_A $_{\mathcal{R}}$	0	R_z	

Degré de liberté : $e = 0$ — Nbre d'inc. stat. $n_s = 3$

Invariant scalaire* : $J = 0$: torseur réductible à un glisseur en A'.

Translation		$_A\{A_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur
T_x	0	X_A 0			$\vec{y}$, Y_A, $\overrightarrow{A_{2/1}}$, A, A', X_A, $\vec{x}$, $d?$, $\odot\vec{z}$
T_y	0	Y_A 0			
		$_{A'}$ 0 0 $_{\mathcal{R}}$	–	R_z	

Nombre d'inconnues statiques $n_s = 2$.
Distance d à déterminer.

9 ■ 2 CAS DE LIAISONS MODÉLISÉES COMME UNE GLISSIÈRE

Liaison	Schématisation
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$ dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$	
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$ dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$	
Appui plan de normale $(A, \vec{y})$ dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$	
Linéaire rectiligne selon $(A, \vec{x})$ dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$	

Translation		$_A\{A_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur $_A\{A_{2/1}\} = {_A}\{\overrightarrow{A_{2/1}} \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\}$
T_x	1	0 0			$\vec{y}$, $\overrightarrow{A_{2/1}} = Y_A \cdot \vec{y}$, $\vec{x}$, A, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} = N_A \cdot \vec{z}$, $\odot\vec{z}$
T_y	0	Y_A 0			
		$_A$ 0 N_A $_{\mathcal{R}}$	0	R_z	

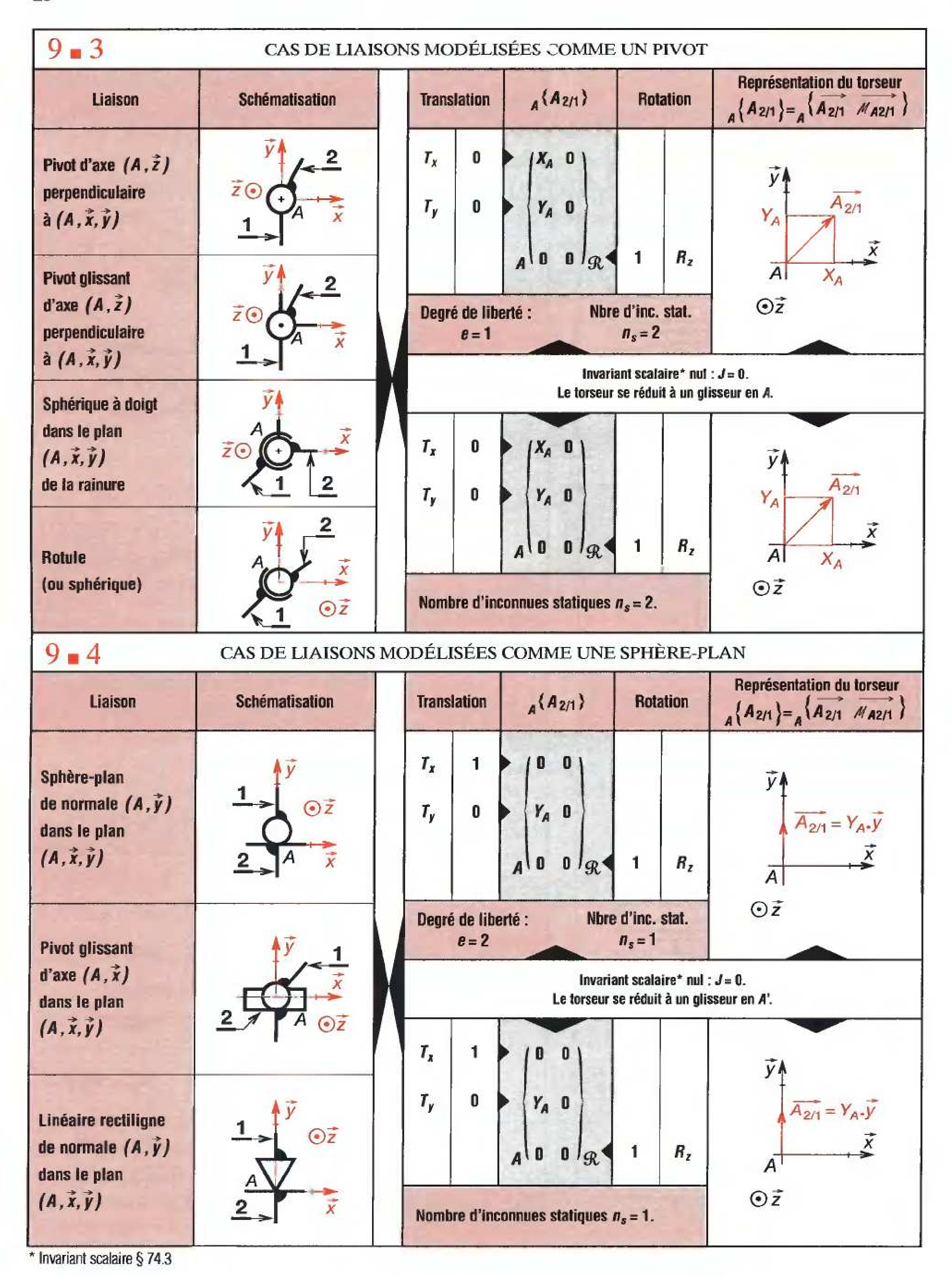
Degré de liberté : $e = 1$ — Nbre d'inc. stat. $n_s = 2$

Invariant scalaire* nul : $J = 0$: torseur réductible à un glisseur en A'.

Translation		$_A\{A_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur
T_x	1	0 0			$\vec{y}$, $\overrightarrow{A_{2/1}} = Y_A \cdot \vec{y}$, $\vec{x}$, A, A', $d?$, $\odot\vec{z}$
T_y	0	Y_A 0			
		$_{A'}$ 0 0 $_{\mathcal{R}}$	–	R_z	

Nombre d'inconnues statiques $n_s = 1$.
Distance d à déterminer.

* Invariant scalaire § 74.3



9 ▪ 3 CAS DE LIAISONS MODÉLISÉES COMME UN PIVOT

Liaison	Schématisation	Translation		$_A\{\mathcal{A}_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur $_A\{\mathcal{A}_{2/1}\}=_A\{\overrightarrow{A_{2/1}}\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\}$
Pivot d'axe $(A,\vec{z})$ perpendiculaire à $(A,\vec{x},\vec{y})$		T_x	0	$_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	1	R_z	
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{z})$ perpendiculaire à $(A,\vec{x},\vec{y})$		T_y	0				
		Degré de liberté : $e = 1$		Nbre d'inc. stat. $n_s = 2$			
		Invariant scalaire* nul : $J = 0$. Le torseur se réduit à un glisseur en A.					
Sphérique à doigt dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$ de la rainure		T_x	0	$_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	1	R_z	
Rotule (ou sphérique)		T_y	0				
		Nombre d'inconnues statiques $n_s = 2$.					

9 ▪ 4 CAS DE LIAISONS MODÉLISÉES COMME UNE SPHÈRE-PLAN

Liaison	Schématisation	Translation		$_A\{\mathcal{A}_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur $_A\{\mathcal{A}_{2/1}\}=_A\{\overrightarrow{A_{2/1}}\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\}$
Sphère-plan de normale $(A,\vec{y})$ dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$		T_x	1	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	1	R_z	$\overrightarrow{A_{2/1}} = Y_A \cdot \vec{y}$
		T_y	0				
		Degré de liberté : $e = 2$		Nbre d'inc. stat. $n_s = 1$			
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$ dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$		Invariant scalaire* nul : $J = 0$. Le torseur se réduit à un glisseur en A'.					
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{y})$ dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$		T_x	1	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	1	R_z	$\overrightarrow{A_{2/1}} = Y_A \cdot \vec{y}$
		T_y	0				
		Nombre d'inconnues statiques $n_s = 1$.					

* Invariant scalaire § 74.3

9 ▪ 5 CAS DE LIAISONS NE PERMETTANT AUCUN EFFORT

Liaison	Schématisation
Appui plan de normale $(A,\vec{z})$ perpendiculaire au plan $(A,\vec{x},\vec{y})$	1, 2, A, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\odot\vec{z}$
Linéaire rectiligne selon $(A,\vec{y})$ dans le plan $(A,\vec{x},\vec{y})$	1, 2, A, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\odot\vec{z}$
Sphère-plan de normale $(A,\vec{z})$ perpendiculaire au plan $(A,\vec{x},\vec{y})$	1, 2, A, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\odot\vec{z}$

Translation		$_A\{A_{2/1}\}$	Rotation		Représentation du torseur $_A\{A_{2/1}\}={}_A\{\overrightarrow{A_{2/1}}\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\}$
T_x	1	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$			$\vec{y}$, $\odot\vec{z}$, A, $\vec{x}$
T_y	1				
			1	R_z	

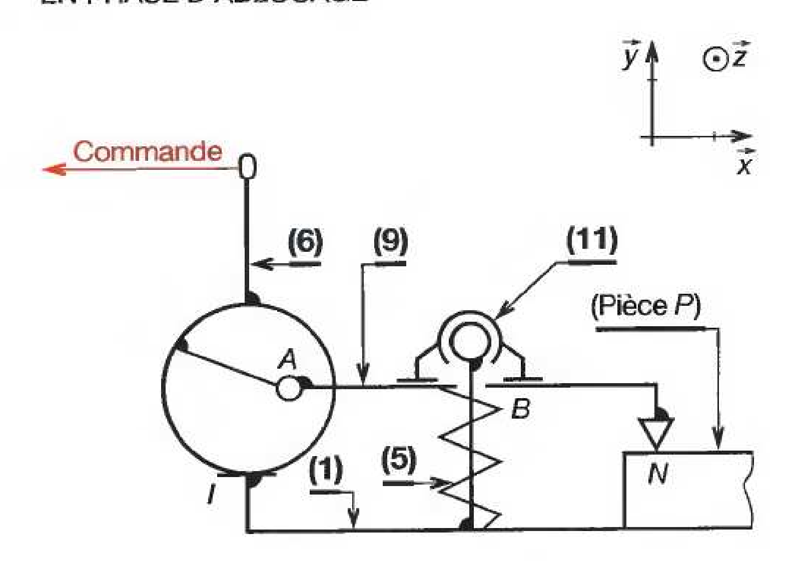
Degré de liberté : $e = 3$ — Nbre d'inc. stat. $n_s = 0$

La liaison ne peut transmettre aucun effort selon ce plan ; on peut donc considérer qu'elle n'existe pas (solides 1 et 2 indépendants).

9 ▪ 6 Exemple

Considérons le montage de fraisage en phase de serrage, réglé pour une série de pièces.

MONTAGE DE FRAISAGE (§ 5.31)
EN PHASE D'ABLOCAGE



HYPOTHÈSES :

Pas de frottement de **9** avec les autres pièces.
Effort du ressort **5** négligé.

■ Liaison **6-9** en A : pivot en A (§ 9.3)

$$_A\{A_{6/9}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$ se réduit au glisseur $\overrightarrow{A_{6/9}}$

■ Liaison **11-9** en B : appui-plan (§ 9.2)

$$_B\{B_{11/9}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & L_A \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$ réductible à un glisseur $\overrightarrow{B_{11/9}}$

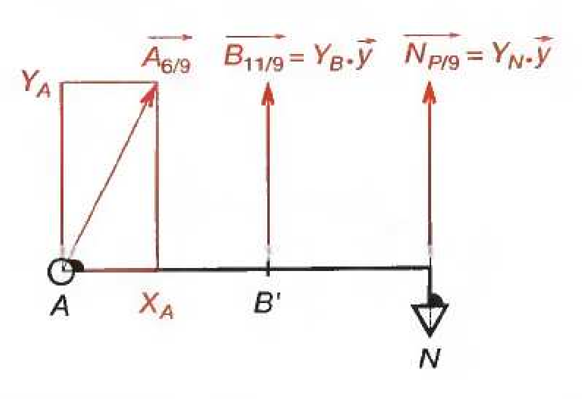
Ce glisseur passe par un point B' à déduire ultérieurement par l'isolement de **11**.

$$_{B'}\{B_{11/9}\} = {}_{B'}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

■ Liaison **9-P** en N : linéaire rectiligne (§ 9.4)

$$_N\{N_{P/9}\} = {}_N\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$ se réduit au glisseur $\overrightarrow{N_{P/9}}$

MODÉLISATION DES A.M. SUR **(9)**



10 Cinématique des liaisons parfaites dans l'espace

En cinématique, une liaison est parfaite si **les surfaces de liaison sont géométriquement parfaites, indéformables et les ajustements sans jeu.**

- Les composantes de la **vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{1/2}}$ résultante du torseur cinématique**, sont nulles sur les axes $(A, \vec{x})$ et $(A, \vec{y})$ autour desquels la rotation de **1** par rapport à **2** est impossible (fig. 2).
- Les composantes de la **vitesse linéaire $\overrightarrow{V_{A\in 1/2}}$ moment du torseur cinématique**, sont nulles sur l'axe $(A, \vec{z})$ selon lequel la translation de **1/2** est impossible (fig. 2).

DÉMARCHE :

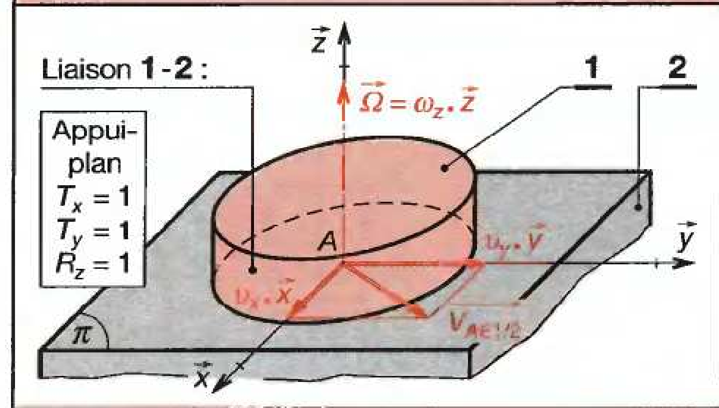
On identifie les composantes nulles du torseur cinématique $_A\{\vartheta_{1/2}\}$ dans le repère local $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en respectant les deux étapes suivantes :

- Les composantes nulles de $\overrightarrow{\Omega_{1/2}}$ se déduisent des impossibilités de rotation de **1/2** selon les trois axes.
- Les composantes nulles de $\overrightarrow{V_{A\in 1/2}}$ se déduisent des impossibilités de translation de **1/2** selon les trois axes.

① Choisir le repère local $\mathcal{R}$ $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

- A : centre géométrique de la liaison *.
- $(A, \vec{x})$, $(A, \vec{y})$ dans le plan π.
- $(A, \vec{z})$ normal au plan π.

② Identifier la liaison



③ Identifier les composantes nulles

Rotation selon :	$(A, \vec{x})$ impossible :	$R_x = 0$	$\Rightarrow$	$\omega_x = 0$
	$(A, \vec{y})$ impossible :	$R_y = 0$	$\Rightarrow$	$\omega_y = 0$
	$(A, \vec{z})$ possible :	$R_z = 1$	$\Rightarrow$	$\omega_z \neq 0$
Translation selon :	$(A, \vec{x})$ possible :	$T_x = 1$	$\Rightarrow$	$v_x \neq 0$
	$(A, \vec{y})$ possible :	$T_y = 1$	$\Rightarrow$	$v_y \neq 0$
	$(A, \vec{z})$ impossible :	$T_z = 0$	$\Rightarrow$	$v_z = 0$

④ Écrire le torseur cinématique

$$_A\{\vartheta_{1/2}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{\Omega_{1/2}} \quad \overrightarrow{V_{A\in 1/2}}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ Y_A & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Cette démarche est commune à toutes les liaisons ci-dessous.

Liaison	Schématisation	Rotation		$_A\{\vartheta_{1/2}\}$	Translation		Représentation de $_A\{\vartheta_{1/2}\}$
Encastrement ou fixe $\mathcal{R}$ **$(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quelconque ****	$\vec{z}$, 2, 1, $\vec{x}$, A, $\vec{y}$	R_x	0	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	0	T_x	$\vec{z}$, $\vec{\Omega} = \vec{0}$, $\vec{V} = \vec{0}$, A, $\vec{x}$, 2, 1, $\vec{y}$
		R_y	0		0	T_y	
		R_z	0		0	T_z	
				$n_c = 0$ ***			
Pivot De centre : A D'axe : $(A, \vec{z})$	$\vec{y}$, 1, 2, $\vec{z}$, A, $\vec{x}$	R_x	0	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	0	T_x	$\vec{y}$, $\overrightarrow{\Omega_{1/2}}$, 1, 2, A, $\vec{z}$, $\vec{x}$
		R_y	0		0	T_y	
		R_z	1		0	T_z	
				$n_c = 1$			
Glissière De centre : A D'axe : $(A, \vec{x})$	$\vec{z}$, 1, 2, A, $\vec{x}$, $\vec{y}$	R_x	0	$_A\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$	1	T_x	$\vec{z}$, $\overrightarrow{V_{A2/1}}$, 1, 2, A, $\vec{x}$, $\vec{y}$
		R_y	0		0	T_y	
		R_z	0		0	T_z	
				$n_c = 1$			

* Cas le plus général. ** A est souvent situé dans le plan d'encastrement. *** n_c : nombre d'inconnues cinématiques.

Liaison	Schématisation	Rotation	$_A\{\vartheta_{1/2}\}$	Translation	Représentation de $_A\{\vartheta_{2/1}\}$
Hélicoïdale **Centre *A*** **Axe $(A, \vec{x})$**	$T_x = k \cdot R_x$	R_x 1 R_y 0 R_z 0	$_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $\omega_x = \lambda . v_x$** $n_c = 1$*	1 T_x 0 T_y 0 T_z	
Pivot glissant **Centre *A*** **Axe $(A, \vec{x})$**		R_x 1 R_y 0 R_z 0	$_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 2$	1 T_x 0 T_y 0 T_z	
Sphérique à doigt **Centre *A*** **Axe doigt $(A, \vec{z})$** **Rainure dans** **$(A, \vec{x}, \vec{z})$**		R_x 0 R_y 1 R_z 1	$_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 2$	0 T_x 0 T_y 0 T_z	
Appui-plan **Centre *A*** **Normale $(A, \vec{z})$**		R_x 0 R_y 0 R_z 1	$_A\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 3$	1 T_x 1 T_y 0 T_z	
Rotule ou **sphérique** **Centre *A***		R_x 1 R_y 1 R_z 1	$_A\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 3$	0 T_x 0 T_y 0 T_z	
Linéaire rectiligne **Centre *A*** **Normale $(A, \vec{z})$** **Arête $(A, \vec{x})$**		R_x 1 R_y 0 R_z 1	$_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 4$	1 T_x 1 T_y 0 T_z	
Sphère-cylindre **(Linéaire annulaire)** **Centre *A*** **Axe $(A, \vec{x})$**		R_x 1 R_y 1 R_z 1	$_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 4$	1 T_x 0 T_y 0 T_z	
Sphère-plan **(Ponctuelle)** **Normale $(A, \vec{z})$**		R_x 1 R_y 1 R_z 1	$_A\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$ $n_c = 5$	1 T_x 1 T_y 0 T_z	

* n_c = nombre d'inconnues cinématiques. ** $\lambda = \varepsilon . \frac{2\pi}{p}$ avec $\varepsilon = +1$ (filet à droite), $\varepsilon = -1$ (filet à gauche) ; p = pas géométrique.

11 Cinématique des liaisons parfaites dans le plan

Lorsqu'une liaison a une géométrie présentant un plan de symétrie, les torseurs cinématiques (chapitre 10) se simplifient.

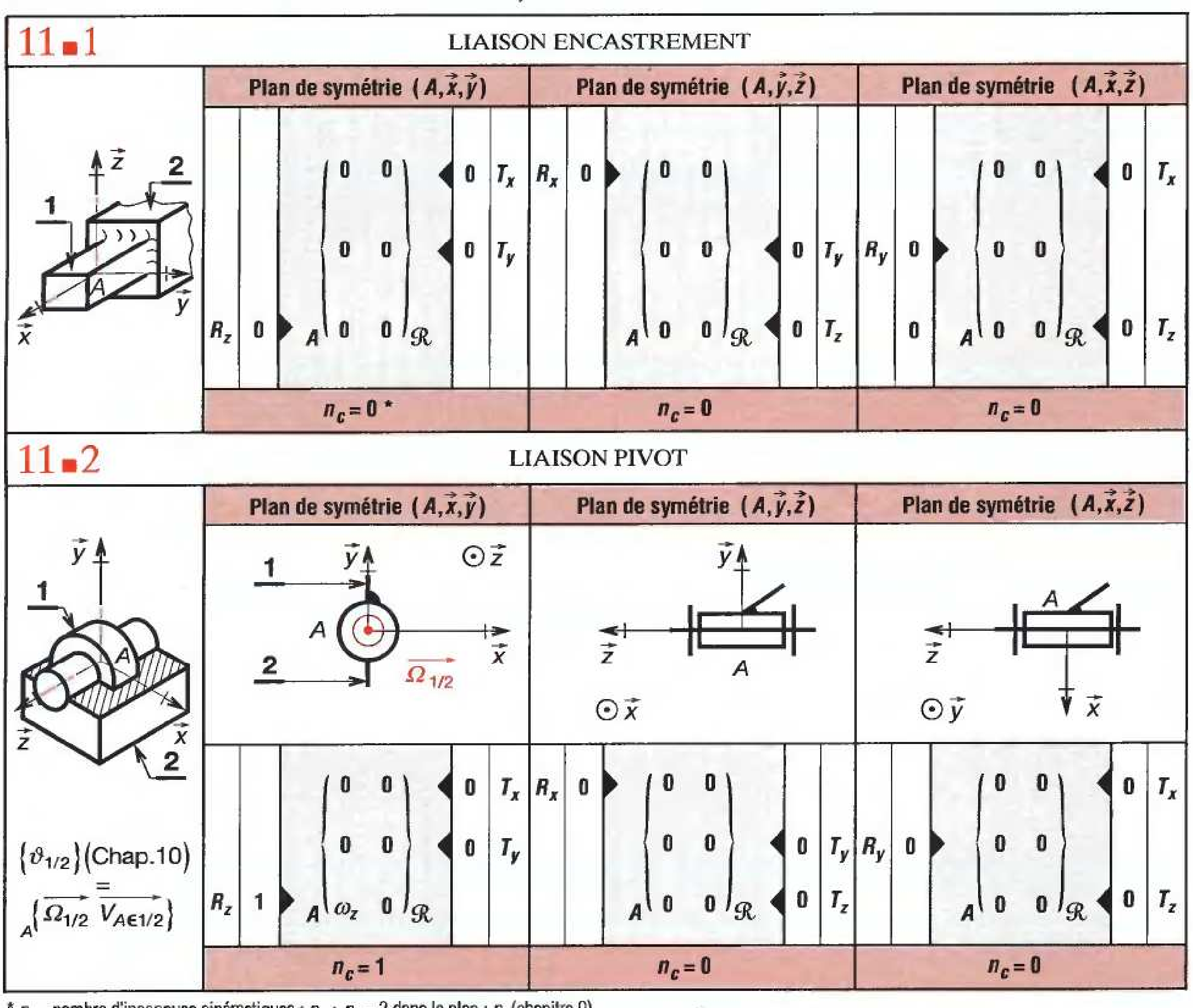
REMARQUES :

- La liaison encastrement a des torseurs cinématiques nuls dans tous les plans.
- La liaison hélicoïdale n'admet pas de plan de symétrie.
- Les possibilités de mouvement doivent conserver le caractère de la liaison ; par exemple, pour la liaison appui-plan (§ 11.7), on ne peut pas considérer de vitesse $\vec{V_z}$ ou de rotations ω_x et ω_y.

DÉMARCHE :

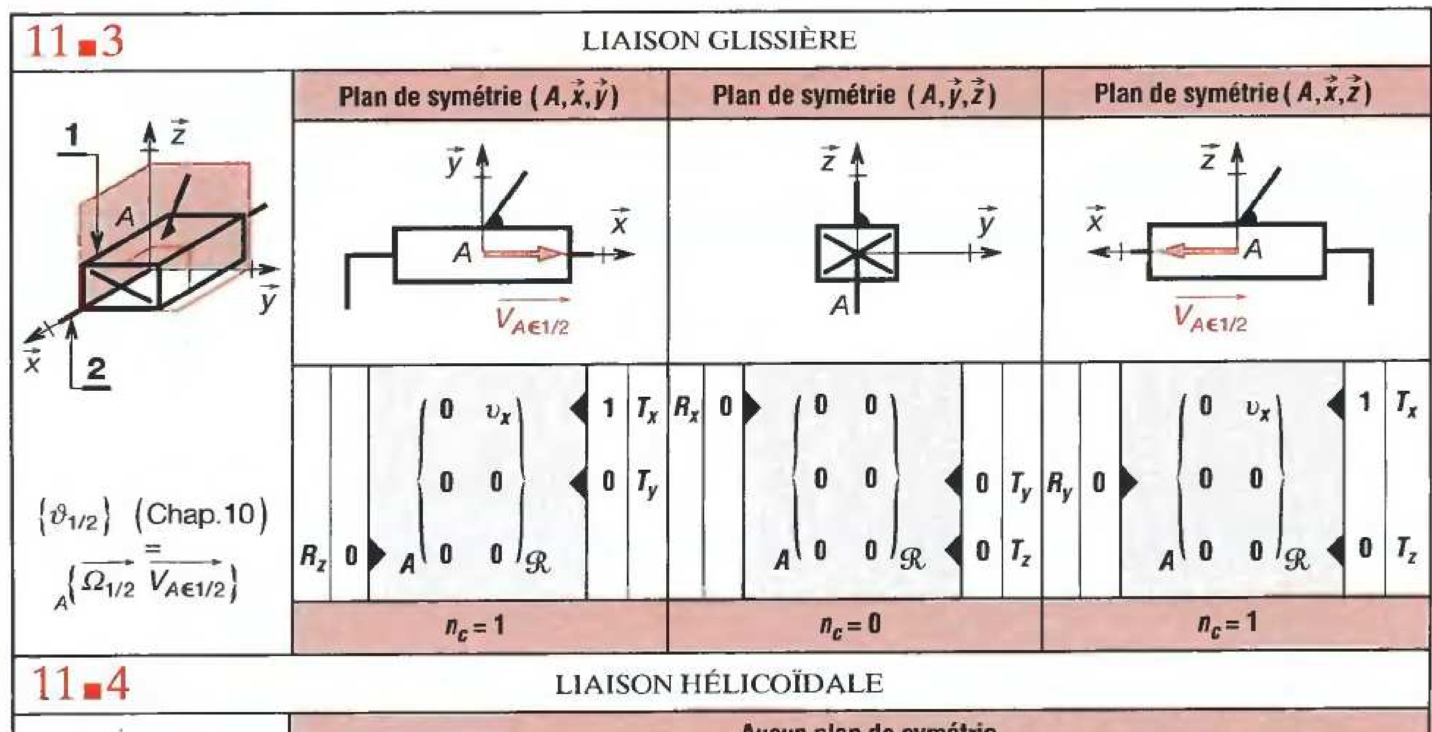
Après avoir déterminé le plan de symétrie :

- Examiner la possibilité de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan. Si cette rotation est possible, placer la projection ω correspondante du taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/2}}$; sinon cette projection vaut 0.
- Examiner les possibilités de translation le long des deux axes du plan. Dans l'affirmative, écrire les projections de $\overrightarrow{V_{A\in 1/2}}$; sinon, placer les valeurs nulles.
- Les autres projections sont nulles sur $(\mathcal{R}) = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



* n_c = nombre d'inconnues cinématiques ; $n_c + n_s = 3$ dans le plan ; n_s (chapitre 9).

11.3 LIAISON GLISSIÈRE



11.4 LIAISON HÉLICOÏDALE

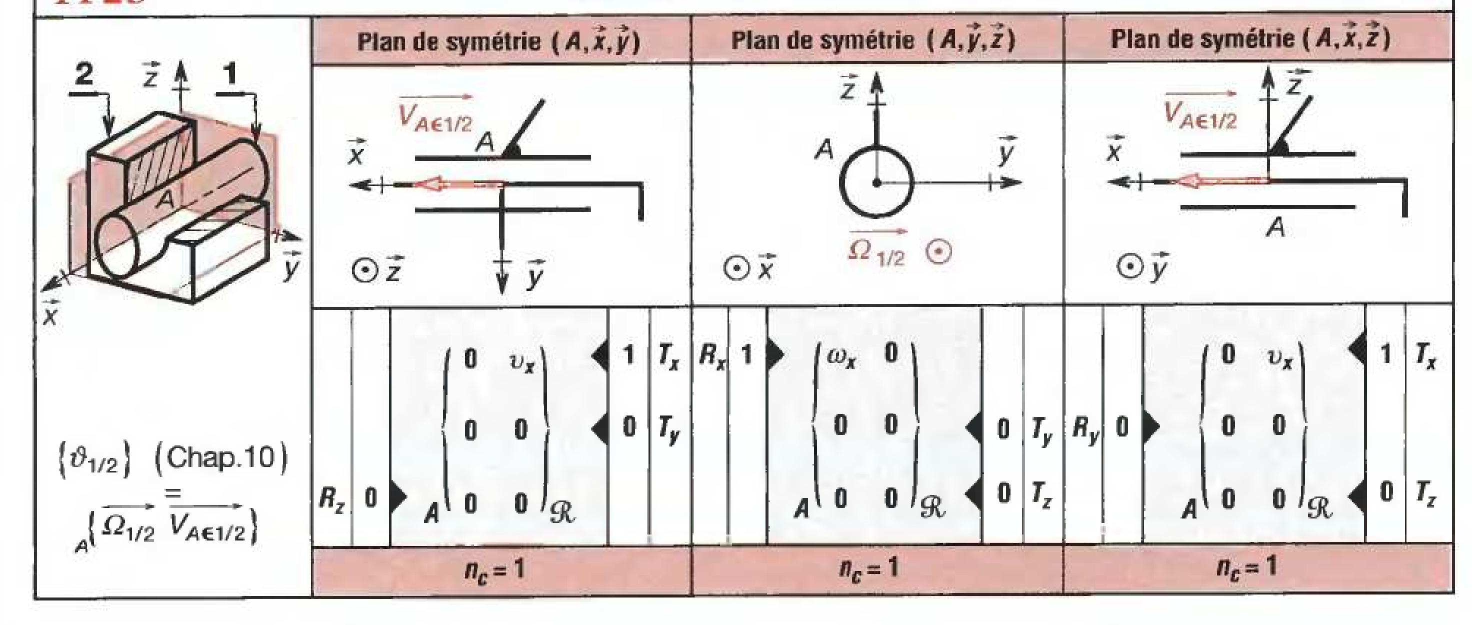
Aucun plan de symétrie

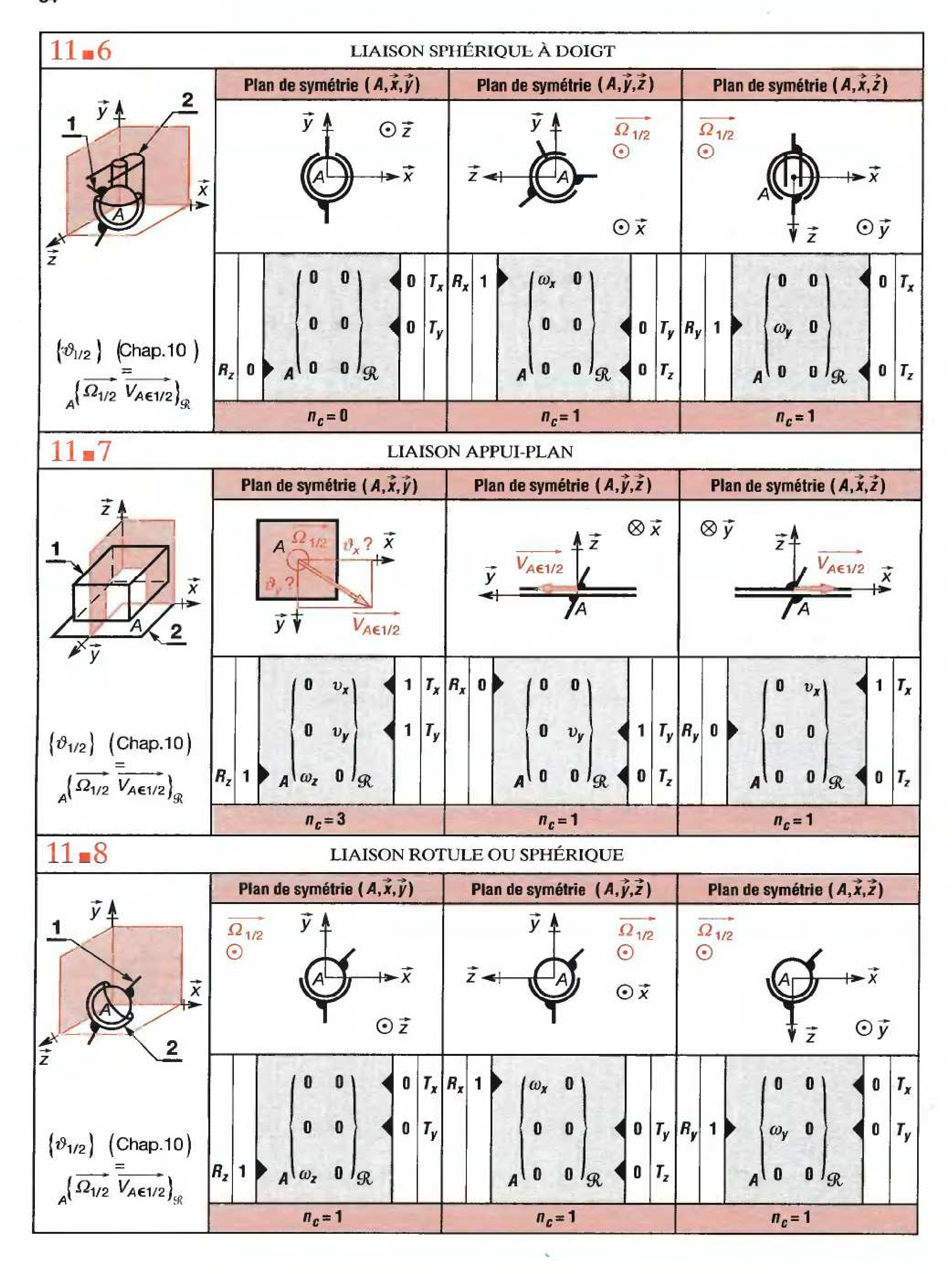
$\{\vartheta_{1/2}\}$ (Chap.10) $= {}_A\{\overrightarrow{\Omega_{1/2}}\ \overrightarrow{V_{A \in 1/2}}\}$

Dans tous les plans de symétrie éventuelle d'un mécanisme, la liaison hélicoïdale se comporte comme un encastrement.

(Voir encastrement § 11.1 et liaison hélicoïdale chapitre 10.)

11.5 LIAISON PIVOT GLISSANT





11■6 LIAISON SPHÉRIQUE À DOIGT

$\{\vartheta_{1/2}\}$ (Chap.10) $= {}_A\left\{\overrightarrow{\Omega_{1/2}} \;\; \overrightarrow{V_{A\in 1/2}}\right\}_{\mathcal{R}}$

Plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{y})$	Plan de symétrie $(A,\vec{y},\vec{z})$	Plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{z})$
R_z 0 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 0 T_x, 0 T_y	R_x 1 ; ${}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 0 T_y, 0 T_z	R_y 1 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 0 T_x, 0 T_z
$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 1$

11■7 LIAISON APPUI-PLAN

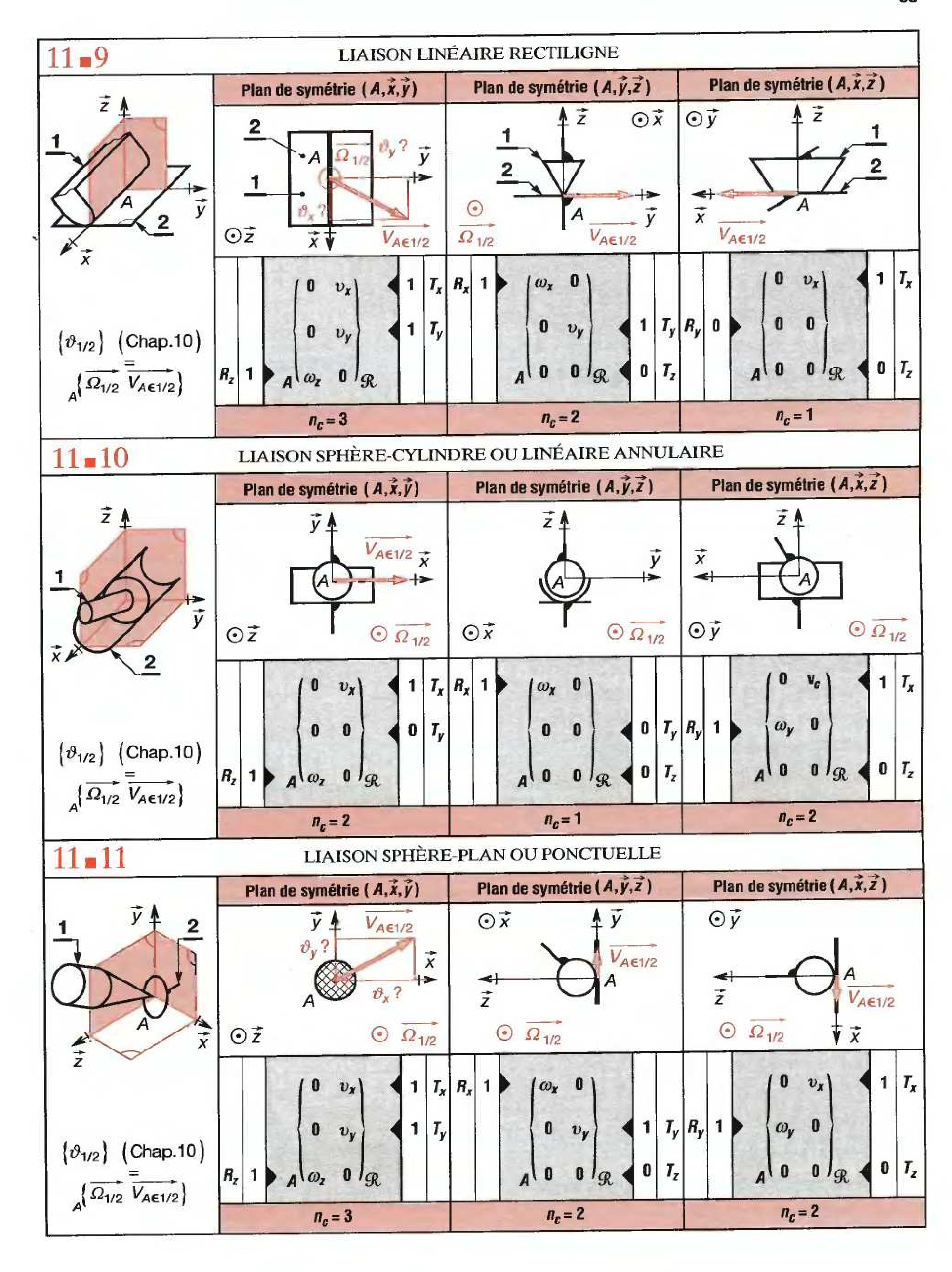
$\{\vartheta_{1/2}\}$ (Chap.10) $= {}_A\left\{\overrightarrow{\Omega_{1/2}} \;\; \overrightarrow{V_{A\in 1/2}}\right\}_{\mathcal{R}}$

Plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{y})$	Plan de symétrie $(A,\vec{y},\vec{z})$	Plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{z})$
R_z 1 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 1 T_x, 1 T_y	R_x 0 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 1 T_y, 0 T_z	R_y 0 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 1 T_x, 0 T_z
$n_c = 3$	$n_c = 1$	$n_c = 1$

11■8 LIAISON ROTULE OU SPHÉRIQUE

$\{\vartheta_{1/2}\}$ (Chap.10) $= {}_A\left\{\overrightarrow{\Omega_{1/2}} \;\; \overrightarrow{V_{A\in 1/2}}\right\}_{\mathcal{R}}$

Plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{y})$	Plan de symétrie $(A,\vec{y},\vec{z})$	Plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{z})$
R_z 1 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 0 T_x, 0 T_y	R_x 1 ; ${}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 0 T_y, 0 T_z	R_y 1 ; ${}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$; 0 T_x, 0 T_y
$n_c = 1$	$n_c = 1$	$n_c = 1$


11■9
LIAISON LINÉAIRE RECTILIGNE
Plan de symétrie (A, x, y)
Plan de symétrie (A, y, z)
Plan de symétrie (A, x, z)
{ϑ1/2} (Chap.10)
=
A{Ω1/2 VA∈1/2}
$n_c = 3$
$n_c = 2$
$n_c = 1$
11■10
LIAISON SPHÈRE-CYLINDRE OU LINÉAIRE ANNULAIRE
Plan de symétrie (A, x, y)
Plan de symétrie (A, y, z)
Plan de symétrie (A, x, z)
{ϑ1/2} (Chap.10)
=
A{Ω1/2 VA∈1/2}
$n_c = 2$
$n_c = 1$
$n_c = 2$
11■11
LIAISON SPHÈRE-PLAN OU PONCTUELLE
Plan de symétrie (A, x, y)
Plan de symétrie (A, y, z)
Plan de symétrie (A, x, z)
{ϑ1/2} (Chap.10)
=
A{Ω1/2 VA∈1/2}
$n_c = 3$
$n_c = 2$
$n_c = 2$

12 Actions des liaisons réelles

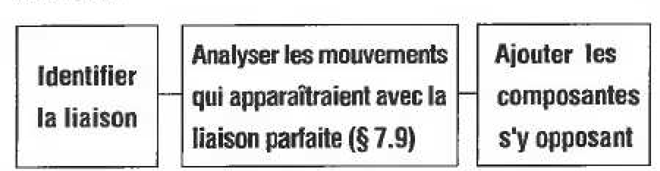
Une liaison réelle entre **1** et **2** est caractérisée par :

- des surfaces dont la géométrie entre dans une certaine tolérance (G.D. 17),
- des surfaces déformables en fonction de l'effort transmis (voir chapitres 45 à 55 et chapitre 35),
- des contacts avec frottements (chapitre 32),
- des jeux fonctionnels permettant l'assemblage et le fonctionnement de l'ensemble.

HYPOTHÈSES :

- La géométrie tolérancée de la liaison permet la même fonction de service que la liaison parfaite, au frottement prêt (parfois recherché).
- La pression de contact en un point ne dépasse pas une limite admissible pour le matériau, appelé pression de Hertz.
- Chacune des liaisons étudiées dans ce chapitre résulte d'une analyse globale de mécanisme ; elle peut être réalisée à partir de liaisons élémentaires (par exemple : une liaison pivot peut être construite à l'aide de deux roulements dont l'un, arrêté axialement, se comporte en rotule et l'autre libre axialement, se comporte en liaison sphère-cylindre).
- La liaison est effective (par exemple : un appui ponctuel est bilatéral sous peine de disparition de la liaison).

DÉMARCHE :



12.1 Liaison encastrement

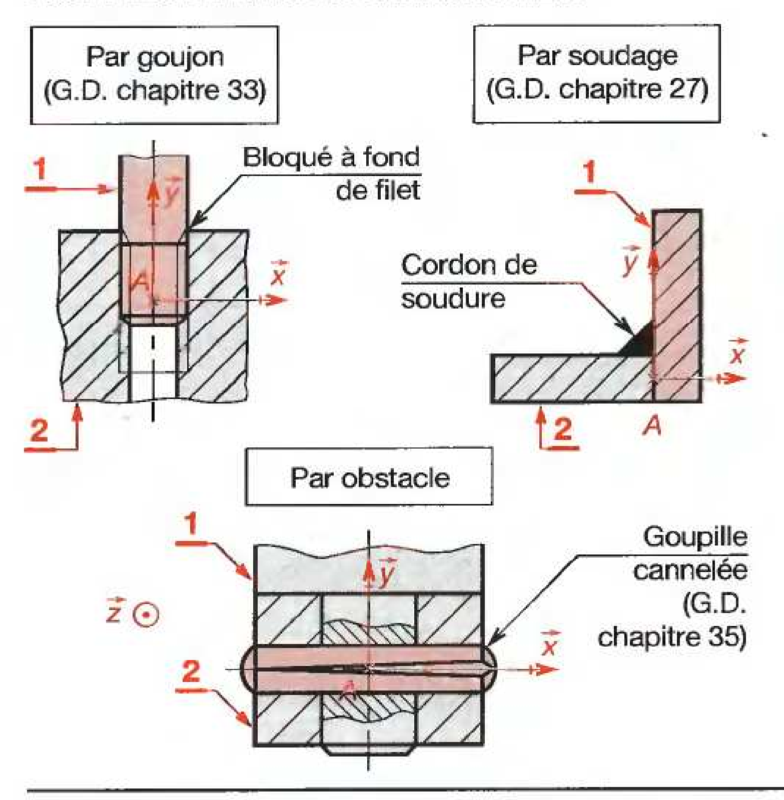
Cette liaison ne possède aucun degré de liberté et par conséquent a :

- six degrés de liaison dans l'espace (chapitre 7),
- trois degrés de liaison dans le plan (§ 9.1).

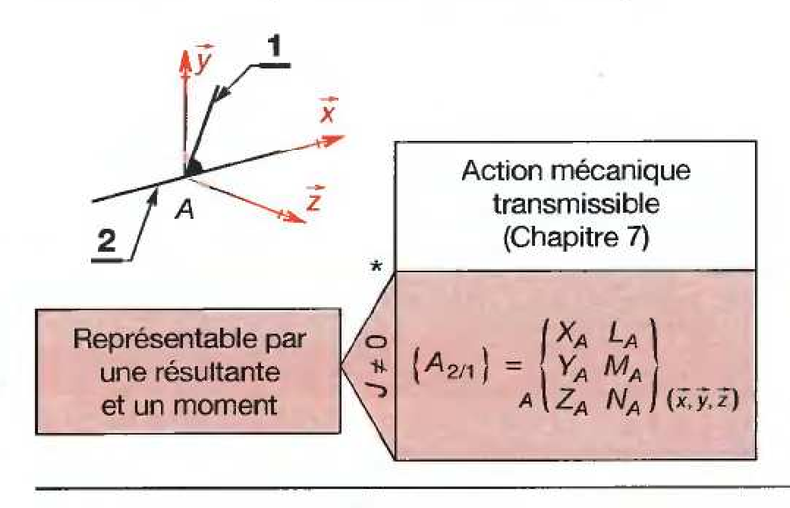
En un point A' particulier d'un plan de symétrie, le torseur se réduit à une résultante $\overrightarrow{A_{2/1}}$ (§ 9.1).

* J invariant scalaire (chapitre 74)

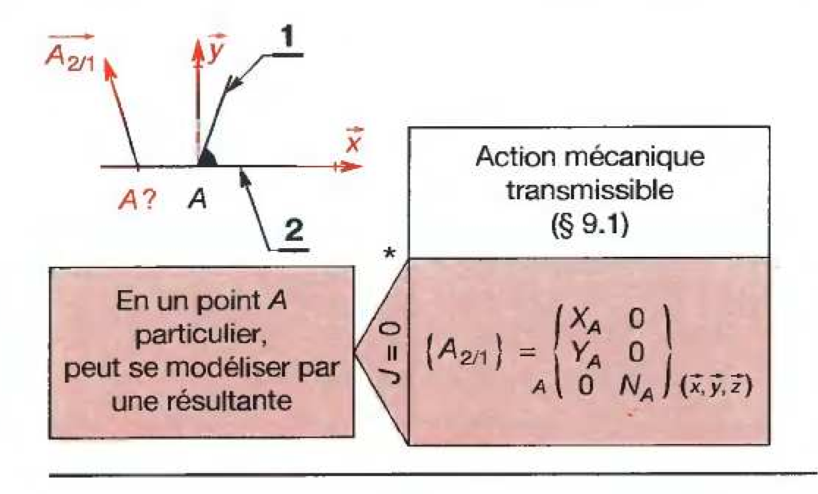
EXEMPLES DE LIAISONS ENCASTREMENT



ENCASTREMENT (MODÉLISATION SPATIALE)



ENCASTREMENT (MODÉLISATION PLANE)



12■2 Liaison pivot réelle

Un frottement non négligeable affecte le seul mouvement relatif possible : la rotation autour de $(A, \vec{z})$.

Le torseur des efforts transmissibles s'écrit :

$$_A\{A_{2/1}\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A \text{ avec } N_A \neq 0$$

12■21 Frottement radial seul*

$$|N_A| = |N_{A1}| \approx \mu_1 \cdot \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \cdot r$$

N_A (N.mm) ; $\mu_1 = \tan \varphi$ (facteur de frottement) ; r (mm)
X_A et Y_A en newtons (N).

REMARQUE :

Dans le cas d'une symétrie par rapport à $(A, \vec{x}, \vec{y})$, le torseur se réduit à une résultante $\overrightarrow{A_{2/1}}$ passant par le point de contact théorique A' et tangente au cercle de rayon $r \sin \varphi$ (voir § 33.2).

12■22 Frottement axial seul*

Avec une hypothèse de pression de contact uniforme :

$$|N_A| \approx |N_{A2}| = \frac{2}{3} \cdot \mu_2 \cdot |Z_A| \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \approx \mu_2 \cdot |Z_A| \cdot \frac{R + r}{2}$$

N_A (N.mm) ; $\mu_2 = \tan \varphi_2$ (facteur de frottement) ; Z_A (N) ; R et r en millimètres (mm).

- Pression de contact sur l'épaulement :

$$p = \frac{|Z_A|}{\pi(R^2 - r^2)} \approx \frac{|Z_A|}{2\pi r(R - r)}$$

12■23 Frottement axial et radial

$$N_A = N_{A1} + N_{A2} \text{ (algébriquement)}$$

REMARQUES :

- Cas d'une surface conique (embrayages, limiteurs).

Avec une hypothèse de pression de contact uniforme :

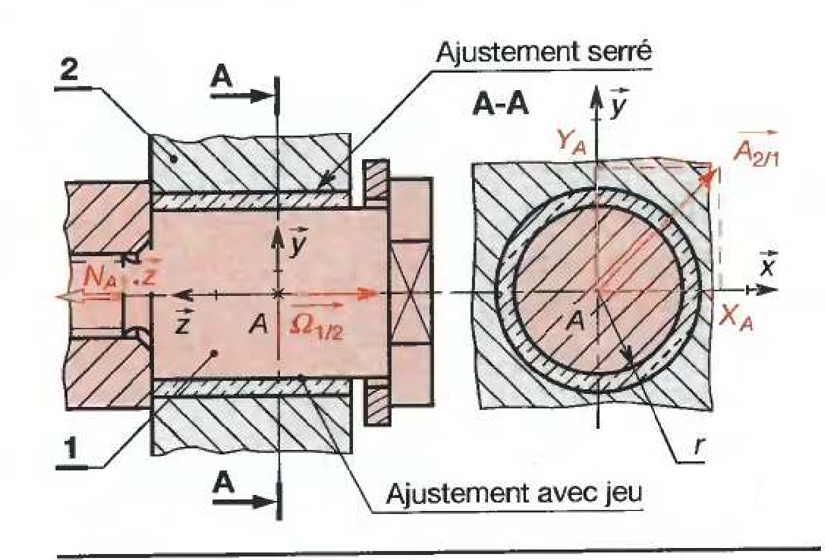
$$|N_A| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\sin \theta} \cdot |Z_A| \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \approx \mu \cdot \frac{|Z_A|}{\sin \theta} \cdot \frac{R + r}{2}$$

N_A (N.mm) ; μ : facteur de frottement ; Z_A (N) ; R, r (mm)
θ : demi-angle au sommet du cône.

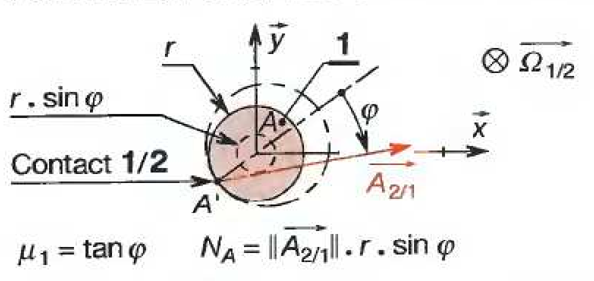
- Pour $\theta = 90°$, on retrouve l'expression du couple de frottement sur un épaulement (§ 12.22).
- Les valeurs approchées concernent les couronnes de faible largeur ou les cônes de faible longueur.

* Voir chapitre 33.

COUPLE DE FROTTEMENT RADIAL

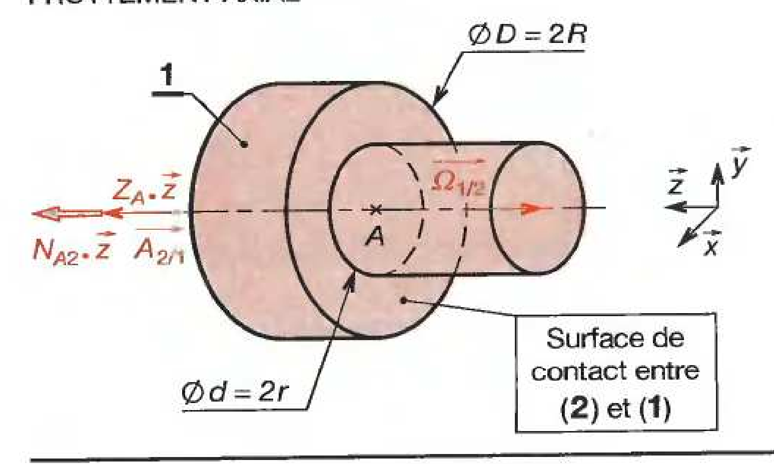


FROTTEMENT RADIAL ET SYMÉTRIE SELON $(A, \vec{x}, \vec{y})$

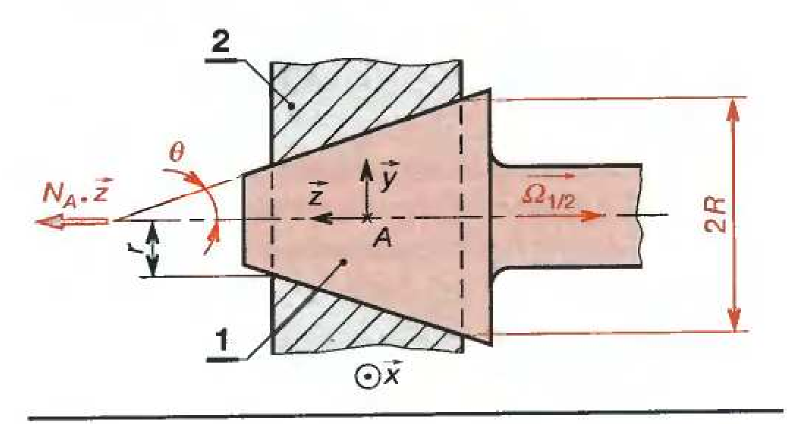


$\mu_1 = \tan \varphi \qquad N_A = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot r \cdot \sin \varphi$

FROTTEMENT AXIAL



FROTTEMENT SUR CÔNE D'APPUI



12.3 Liaison glissière réelle

Selon les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées une glissière peut occuper quatre positions dans le plan de ces forces :

- contacts en A_1 et B_1 ;
- contacts en A_2 et B_2 ;
- contacts selon une ligne $A_2 B_1$;
- contacts selon une ligne $A_1 B_2$;

MÉTHODE :

1° Négliger tous frottements et déterminer le sens des actions mécaniques à l'aide d'équations de moments judicieuses.

2° En déduire les points de contacts de la liaison et faire intervenir alors le frottement (chap. 32).

EXEMPLE :

Le poussoir **2** ci-contre reçoit une action motrice $\overrightarrow{I_{1/2}}$. Il agit en J sur un galet mobile sans frottement autour de son axe, lié à un poussoir **4**. Ce dernier reçoit un effort récepteur $\overrightarrow{K_{5/4}}$ de norme inconnue. Le facteur de frottement entre les poussoirs **2**, **4** et le bâti **0** valant μ, déterminer les actions mécaniques exercées par **0** sur **2** et **4**.

SOLUTION :

- Isoler **2** et **4** et placer les actions mécaniques sans frottement selon les valeurs positives des axes :

$$x_A, x_B \text{ sur } \mathbf{2} \text{ et } y_C, y_D \text{ sur } \mathbf{4}.$$

- $\Sigma \overline{\mathcal{M}_\alpha}\,(F_{ext/2}) = 0 \Rightarrow X_A > 0 \Rightarrow$ contact en A_1.

  $\Sigma \overline{\mathcal{M}_\beta}\,(F_{ext/2}) = 0 \Rightarrow X_B > 0 \Rightarrow$ contact en B_1.

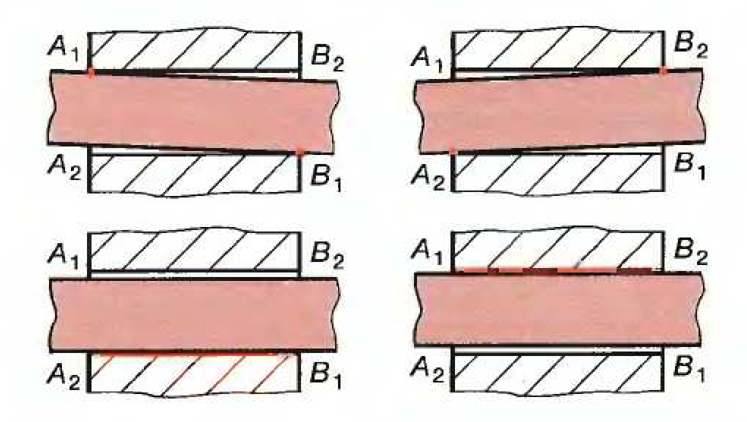
  $\Sigma \overline{\mathcal{M}_\gamma}\,(F_{ext/4}) = 0 \Rightarrow Y_D < 0 \Rightarrow$ contact en D_2.

  $\Sigma \overline{\mathcal{M}_\delta}\,(F_{ext/4}) = 0 \Rightarrow Y_C > 0 \Rightarrow$ contact en C_1.

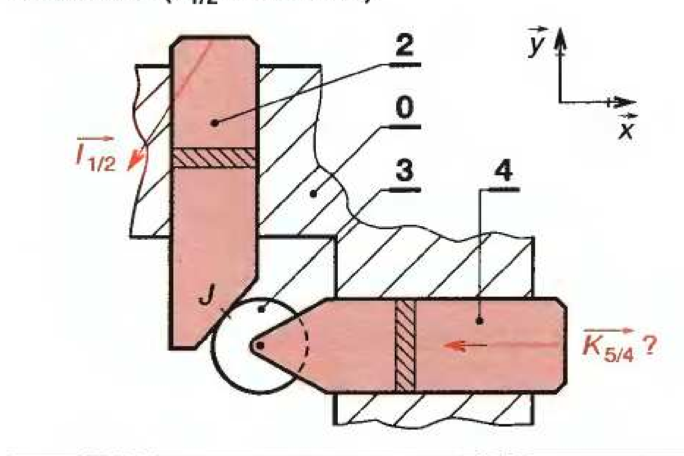
- Compte tenu de la tendance au déplacement provoquée par $\overrightarrow{I_{1/2}}$ (équilibre strict chap. 32), placer les normales aux contacts déterminés et ajouter les composantes tangentielles correspondantes.

- La détermination exacte se poursuit à partir des actions mécaniques correctes $\overrightarrow{A_{0/2}}$, $\overrightarrow{B_{0/2}}$, $\overrightarrow{C_{0/4}}$ et $\overrightarrow{D_{0/4}}$.

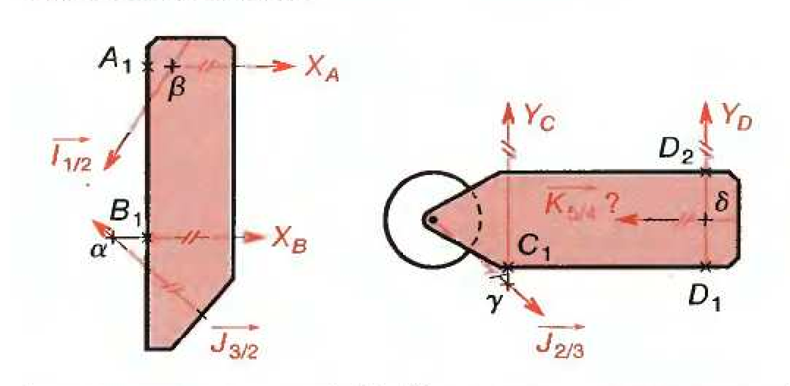
POSITIONS POSSIBLES D'UNE GLISSIÈRE



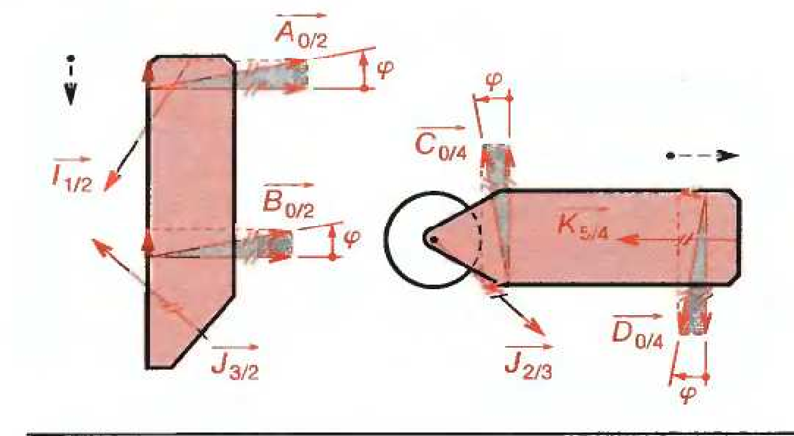
MONTAGE ($\overrightarrow{I_{1/2}}$ « motrice »)



SANS FROTTEMENTS



AVEC FROTTEMENTS



12 ■ 4 Liaison hélicoïdale réelle

En présence de frottements, le coefficient de proportionnalité k, tel que $L_A = k \cdot x_A$ (chapitre 7), prend une forme différente selon le sens de la charge axiale et le type de surface de liaison.

1° Cas où la vis est soumise à un effort axial et un moment de même sens

La vis progresse dans le sens de la charge axiale.

$$L_A = -X_A \cdot r \cdot \tan(\alpha - \varphi')$$

r : rayon moyen de la liaison hélicoïdale.

α : pente telle que $\tan \alpha = \dfrac{p}{2\pi r}$ où p est le pas.

φ' : angle de frottement fictif tel que $\tan \varphi' = \dfrac{\tan \varphi}{\cos \gamma}$.

où | $\tan \varphi = \mu$: facteur de frottement.
| γ : demi-angle au sommet du filet.

- Rendement $\rho = \dfrac{\tan \alpha}{\tan(\varphi' - \alpha)}$ si $\alpha < \varphi'$.
- Mouvement possible pour $\alpha < 90° - \varphi'$.
- Système irréversible si $\alpha < \varphi'$.

2° Cas où la vis est soumise à un effort axial et un moment de sens contraires

La vis progresse à l'encontre de la charge axiale.

$$L_A = -X_A \cdot r \cdot \tan(\alpha + \varphi')$$

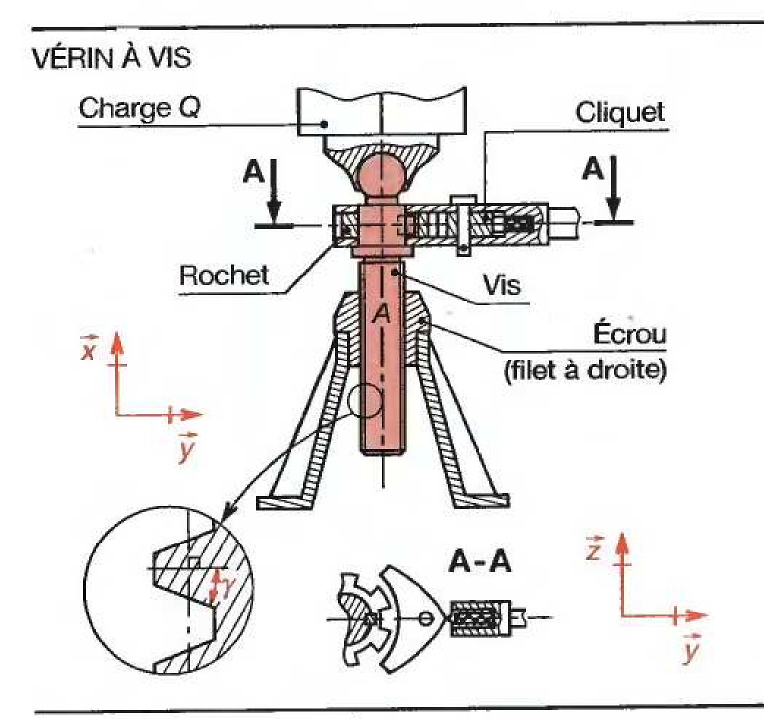
(Notations ci-dessus.)

- Rendement $\rho = \dfrac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi')}$.
- Mouvement possible pour $\alpha < 90° - \varphi'$.
- Système irréversible pour $\alpha < \varphi'$.

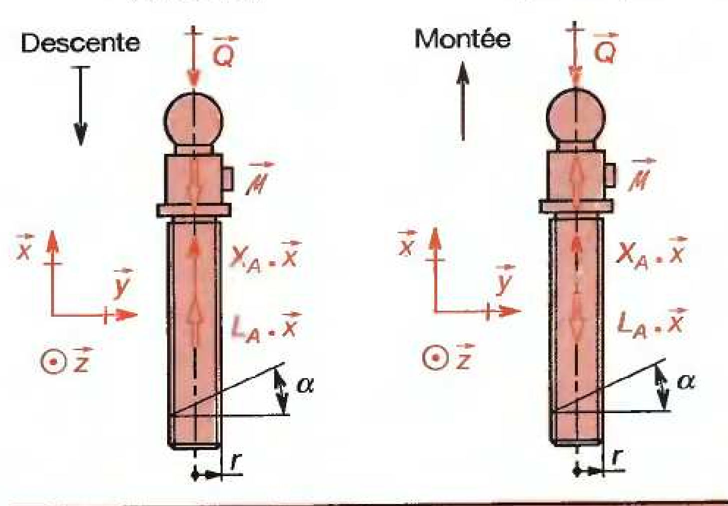
VALEURS DE γ ET φ' CONNAISSANT $\mu = \tan \varphi$

Système vis-écrou	γ	$\tan \varphi'$	Valeur approchée
À billes	≈ 0°	μ	$\tan \varphi' \approx \mu$
Profil I.S.O.	30°	1,155 μ	
Profil trapézoïdal	15°	1,035 μ	
Profil rond	15°	1,035 μ	
Profil dissymétrique	10°	1,015 μ	
Profil gaz	27°30'	1,127 μ	

VÉRIN À VIS



PROGRESSION DE LA VIS



Exemple

Système vis-écrou M30 (pas $p = 3,5$).
Frottement de facteur $\mu = 0,1$ (= $\tan \varphi$).
Charge $Q = 1\,000$N.

Calculer le couple nécessaire pour :

- **Faire monter la charge ;**
- **Faire descendre la charge.**

On calcule $\tan \alpha = p/\pi d = 0,0371 \rightarrow \alpha = 2,13°$
$\tan \varphi' = 0,1155 \rightarrow \varphi' = 6,59°$

D'où le couple minimal de montée :

$L_A = 10^3 \times 15 \times \tan(2,13° + 6,59°) = 2,3 \times 10^3$ N.mm = 2,3 N.m

D'où le couple minimal de descente :

$|L_A| = |10^3 . 15 . \tan(2,13° - 6,59°)| = 1,17 \times 10^3$ N.mm = 1,17 N.m

12.5 Liaison pivot glissant réelle

Un frottement non négligeable engendre un effort s'opposant au glissement selon l'axe et un moment s'opposant à la rotation autour de ce même axe. Ils dépendent tous deux de l'effort radial $\vec{F_r}$ transmis par cette liaison.

Le torseur des efforts transmissibles s'écrit :

$$_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$$

- Effort radial $\vec{F_r} = Y_A . \vec{y} + Z_A . \vec{z}$.
- Facteur de frottement μ entre **1** et **2**.
- Rayon R ou diamètre D du pivot glissant.

Alors : $\|\vec{F_r}\| = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = F_r$ (nombre arithmétique).

$X_A = +\mu . F_r$ si $\vec{V_{A\in 1/2}} . \vec{x} < 0$	$X_A = -\mu . F_r$ si $\vec{V_{A\in 1/2}} . \vec{x} > 0$	$\|X_A\| \leq \mu . F_r$ si $\vec{V_{A\in 1/2}} = \vec{0}$
$L_A = +\mu . F_r . R$ si $\vec{\Omega_{1/2}} . \vec{x} < 0$	$L_A = -\mu . F_r R$ si $\vec{\Omega_{1/2}} . \vec{x} > 0$	$L_A \leq \mu . F_r R$ si $\vec{\Omega_{1/2}} = \vec{0}$

EXEMPLE :

Dans une liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$, les efforts exercés par **2** sur **1** ont pour valeurs :

$$\{A_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2500 & -120 \\ -1000 & -300 \end{Bmatrix}$$ (forces en N, moments en N.mm).

Rayon du pivot : $R = 40$ mm. Facteur de frottement : $\mu = 0{,}15$.

Déterminer le torseur $\{A_{2/1}\}$ en A dans les cas :

a) $v_x = 0$, (aucune tendance) $\omega_x > 0$;

b) $v_x > 0$, $\omega_x = 0$, (aucune tendance) ;

c) $v_x > 0$ et $\omega_x > 0$; d) $v_x > 0$ et $\omega_x < 0$.

Résolution

Calculer $\mu . F_r = 0{,}15 . \sqrt{2500^2 + 1000^2} \approx 404$ N.

Calculer $\mu . F_r . R = 404 \times 0{,}040 = 16{,}16$ N.m.

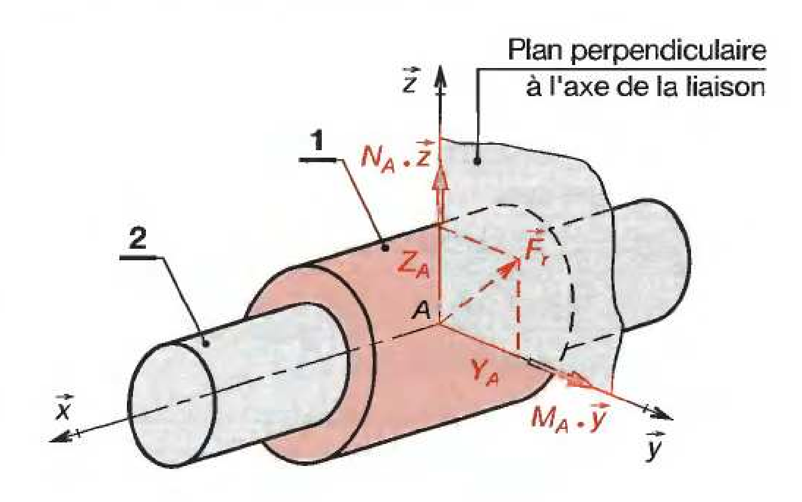
D'où les torseurs correspondant à chaque cas :

a) $_A\begin{Bmatrix} 0 & -16{,}16 \\ 2500 & -120 \\ -1000 & -300 \end{Bmatrix}$ b) $_A\begin{Bmatrix} -404 & 0 \\ 2500 & -120 \\ -1000 & -300 \end{Bmatrix}$

c) $_A\begin{Bmatrix} -404 & -16{,}16 \\ 2500 & -120 \\ -1000 & -300 \end{Bmatrix}$ d) $_A\begin{Bmatrix} -404 & +16{,}16 \\ 2500 & -120 \\ -1000 & -300 \end{Bmatrix}$

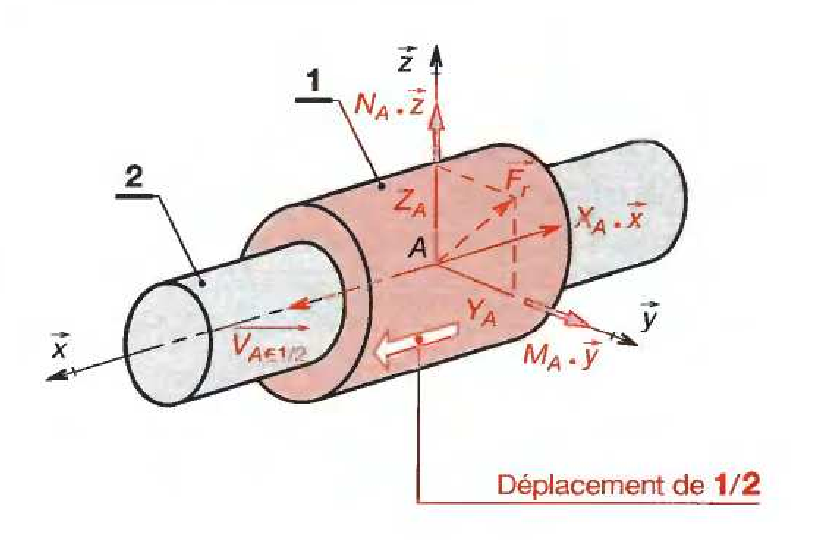
(Tendances aux mouvements nulles.)

AUCUNE TENDANCE AU DÉPLACEMENT

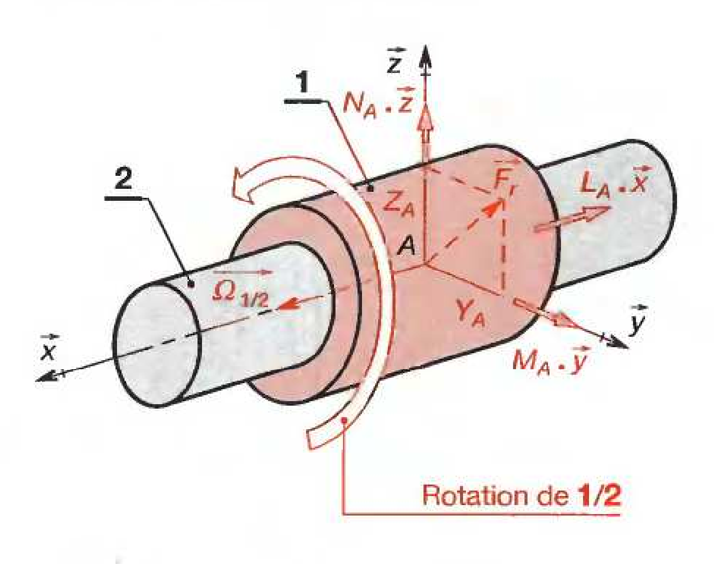


Modélisation comme pivot glissant parfait (chapitre 7)

TENDANCE À TRANSLATION SEULE



TENDANCE À ROTATION SEULE



12■6 Liaison appui-plan réelle

Le torseur des efforts transmissibles, établi chapitre 7 se trouve modifié selon le mouvement existant ou qui apparaîtrait en l'absence de frottements.

12■61 Résultante transmissible

Toute tentative de glissement dans le plan de contact engendre une résistance passive qui s'oppose à cette tentative.

Choisir le repère local de façon à ce que l'un de ses axes indique la normale au plan de contact et un deuxième axe, la direction de la tendance au glissement.

12■62 Moment transmissible

Toute tentative de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de contact, ajoute un moment de résistance au pivotement proportionnel à l'effort normal : $N_A = \eta \cdot Z_A$.

η, exprimé en mètres, est le coefficient de résistance au pivotement.

12■63 Exemple d'application

Soit à déterminer l'action du support sur la semelle d'un moteur électrique.

En régime établi, il fournit et reçoit des actions mécaniques sur son arbre.

- Données et hypothèses :

La pression ambiante agit tout autour des divers organes ; ses effets s'annulent donc.

Le poids s'exprime simplement au centre de gravité G. On connaît l'action mécanique en B.

On estime que les vis ou boulons de fixation ne doivent exercer que des forces dirigées selon $\vec{z}$.

- **SOLUTION :**

Le principe fondamental de la statique (§ 31.5) permet d'écrire :

$X_A = F$	$Y_A = 0$	$Z_A = P + R + N$*
$L_A = a \cdot P + b \cdot R$	$M_A = (c + r) F$	$N_A = -b F$

Il convient de vérifier :

- Effort de serrage minimal :

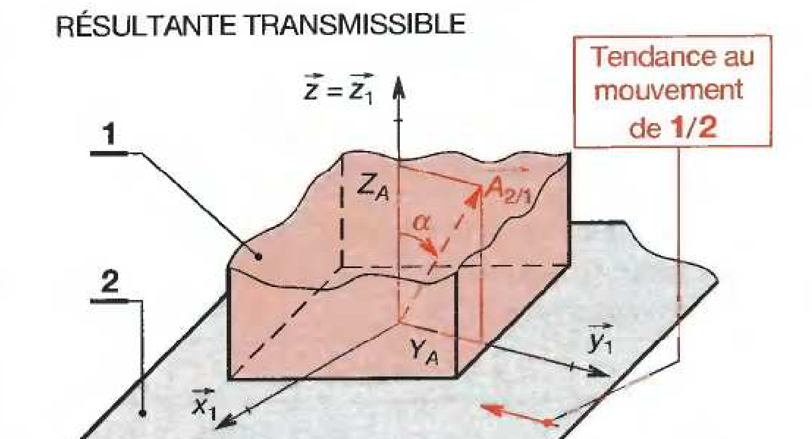
$$|X_A| \leqslant \mu_0 \cdot |Z_A| \quad \text{soit} \quad N \geqslant \frac{F}{\mu_0} - P - R$$

- 2e condition de serrage :

$$|N_A| \leqslant \eta \cdot |Z_A| \quad \text{soit} \quad N \geqslant \frac{b \cdot F}{\eta} - P - R$$

* P, R, N sont les normes de $\vec{P}, \vec{R}, \vec{N}$.

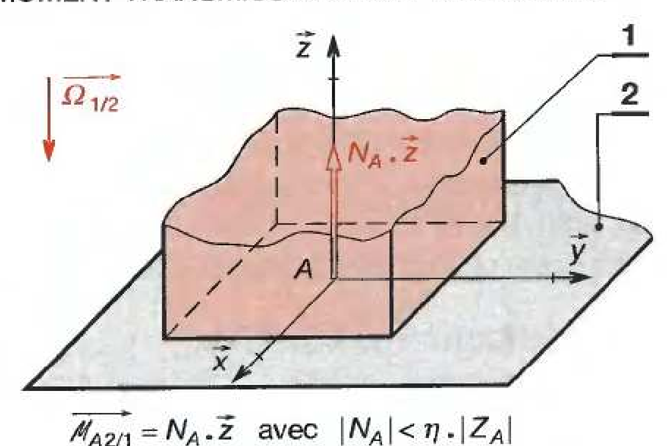
RÉSULTANTE TRANSMISSIBLE



$$\overrightarrow{A_{2/1}} = Y_A \cdot \vec{y_1} + Z_A \cdot \vec{z} \quad \text{avec} \quad Y_A \leqslant \tan\alpha \cdot Z_A$$

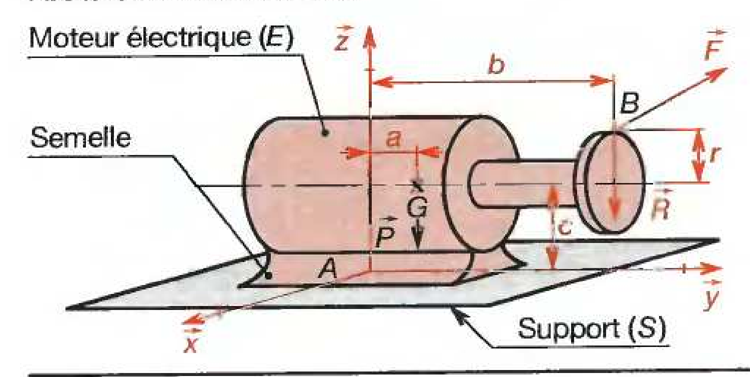
$\alpha \leqslant \varphi$ (angle de frottement)

MOMENT TRANSMISSIBLE SUPPLÉMENTAIRE



$$\overrightarrow{M_{A2/1}} = N_A \cdot \vec{z} \quad \text{avec} \quad |N_A| < \eta \cdot |Z_A|$$

FIXATION D'UN MOTEUR



ACTIONS MÉCANIQUES SUR (E)

Poids $_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix}$ Contact B $_B\begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ -R & 0 \end{Bmatrix}$

Fixation $_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -N & 0 \end{Bmatrix}$ Appui-plan $_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}$

12.7 Liaison sphérique réelle

Le frottement affecte le mouvement de rotation.

Placer le repère local avec l'un de ses axes orienté selon l'axe de rotation concerné ($A, \vec{x}$ par exemple).

Toute rotation autour de cet axe engendre un moment proportionnel à l'effort X_A dirigé selon cet axe et au coefficient de résistance au pivotement (chapitre 33).

$$|L_A| = \eta \cdot |X_A|$$

12.8 Liaison linéaire rectiligne réelle

Si la surface de contact se réduisait à une ligne, la pression $p = F/S$ deviendrait infinie. Les matériaux se déforment et le contact apparaît selon une zone rectangulaire de faible largeur. Cette pression ne doit pas dépasser une limite admissible dite pression de Hertz (§ 47.23).

12.81 Force transmissible

Orienter le repère local avec un axe selon la vitesse de glissement ou l'axe longitudinal de la zone de contact. On obtient les résultats ci-contre respectant les lois du frottement (chapitre 32).

12.82 Moment transmissible

- La petite surface de contact contrarie la rotation autour de $(A, \vec{z})$. Cela se traduit par un **moment de résistance au roulement** N_A qui s'ajoute à l'éventuelle composante L_A.

D'après le chapitre 35, on peut noter :

$$N_A = \pm\ \delta \cdot Y_A$$

N_A : moment de résistance au roulement (N.mm).
δ : coefficient de résistance au roulement (mm) ; signe selon repère.
Y_A : effort normal au plan.

- La petite surface de contact contrarie par frottement toute tentative de pivotement autour de $(A, \vec{y})$.

Il en résulte un **moment de résistance au pivotement** M_A qui s'ajoute aux autres composantes.

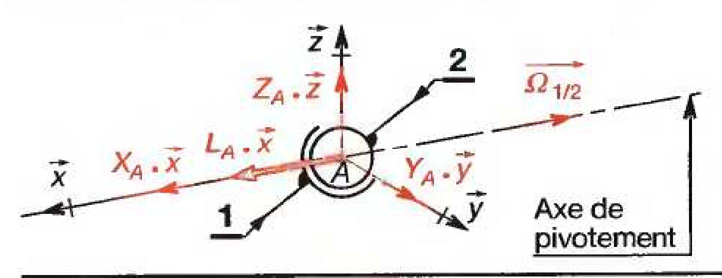
D'après le chapitre 33, on peut noter :

$$M_A = \pm\ \eta \cdot Y_A$$

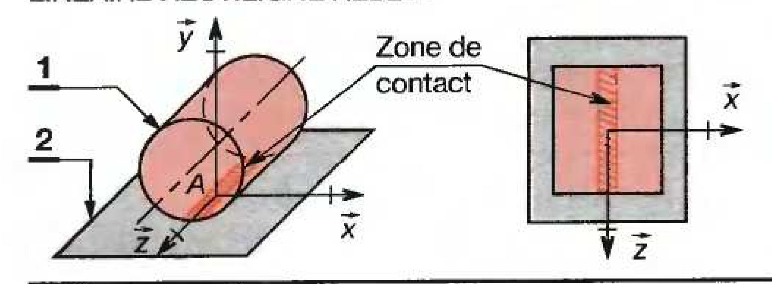
M_A: moment de résistance au pivotement (N.mm).
η : coefficient de résistance au pivotement (mm) ; signe selon repère.
Y_A : effort normal au plan (N).

- Voir exercice § 35.3.

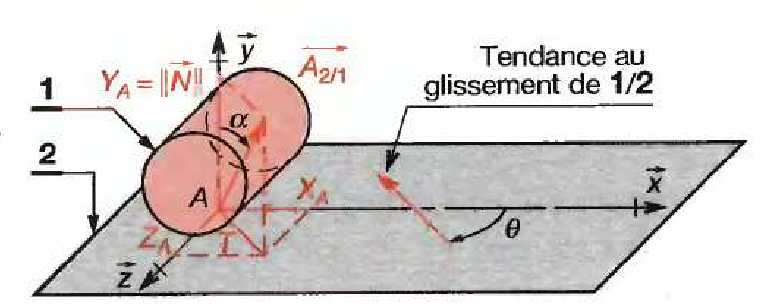
SPHÉRIQUE (OU ROTULE) RÉELLE



LINÉAIRE RECTILIGNE RÉELLE



FORCE TRANSMISSIBLE

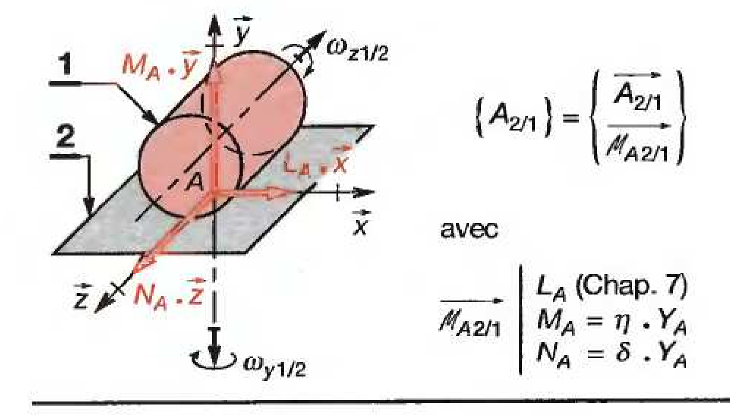


$$\{A_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}} \end{matrix} \right\}_{A\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec } \overrightarrow{A_{2/1}} \begin{vmatrix} X_{A2/1} \\ Y_{A2/1} \\ Z_{A2/1} \end{vmatrix}$$

$$X_A = \|\vec{T}\| \cdot \cos\ \theta = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot \sin\alpha \cdot \cos\theta$$
$$Y_A = \|\vec{N}\| \qquad = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot \cos\alpha$$
$$Z_A = \|\vec{T}\| \cdot \sin\ \theta = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\theta$$

θ = constante ; $\alpha \leq \varphi$: angle de frottement

MOMENT TRANSMISSIBLE



12■9 Liaison sphère-cylindre* réelle

Si la surface de contact se réduisait à une ligne, la pression $p = F/S$ deviendrait infinie. Les matériaux se déforment et le contact apparaît selon une bande circulaire de faible largeur.

12■91 Forces transmissibles

Dans le cas d'un frottement non négligeable, toute tentative de glissement selon l'axe $(A, \vec{x})$ engendre une résistance passive (voir chapitre 32) :

- dirigée selon l'axe $(A, \vec{x})$ de la liaison ;
- orientée dans le sens contraire du glissement (ou de sa tentative).

EXEMPLES :
Segment de piston dans son cylindre ; joint à lèvre sur arbre en translation.

12■92 Moments transmissibles

La petite surface annulaire de contact contrarie les trois mouvements de rotation possibles. Il en résulte trois moments résistants.

REMARQUES :

- La rotation autour de l'axe de la liaison $(A, \vec{x})$ sur le repère local choisi ici) peut avoir une amplitude quelconque.

Le moment $L_A . \vec{x}$ dépend de l'effort normal $\vec{N}$:

$\lvert L_A \rvert \leqslant N.r.\tan\varphi$ tant que $\overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \vec{0}$	$\lvert L_A \rvert = N.r.\tan\varphi$ quand $\overrightarrow{\Omega_{1/2}} \neq \vec{0}$

- Cette liaison ne peut tolérer que de faibles oscillations autour des axes $(A, \vec{y})$ et $(A, \vec{z})$.

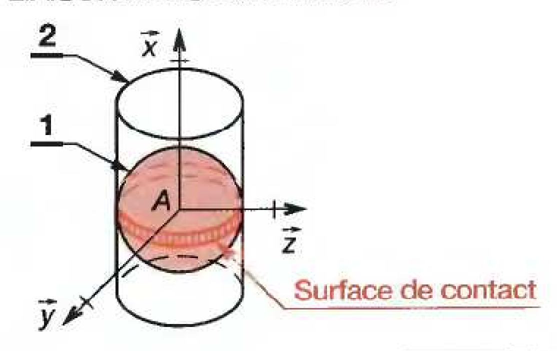
Les moments M_A et N_A doivent rester négligeables ; sinon, il convient de modéliser la liaison réelle selon une liaison pivot glissant.

- La ligne de treuil schématisée ci-contre fait l'objet d'une modélisation § 55.14.

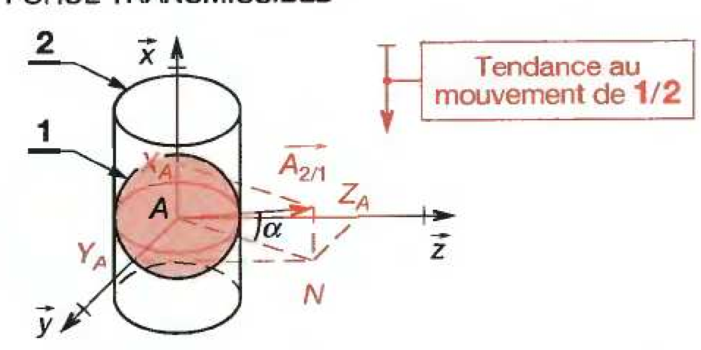
Le roulement supportant les charges axiales et radiales peut être modélisé par une liaison rotule ; celui qui ne supporte qu'une charge radiale (non arrêté axialement sera modélisé selon une liaison sphère-cylindre). Ce n'est valable que si le jeu de rotulage de chaque roulement est compatible avec les déformations sous charge et les défauts d'alignement des paliers.

* Ou linéaire annulaire.

LIAISON ANNULAIRE RÉELLE



FORCE TRANSMISSIBLE



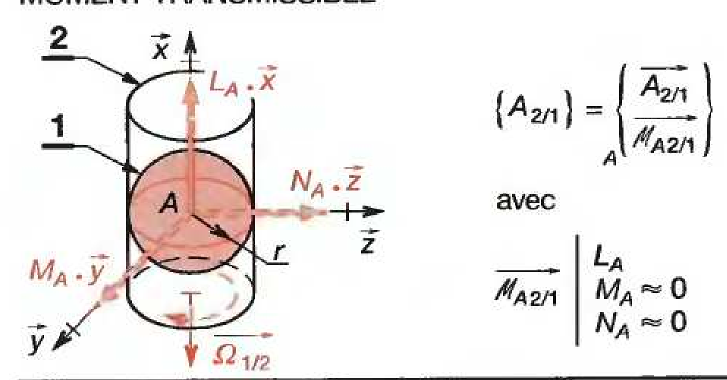
$$\{A_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \overrightarrow{A_{2/1}} = X_A . \vec{x} + Y_A . \vec{y} + Z_A . \vec{z}$$

Relations : $Y_A . \vec{y} + Z_A . \vec{z} = \vec{N}$

$|X_A| = \|\vec{N}\| . \tan\alpha$

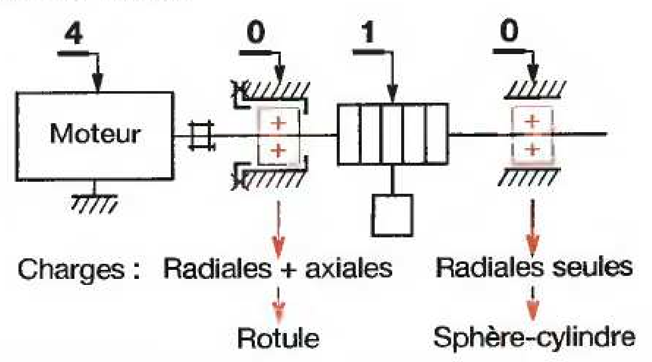
$\alpha \leqslant \varphi$ (angle de frottement)

MOMENT TRANSMISSIBLE



$$\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}} \left| \begin{matrix} L_A \\ M_A \approx 0 \\ N_A \approx 0 \end{matrix} \right.$$

LIGNE DE TREUIL



12 ▪ 10 Liaison sphère-plan* réelle

Si le contact s'effectuait réellement selon un point, le moindre effort transmis engendrerait une pression infinie ($p = F/S$) incompatible avec la résistance des matériaux. En fait, elle ne doit pas dépasser une valeur limite dite «pression de Hertz» et le contact a donc une petite étendue.

12 ▪ 101 Force transmissible

Dans le cas d'un frottement non négligeable, toute tentative de glissement, selon une direction, engendre une résistance passive (voir chapitre 32) :

- dirigée dans le plan tangent $(A, \vec{x}, \vec{y})$ aux surfaces en contact ;
- s'opposant au glissement ou à la tentative de glissement dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

> **Il est judicieux d'orienter le repère local de façon à ce qu'un deuxième axe désigne la tendance au mouvement (exemple : $A, \vec{y}$).**

12 ▪ 102 Moments transmissibles

- La petite surface de contact contrarie les rotations autour des deux axes de son plan. Toute tentative de rotation autour de l'un de ces axes se traduit par un **moment de résistance au roulement** (chapitre 35).

Le moment de résistance au roulement s'oppose à toute tentative de roulement. Il est égal au produit de l'effort normal par le coefficient δ de résistance au roulement (exprimé en mètres).

- La petite surface de contact contrarie, par frottement, toute tentative de pivotement autour de l'axe normal. Il en résulte un **moment de résistance au pivotement** proportionnel à l'effort normal (chapitre 33).

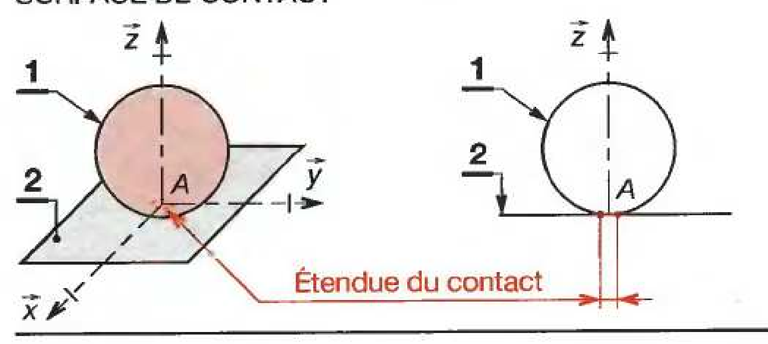
Le moment de résistance au pivotement s'oppose à toute tentative de pivotement. Il est égal au produit de l'effort normal par le coefficient η de résistance au pivotement (exprimé en mètres).

EXEMPLE :

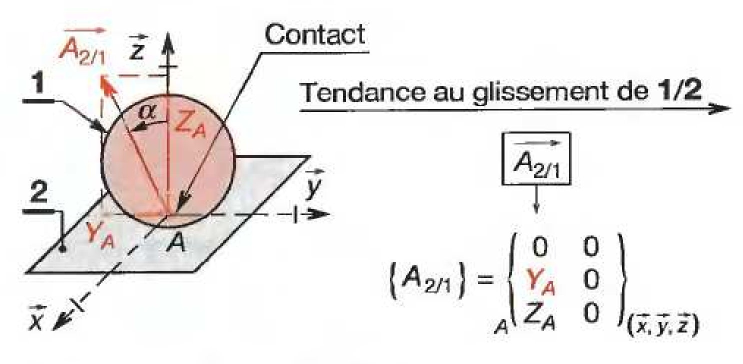
La boule **1** roule sans glisser sur **2** de A vers B.
On remarque que :
$Y_A = -Z_A \cdot \tan\alpha$ avec $\alpha < \varphi$ (pas de glissement).
$L_A = \delta \cdot Z_A$ (perturbation de la seule rotation créée).

* ou ponctuelle.

SURFACE DE CONTACT

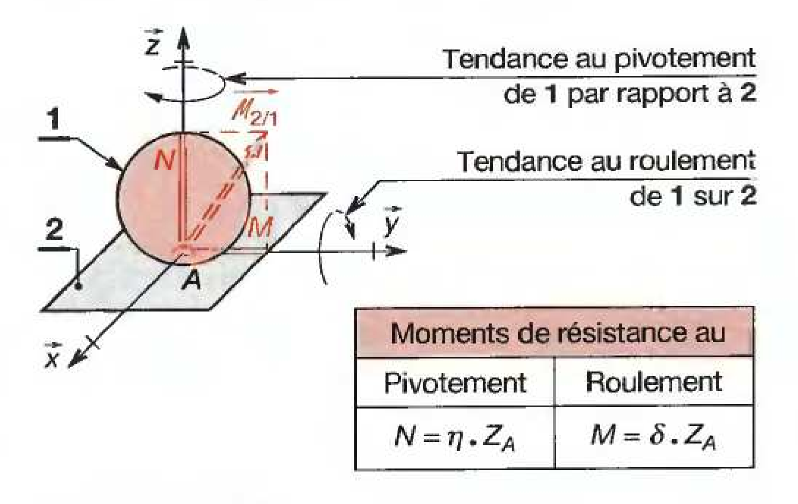


FORCE TRANSMISSIBLE



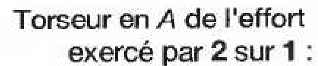
Dans ce cas : $Y_A = -Z_A \cdot \tan\alpha$
$\alpha \leqslant \varphi$ (angle de frottement § 34)

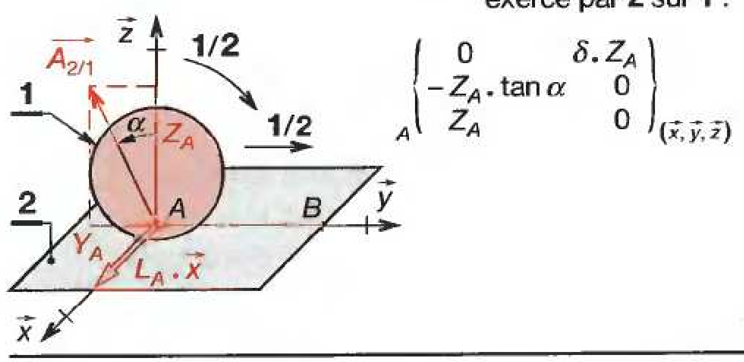
MOMENTS TRANSMISSIBLES



Moments de résistance au	
Pivotement	Roulement
$N = \eta \cdot Z_A$	$M = \delta \cdot Z_A$

EXEMPLE (SOURIS § 3.2)





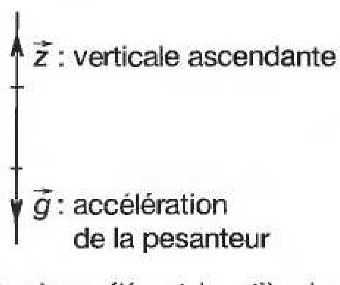
13 Actions mécaniques à distance

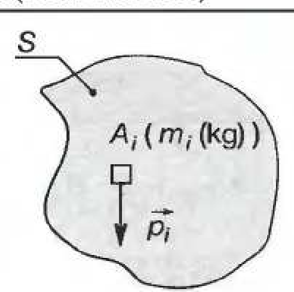
Ce sont des actions mécaniques qui agissent directement sur le corps que l'on isole, sans aucun contact matériel.

À titre d'exemples, on peut citer :

- l'attraction terrestre (pesanteur),
- les actions magnétiques et électromagnétiques.

POIDS D'UN CORPS (PESANTEUR)





Sur chaque élément de matière de masse m_i entourant le point A_i, la pesanteur crée une force $\vec{p_i}$ appelée **poids élémentaire** telle que :

$$\vec{p_i} = m_i \cdot \vec{g} = -m_i \cdot g \cdot \vec{z}$$

Pour l'ensemble du corps, le poids se représente par le «torseur-poids» qui s'exprime simplement au centre de gravité G (voir chapitre 14).

$$_G\{T_P\} = _G\begin{Bmatrix}\vec{P}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{P} = M.\vec{g} = -M.g.\vec{z}$$

$\|\vec{P}\| = P$: poids du corps, en newtons (N).
M : masse du corps (kg).
$\|\vec{g}\| = g$: accélération de la pesanteur (m/s^2).
Sauf indication contraire, choisir :

- **$\|\vec{g}\| = g \approx 10$ m/s^2 pour un solide.**
(Calculs imprécis à cause des frottements incertains.)
- **$g \approx 9{,}81$ m/s^2 pour un fluide.**
(Frottements très faibles.)

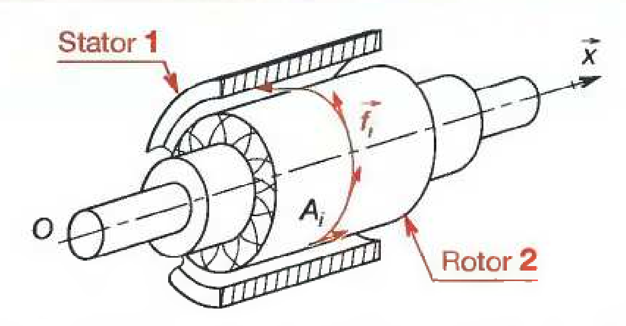
À titre indicatif, $g \approx 9{,}73$ m/s^2 aux pôles,
9,78 m/s^2 à l'équateur,
9,81 m/s^2 à Paris.

EXEMPLES DE CALCUL :

- Solide homogène de masse volumique $\rho_V = 7{,}2$ kg/dm^3, de volume $V = 10$ dm^3 : $P = \rho_V . V . g \approx 7{,}2 \times 10 \times 10 = 720$ N.
- Profilé IPN 100 de masse linéique $\rho_\ell = 8{,}32$ kg/m (§ 52.523), de longueur $L = 8$ m : $P = \rho_\ell . L . g = 8{,}32 \times 8 \times 10 = 666$ N.

ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Moteur électrique

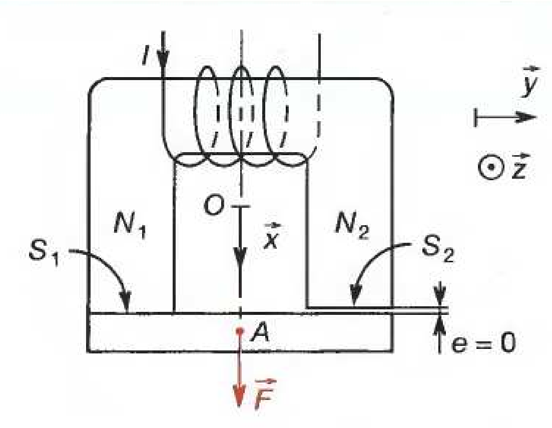


Au cours du fonctionnement, le stator exerce sur le rotor des actions mécaniques (A_i, $\vec{f_i}$) ; elles se réduisent à un "torseur couple" :

$$\{C_{1/2}\} = \{\vec{0} \quad \overrightarrow{C_{1/2}}\}_{O\vec{x}}$$

REMARQUE : $\Sigma \vec{f_i} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{C_{1/2}} = \Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}}_{Ox}(A_i, \vec{f_i})$

Électro-aimant



La force $\vec{F}$ à exercer pour décoller l'armature A des noyaux N_1 et N_2 lorsque e = 0 peut être modélisée par le glisseur ($O\vec{x}$, $\vec{F}$) ou le torseur $_O\begin{Bmatrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

avec $\|\vec{F}\| = \dfrac{1}{2\mu_0} SB^2$

F (N)
$S = S_1 + S_2$ (m^2)
B en teslas
$\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$

14 Barycentre Centre de gravité

14.1 Barycentre

Le barycentre de n points $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_n$, affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n$, est un point G tel que :

$$\alpha_1 . \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 . \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_i . \overrightarrow{OA_i} + \ldots \alpha_n . \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_n)\ \overrightarrow{OG}$$

REMARQUES :

- Sous forme symbolique, on écrit :

$$\Sigma_{i=1}^{n} \left(\alpha_i . \overrightarrow{OA_i}\right) = (\Sigma \alpha_i) . \overrightarrow{OG}$$

- O représente un point arbitraire, commun aux pointeurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OG}$.
- On peut exploiter cette relation graphiquement ou algébriquement, sur un repère.
- Pour un ensemble (E) continu de points, la relation s'écrit symboliquement :

$$\int_{(E)} \overrightarrow{OP} . \mathrm{d}\alpha = \left(\int \mathrm{d}\alpha\right) . \overrightarrow{OG}$$

14.2 Centre de gravité

Le barycentre de n points affectés de coefficients proportionnels aux masses associées à ces points, se désigne par «un centre de gravité» des n points.

REMARQUES :

- Pour une structure (S) continue, constituée de points P auxquels on associe des masses élémentaires $\mathrm{d}m$, le centre de gravité G se déduit d'un point O connu, à partir de la relation :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{OP} . \mathrm{d}m = M . \overrightarrow{OG} \quad \text{où} \quad M = \int_{(S)} \mathrm{d}m$$

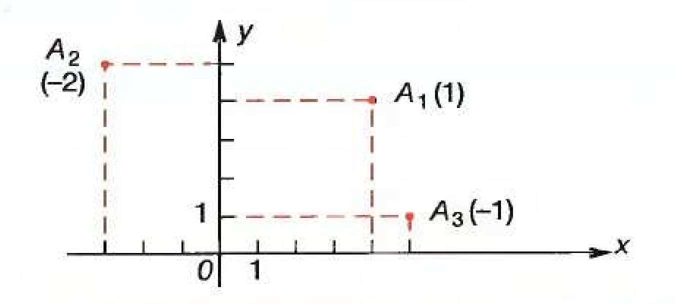
- Pour une structure (S) discrète (constituée de blocs séparés), on considère les masses m_i associées aux divers points A_i et l'on détermine le centre de gravité de l'ensemble à partir de la relation :

$$\Sigma (m_i . \overrightarrow{OA_i}) = M . \overrightarrow{OG} \quad \text{où} \quad M = \Sigma\, m_i$$

Les points A_i correspondent aux centres de gravité de chaque bloc de la structure.

BARYCENTRE DE TROIS POINTS

Données



Relation

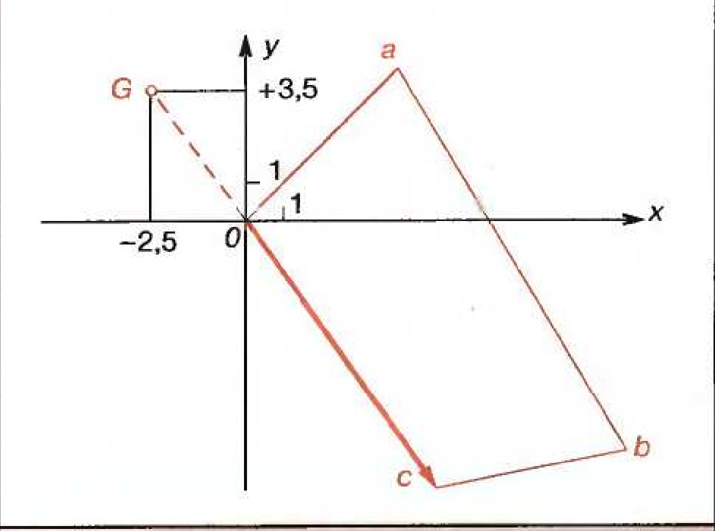
$$(1) . \overrightarrow{OA_1} + (-2) . \overrightarrow{OA_2} + (-1) . \overrightarrow{OA_3} = (1 - 2 - 1) . \overrightarrow{OG}$$

Soit :

$$\overrightarrow{OA_1} - 2\,\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3} = -2\,\overrightarrow{OG}$$

Construction

- Porter $(Oa) = \overrightarrow{OA_1}$; $(ab) = -2\,\overrightarrow{OA_2}$;
  $(bc) = -\overrightarrow{OA_3}$
- Connaissant $(Oc) = -2\overrightarrow{OG}$, on déduit G



Calcul

On relève les coordonnées des points :

$$1.\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = -2.\begin{pmatrix}X_G\\Y_G\end{pmatrix}$$

D'où

$$X_G = \frac{4 + 6 - 5}{-2} = -2{,}5 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{4 - 10 - 1}{-2} = +3{,}5 \text{ mm}$$

14 ■ 3 CENTRE DE GRAVITÉ G DES SOLIDES HOMOGÈNES USUELS

Barre rectiligne à section constante	Plaque triangulaire d'épaisseur constante	Plaque en parallélogramme d'épaisseur constante
G ; $\ell/2$; ℓ G : équidistant des extrémités	A, B, C, I, J, G $AG = 2/3 . AI$ $BG = 2/3 . BJ$ G : point de concours des médianes	G G : point de concours des diagonales

Plaque homogène d'épaisseur constante

A, I, B, G_1, G, G_2, D, J, C, h

$AB = b$
$DC = a$
$AI = IB$
$DJ = JC$

MÉTHODE 1 : Par deux triangles *ABD* et *CBD* de c.d.g. G_1 et G_2

E, A, H, I, B, G, D, J, C, F

$$GH = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$

MÉTHODE 2 : Porter d'un coté $AE = CD$, de l'autre $CF = AB$; joindre *EF* puis les milieux *I* et *J* de *AB* et *CD*

Plaque en quadrilatère d'épaisseur constante	Plaque en polygone régulier d'épaisseur constante	Plaque en secteur d'épaisseur constante
A, I, L, B, D, M, G, J, K, C Milieux des diagonales *I*, *J* Porter $CK = AM$, $BL = DM$: $G = KI \cap LJ$	**G : centre du polygone** **Cas particulier : plaque circulaire**	$OG = \dfrac{120 . r . \sin\alpha}{\pi . \alpha}$ G, r, α, O α, en rad

Plaque en secteur de disque d'épaisseur constante	Plaque en portion de couronne d'épaisseur constante	Plaque en découpe parabolique d'épaisseur constante
$OG = \dfrac{120 . r . \sin^3\alpha}{\pi . \alpha - 90 \sin^2\alpha}$ G, r, α, O α, en rad	$OG = \dfrac{120}{\pi} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \dfrac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ G, R, r, α, O α, en rad	A, G, a, B, C ; A, G, H, a, b $AG = \dfrac{3}{5} a$ $AH = \dfrac{3}{5} a$ $HG = \dfrac{3}{8} b$

Plaque en découpe elliptique *ABC* d'épaisseur constante	Tronc de cylindre de révolution	Onglet cylindrique
A, B, C, G, I, J, O C'est le même centre de gravité que le segment de disque *AIJ*	$OH = \dfrac{r^2}{4} \cdot \dfrac{\tan\alpha}{h}$ $HG = \dfrac{h}{2} + \dfrac{r^2}{8} \cdot \dfrac{\tan^2\alpha}{h}$ α, en rad G, h, α, H, r	$OH = \dfrac{3}{16} \cdot \pi \cdot r$ $HG = \dfrac{3}{32} \cdot \pi \cdot h$ G, h, H, O, r

Pyramide et cône	Calotte sphérique pleine	Secteur sphérique
S, G, g ; S, G, g $SG = \dfrac{3}{4} Sg$ g = centre de gravité de la base	G, h, α, r, O α, en rad $OG = \dfrac{3}{4} \dfrac{(2r-h)^2}{3r-h} = \dfrac{3}{4} r . \dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{2+\cos\alpha}$	G, h, α, r, O α, en rad $OG = \dfrac{3}{8} r (1 + \cos\alpha) = \dfrac{3}{8} (2r - h)$

14 ▪ 4 Détermination du centre de gravité

14 ▪ 41 Considérations générales

Si le solide (S) peut se partager en n solides notés (S_i), **géométriquement simples**, de masses m_i et de centre de gravité A_i connus, le centre de gravité G de (S) se détermine à partir de la relation :

$$\Sigma_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot \overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\Sigma_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \overrightarrow{OG}$$

EXEMPLE :

$$m_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} - m_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = (m_1 + m_2 - m_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

REMARQUES :

- On peut utiliser des coefficients proportionnels aux poids :

$$\Sigma_{i=1}^{n}\left(p_i \cdot \overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\Sigma_{i=1}^{n} p_i\right) \cdot \overrightarrow{OG}$$

- Pour un solide homogène, les coefficients sont proportionnels aux volumes :

$$\Sigma_{i=1}^{n}\left(v_i \cdot \overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\Sigma_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot \overrightarrow{OG}$$

- Si de plus, l'épaisseur est constante, on peut utiliser les surfaces :

$$\Sigma_{i=1}^{n}\left(s_i \cdot \overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\Sigma_{i=1}^{n} s_i\right) \cdot \overrightarrow{OG}$$

- Si de plus, la section est constante, on peut utiliser des coefficients proportionnels aux longueurs :

$$\Sigma_{i=1}^{n}\left(\ell_i \cdot \overrightarrow{OA_i}\right)=\left(\Sigma_{i=1}^{n} \ell_i\right) \cdot \overrightarrow{OG}$$

La recherche du centre de gravité se trouve facilitée dans de nombreux cas :

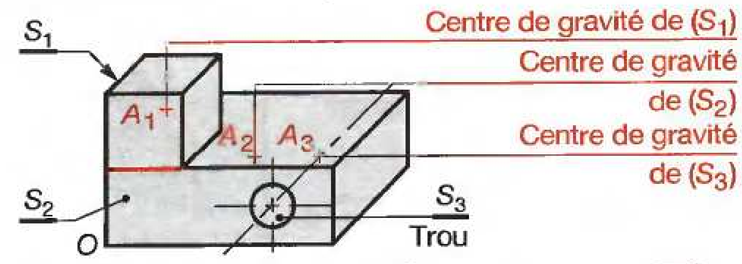
Quand un solide (S) homogène présente :

- **un plan de symétrie, ou**
- **un axe de symétrie, ou**
- **un centre de symétrie,**

alors, son centre de gravité G se situe, respectivement :

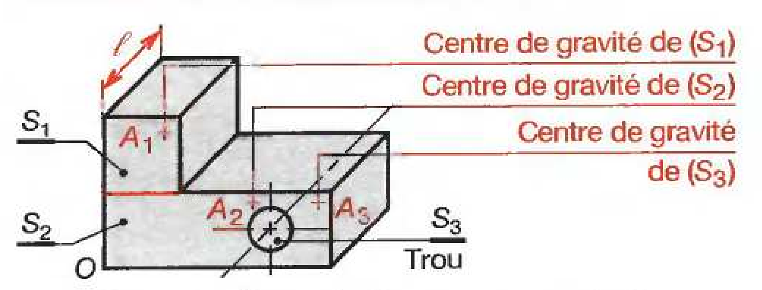
- **dans le plan de symétrie, ou**
- **sur l'axe de symétrie, ou**
- **sur le centre de symétrie.**

MÉTHODE GÉNÉRALE (AUCUNE SYMÉTRIE)



$$m_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} - m_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = (m_1 + m_2 - m_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$
$$p_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + p_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} - p_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = (p_1 + p_2 - p_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$
$$v_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + v_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} - v_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = (v_1 + v_2 - v_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

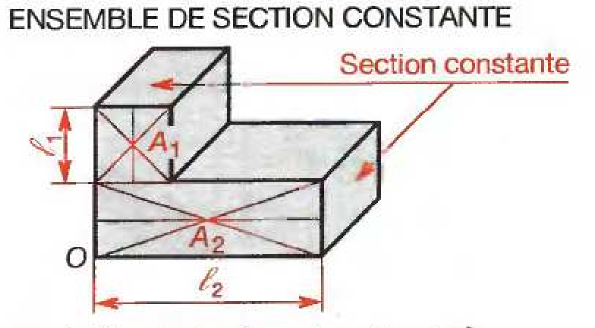
ENSEMBLE D'ÉPAISSEUR CONSTANTE



$$s_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + s_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} - s_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = (s_1 + s_2 - s_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

G se situe dans le plan de symétrie

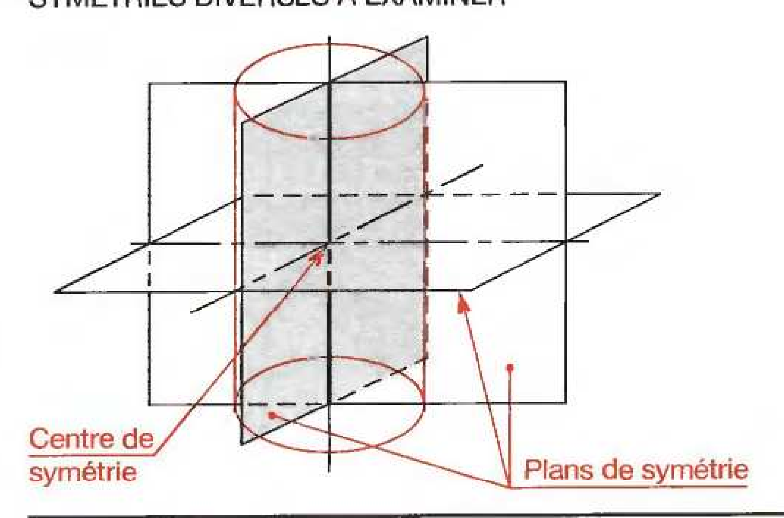
ENSEMBLE DE SECTION CONSTANTE



$$\ell_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + \ell_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} = (\ell_1 + \ell_2) \cdot \overrightarrow{OG}$$

G se situe dans le plan de symétrie

SYMÉTRIES DIVERSES À EXAMINER



14.42 Calcul direct

L'ensemble de l'exemple ci-contre est constitué par :

- un socle parallépipèdique 120 × 120 × 50 de masse $m_1 = 20$ kg avant perçage ;
- un cube de 50 de côté, de masse $m_2 = 10$ kg ;
- un trou a retiré 7,85 kg au socle.

Partant de la relation vectorielle, on exprime chaque bi-point par ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ que l'on choisit. On obtient (présentation pratique) :

$$20 \times \begin{pmatrix}60\\60\\25\end{pmatrix} + 10 \times \begin{pmatrix}95\\25\\75\end{pmatrix} - 7{,}85 \times \begin{pmatrix}60\\80\\25\end{pmatrix} = 22{,}15 \begin{pmatrix}X_G\\Y_G\\Z_G\end{pmatrix}^*$$

On obtient :

$$X_G = \frac{20 \times 60 + 10 \times 95 - 7{,}85 \times 60}{22{,}15} = 75{,}8 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{20 \times 60 + 10 \times 25 - 7{,}85 \times 80}{22{,}15} = 37{,}1 \text{ mm}$$

$$Z_G = \frac{20 \times 25 + 10 \times 75 - 7{,}85 \times 25}{22{,}15} = 47{,}6 \text{ mm}$$

14.43 Méthode graphique

Voir ci-contre.

14.44 Méthode informatique

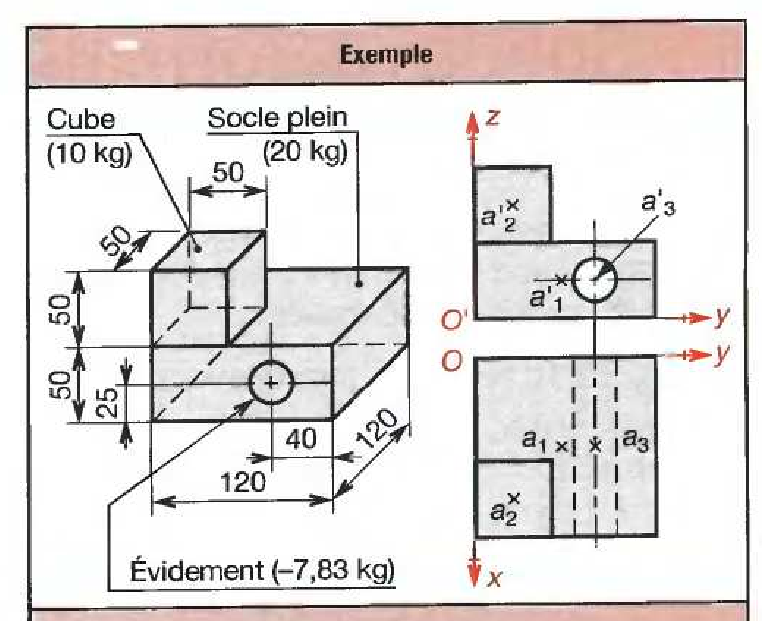
Des logiciels spécifiques déterminent directement la position des centres de gravité : «*2D*» pour les solides homogènes d'épaisseur constante et «*3D*» pour les autres.

14.45 PROGRAMMATION DU CALCUL

Commentaires	Commandes en BASIC
Nombre *N* de centres de gravité.	10 INPUT *N*
Dimensions des tableaux.	20 DIM *X*(*N*), *Y*(*N*), *Z*(*N*), *C*(*N*)
Entrée des coordonnées de chaque centre de gravité à l'aide d'une boucle et coefficient *C* associé.	30 FOR *I* = 1 TO *N* 40 INPUT *X* (*I*) 50 INPUT *Y* (*I*) 60 INPUT *Z* (*I*) 70 INPUT *C* (*I*)
Calcul du premier membre de la relation du barycentre (*NX*, *NY*, *NZ*) et de la somme *C* des coefficients.	80 *NX* = *NX* + *C* (*I*) * *X*(*I*) 90 *NY* = *NY* + *C* (*I*) * *Y* (*I*) 100 *NZ* = *NZ* + *C*(*I*) * *Z* (*I*) 110 *C* = *C* + *C* (*I*)
Fin de la n^ième boucle. Calcul des coordonnées de *G*.	120 NEXT *I* 130 *X* = *NX* /*C* ; *Y* = *NY*/*C* ; *Z* = *NZ* /*C*
Sortie des résultats.	140 PRINT «Coordonnées : "X=";X;"Y=";Y;"Z=";Z

* Présentation pratique (§ 72.5) ** Voir bi-points (§ 71.1)

Exemple



Relation vectorielle

$$m_1 . \overrightarrow{OA_1} + m_2 . \overrightarrow{OA_2} - m_3 . \overrightarrow{OA_3} = (m_1 + m_2 - m_3) . \overrightarrow{OG}$$

Soit :

$$20 . \overrightarrow{OA_1} + 10 . \overrightarrow{OA_2} - 7{,}85 . \overrightarrow{OA_3} = 22{,}15 . \overrightarrow{OG}$$

Tracé (méthode graphique)

- Choix d'une échelle :

$$2 . \overrightarrow{OA_1} + 1 . \overrightarrow{OA_2} - 0{,}78 . \overrightarrow{OA_3} = 2{,}21 . \overrightarrow{OG}$$

- On porte successivement :

$(01)^{**} = 2 . \overrightarrow{Oa_1}$; $(12) = 1 . \overrightarrow{Oa_2}$; $(23) = -0{,}8 . \overrightarrow{Oa_3}$

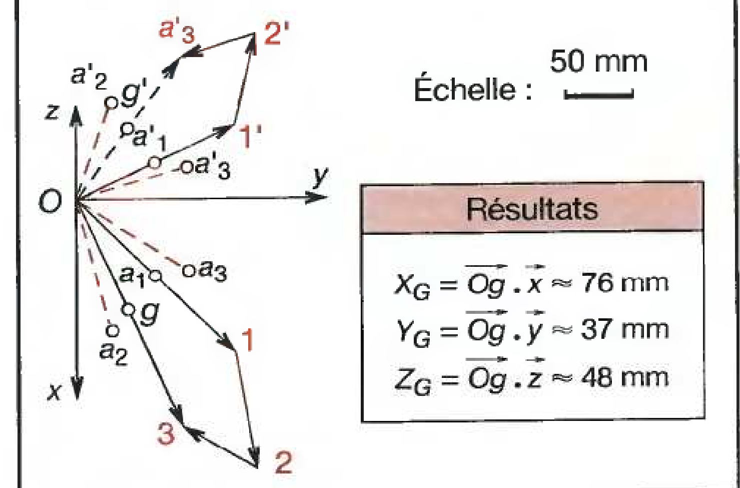
$(01') = 2 . \overrightarrow{Oa_{1'}}$; $(1'2') = 1 . \overrightarrow{Oa_{2'}}$; $(2'3') = -0{,}8 . \overrightarrow{Oa_{3'}}$

- On trace la somme vectorielle sur chaque projection :

$(01) + (12) + (23) = (03) = 2{,}21 . (0g)$

$(01') + (1'2') + (2'3') = (0'3') = 2{,}21 . (0g')$

- En divisant (Og) et (Og') par 2,21, on détermine g et g', projections de G.



15 Solides déformables

Ils sont définis au § 1.2.

On les utilise, en général, dans leur domaine élastique : la contrainte ne dépasse pas alors la limite d'élasticité et les efforts restent sensiblement proportionnels aux déformations.

15 ■ 1 Poutre à section constante

Les torseurs se déduisent des expressions données dans les formulaires (chapitre 53).

MÉTHODE :

Flèche → **Efforts** → **Torseur transmissible**

EXEMPLE :

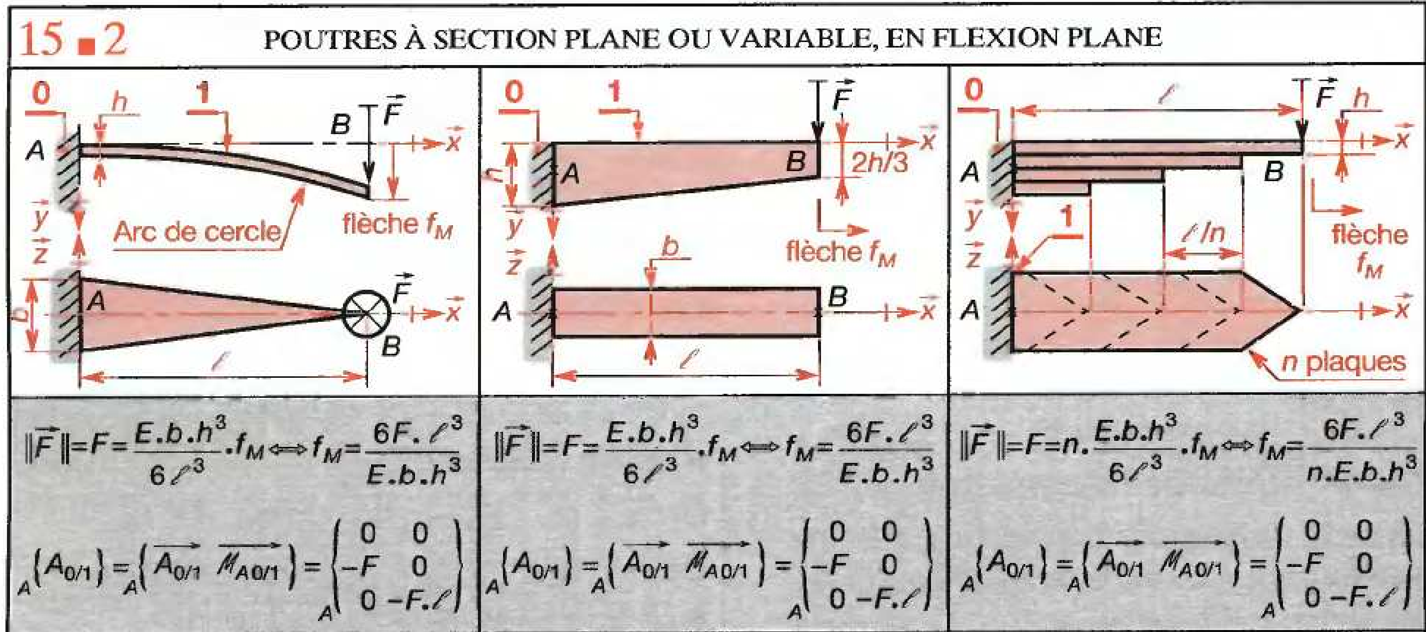
Charge concentrée au milieu d'une poutre en appui simple en A, encastrée en B.

Les torseurs aux appuis s'écrivent :

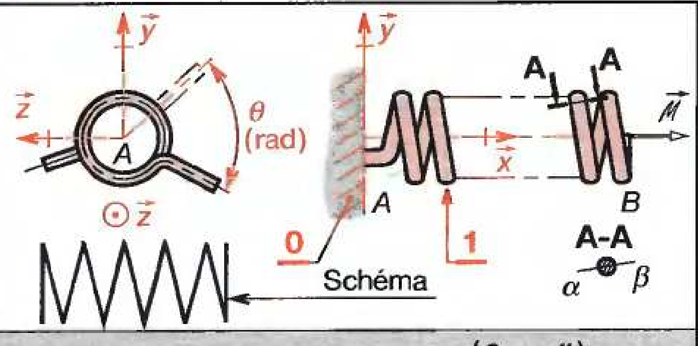
$$_A\{A_{2/1}\} = _A\{\overrightarrow{A_{2/1}}\ \ \vec{0}\} = _A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ (5/16)\|\vec{F}\| & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

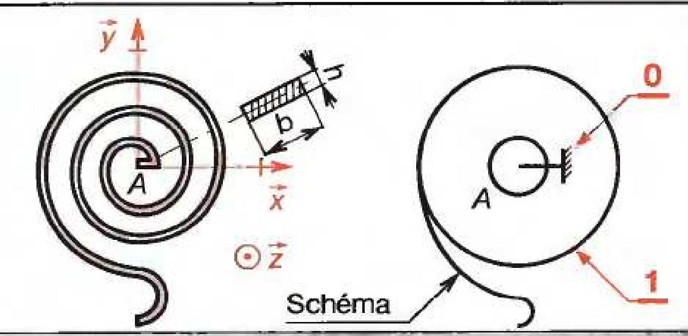
$$_B\{B_{3/1}\} = _B\{\overrightarrow{B_{3/1}}\ \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B3/1}}\} = _B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ (11/16)\|\vec{F}\| & -(3/16)\|\vec{F}\|\,\ell \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

15 ■ 2 POUTRES À SECTION PLANE OU VARIABLE, EN FLEXION PLANE



15 ■ 3 RESSORTS DE FLEXION ENROULÉS





$$_A\{A_{0/1}\} = _A\{\overrightarrow{A_{0/1}}\ \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A0/1}}\} = _A\begin{Bmatrix} 0 & -\mathcal{M} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Avec $\|\overrightarrow{\mathcal{M}_{A0/1}}\| = \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \theta.\frac{E}{\ell}.I_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \theta = \frac{\mathcal{M}.\ell}{E.I_{\alpha\beta}}$$

$$_A\{A_{0/1}\} = _A\{\vec{0}\ \ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A0/1}}\} = _A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{M} \end{Bmatrix}$$

Après une rotation relative de θ rad des fixations autour de $(A, \vec{z})$, le moment $\mathcal{M}$ devient :

$$\mathcal{M} = \frac{E.b.h^3}{12}.\frac{\theta}{\ell} \Leftrightarrow \theta = \frac{12.\mathcal{M}.\ell}{E.b.h^3}$$

ℓ = longueur développée ; $I_{\alpha\beta}$: moment quadratique selon $\alpha\beta$; autres notations § 15.4.

15 ■ 4 RESSORTS DE TORSION ET TORSION-COMPRESSION (G.D. 46)

Barres de torsion	Cylindriques	Coniques, en volute
Position quand $\vec{M} = \vec{0}$ Position quand $\vec{M} \neq \vec{0}$ Un moment $\vec{M}$ appliqué sur l'axe de la barre de torsion engendre une rotation relative α (rad) des extrémités	De traction / De compression Flèche f	À section circulaire : $K = Gd^4/(4nD^2)$ À section rectangulaire : $K = \frac{Gb^3h^2}{\sqrt{2}nD^2(b^2+h^2)}$
${}_A\{\mathcal{A}_{\bar{1}/1}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}\ \overrightarrow{M_{A\bar{1}/1}}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix}0 & -M\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}$ avec $M = G\,.\,\frac{\alpha}{\ell}\,.\,I_0$	${}_A\{\mathcal{A}_{\bar{1}/1}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}\ \overrightarrow{M_{A\bar{1}/1}}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix}F & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}$ avec $F = f\,.\,G\,.\,d^4/(8\,.\,n\,.\,D^3)$	${}_A\{\mathcal{A}_{\bar{1}/1}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}\ \overrightarrow{M_{A\bar{1}/1}}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ F & 0\end{Bmatrix}$ avec $F = f\,.\,K$

NOTATIONS :

- G : module d'élasticité transversal (de Coulomb), en MPa.
- a : déformation angulaire, en rad.
- ℓ : longueur du ressort, en mm.
- I_0 : moment quadratique polaire de la section, en mm^4.
- f : flèche, en mm.
- d : diamètre du fil, en mm.
- D : diamètre d'enroulement, en mm.
- n : nombre de spires utiles.

15 ■ 5 Courroies plates

L'entraînement n'est possible qu'à partir d'une tension de pose T_0.

En fonctionnement, le brin tendu supporte un effort de traction T et le brin mou, un autre effort de traction t tels que :

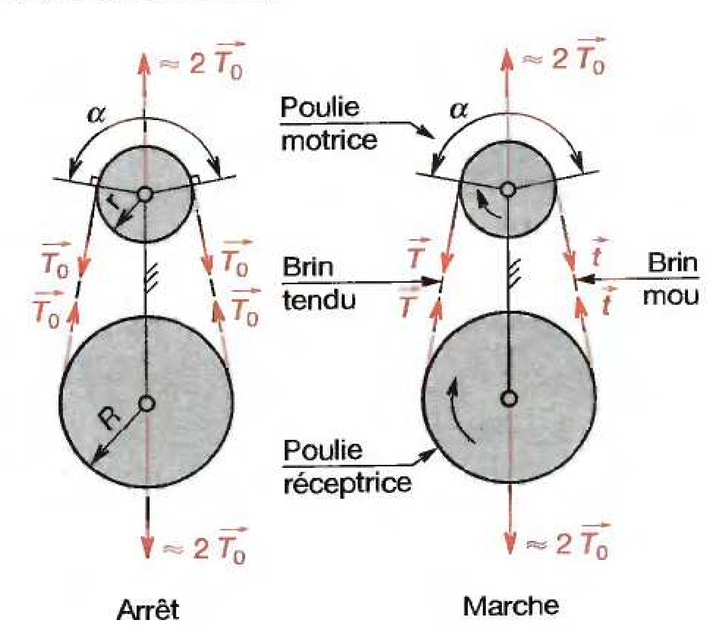
$$T + t = 2\,T_0 \qquad T = t\,.\,e^{\mu\cdot\alpha}$$

μ : facteur d'adhérence
α : arc d'enroulement exprimé en rad

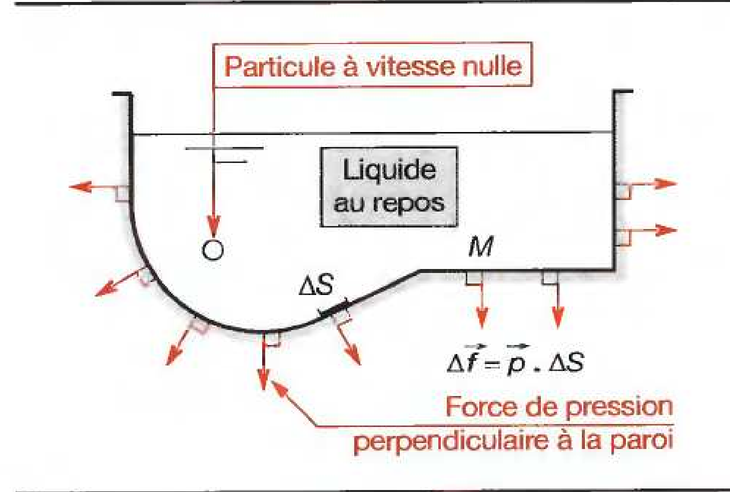
Il en résulte un couple moteur C_m et résistant C_r :

$$C_m = (T - t)\,.\,r \qquad C_r = (T - t)\,.\,R$$

COURROIES PLATES



16 Action d'un fluide statique



Les particules d'un fluide se comportent comme une multitude de petites sphères entrant en contact avec la paroi.

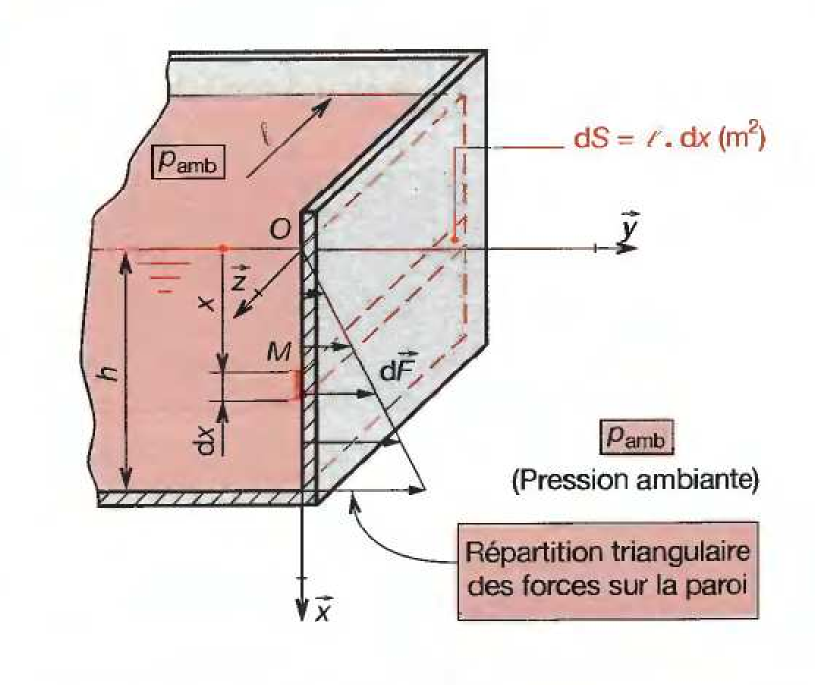
L'action d'une particule de fluide immobile, sur une paroi est toujours modélisable par des pointeurs $(M, \Delta \vec{f})$ perpendiculaires à cette paroi :

Force élémentaire due à la pression
$\Delta \vec{f} = \vec{p} \cdot \Delta S = p \cdot \Delta S \cdot \vec{n}$

p : pression au point considéré, (Pa ou N/m²).

$\vec{n}$: normale unitaire vers la matière.

16 ▪ 1 Fluide libre sur paroi verticale haute



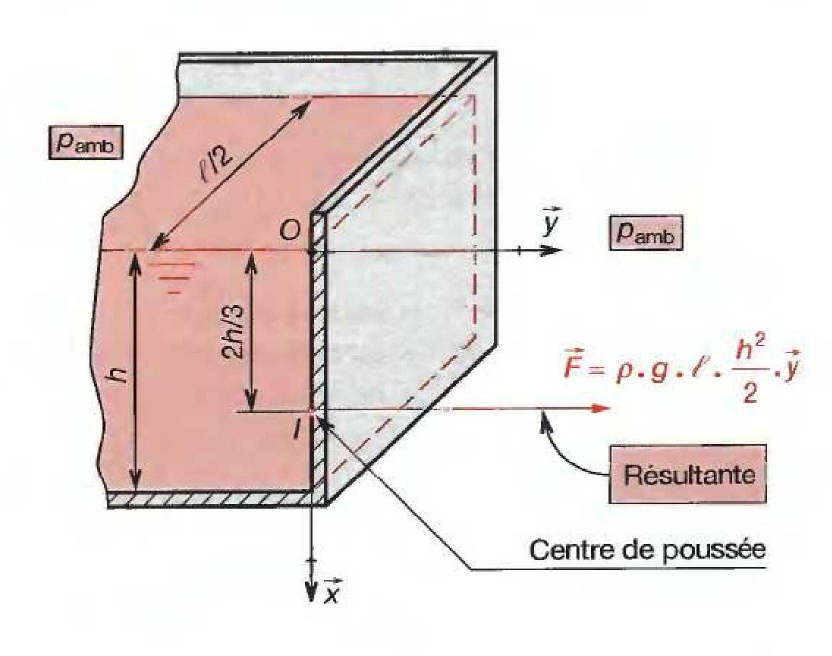
La poussée effective d'un fluide dont la surface est à la même pression que l'extérieur de la paroi (pression ambiante p_{amb}) est modélisable par :

- **une répartition triangulaire des efforts ;**
- **un torseur : {efforts effectifs sur paroi} =** $\left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

avec $\vec{F} = \rho_V \cdot g \cdot \ell \cdot h^2 / 2 \cdot \vec{y}$

$\vec{OI} = \frac{2}{3} \cdot h \cdot \vec{x}$

***I* s'appelle centre de poussée.**



EXEMPLE :

Déterminer la poussée exercée par de l'eau sur la paroi verticale d'une cuve à ciel ouvert.

Largeur de la paroi $\ell = 6$ m ; hauteur d'eau $h = 9$ m.

La résultante $(I, \vec{F})$ est définie par :

$$\vec{OI} = X_I \cdot \vec{x} \text{ avec } X_I = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ m.}$$

On calcule ensuite $\|\vec{F}\|$; $\rho_V = 10^3$ kg / m³ ; $g = 9{,}81$ m / s²

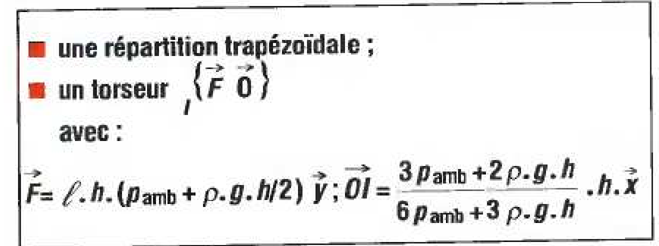
$\ell = 6$ m et $h = 9$ m : $\|\vec{F}\| = 2{,}38 \times 10^6$ N $= 2{,}38$ MN.

L'action de l'eau est donc modélisable par le torseur :

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 2{,}38 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{I\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

16.2 Fluide sous pression sur paroi verticale haute

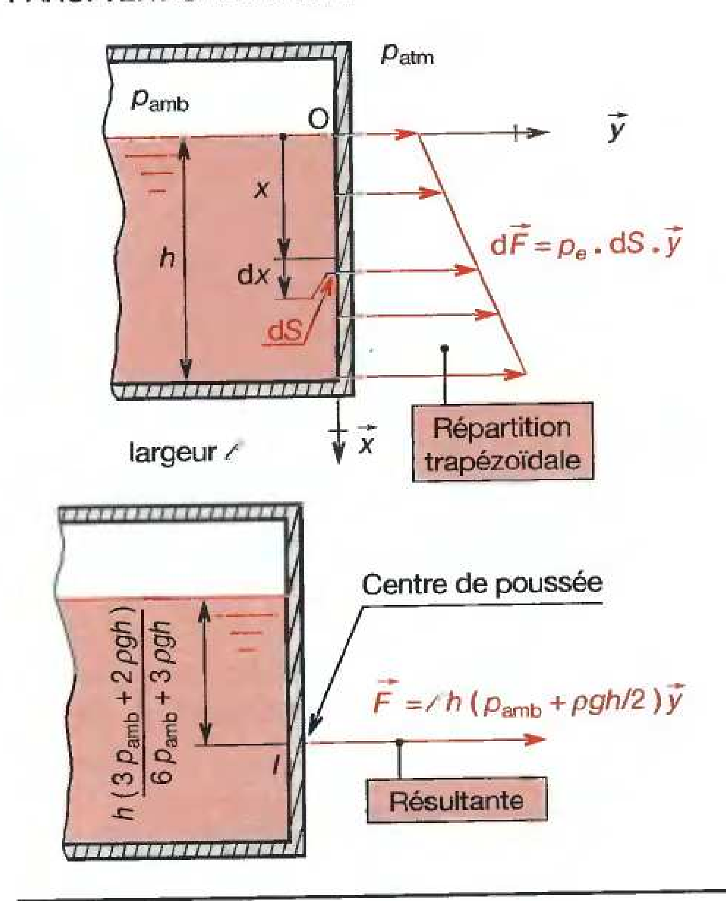
La poussée effective d'un fluide, soumis sur sa surface libre à une pression supérieure à celle qui agit sur l'extérieur de l'enceinte, exerce sur la paroi verticale de cette enceinte, des actions mécaniques modélisables par :



- **une répartition trapézoïdale ;**
- **un torseur** $_{I}\{\vec{F}\ \vec{0}\}$

avec :

$$\vec{F} = \ell.h.(p_{amb} + \rho.g.h/2)\ \vec{y}\ ;\ \vec{OI} = \frac{3\,p_{amb} + 2\,\rho.g.h}{6\,p_{amb} + 3\,\rho.g.h}\ .h.\vec{x}$$



APPLICATION :

Soit à déterminer la poussée exercée par l'eau sur une paroi de cuve close.

Sur la surface de l'eau, un gaz comprimé exerce une pression $p_{amb} = 5$ bar.

Calculer la poussée de l'eau sur la paroi et définir la position du centre de poussée I.

SOLUTION :

Il suffit d'effectuer l'application numérique avec :

$\ell = 6$ m ; $h = 9$ m ; $p_{amb} = 5 \times 10^5$ Pa ; $\rho = 10^3$ kg/m^3 ; $g = 9{,}81$ m/s^2.

Il vient :

$F = \vec{F}.\vec{y} = 29{,}4 \times 10^6\,\text{N} = 29{,}4$ MN ; $OI = \vec{OI}.\vec{x} = 4{,}62$ m ;

Soit le torseur en I :

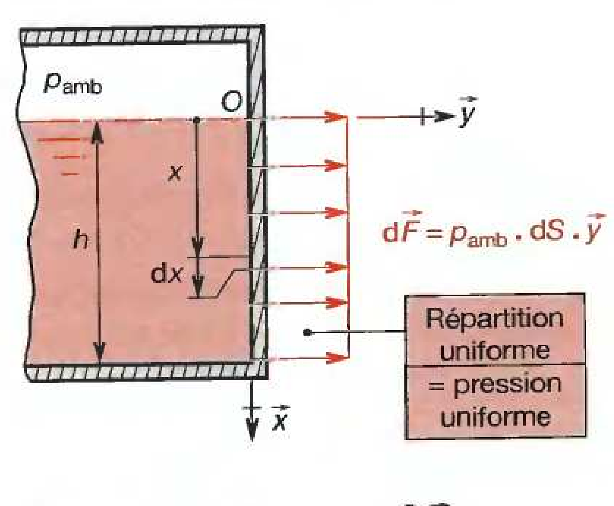
$$_{I}\{F_{eau/paroi}\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2{,}94 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

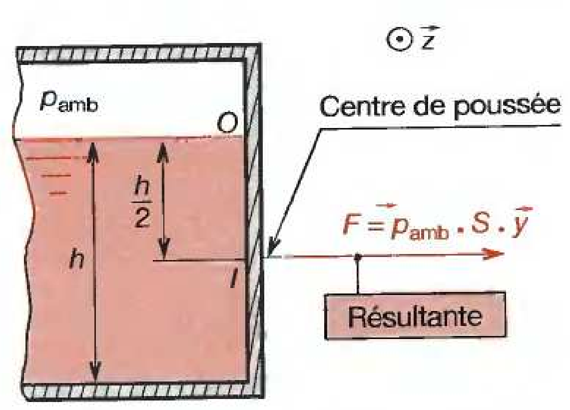
16.3 Fluide sur paroi verticale de faible hauteur

Pour une paroi verticale inférieure à 5 m, on ne commet pas d'erreur importante (< 5 % pour l'eau ou l'huile) en admettant que le fluide exerce des efforts modélisables par :

- **une répartition uniforme ;**
- **un torseur** $_{I}\{\vec{F}\ \vec{0}\}$ **où** $\left[\begin{array}{l}\vec{F} = p_{amb}\ .\ S\ .\ \vec{y} \\ \vec{OI} = h\,/\,2\ .\ \vec{x}\end{array}\right.$

S représente la surface mouillée et h, sa hauteur.





16.4 Poussée sur une surface quelconque

La force F, engendrée dans une direction donnée par une pression p agissant sur une surface, est égale au produit de cette pression par la valeur de la surface projetée sur un plan perpendiculaire à cette direction.

$F = p \cdot S$ avec p (MPa) S (mm^2) F (N)

EXEMPLE 1 : Poussée sur une tige de vérin

- Données : $\varnothing d = 50$ mm ; $p = 5$ bars $= 0{,}5$ N/mm^2.
- Calculs :

Force axiale sur le piston lié à la tige : $F = p \cdot S$.
Avec $p = 0{,}5$ N/mm^2, $S = \pi \times 25^2$ mm^2, on calcule :

$$F = 982 \text{ N}.$$

Le torseur associé à cette poussée s'écrit :

$$_I\{F_{\text{fluide/tige}}\} = {}_I\begin{Bmatrix} +982 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

EXEMPLE 2 : Poussée sur un piston oblique

- Données : Formes du piston et valeurs des surfaces projetées sur les plans perpendiculaires aux axes $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{z})$.
- Problème : Calculer la résultante des efforts exercés par le gaz sur le piston sachant que la pression effective vaut :

$$p = 6{,}1 \text{ MPa}.$$

- Solution :

La force exercée par le gaz sur le piston vaut :

Selon $(O, \vec{x})$:

$$X_F = p \cdot S_x \quad \text{avec} \quad p = 6{,}1 \text{ N/mm}^2$$
$$S_x = 4{,}86 \times 10^2 \text{ mm}^2.$$

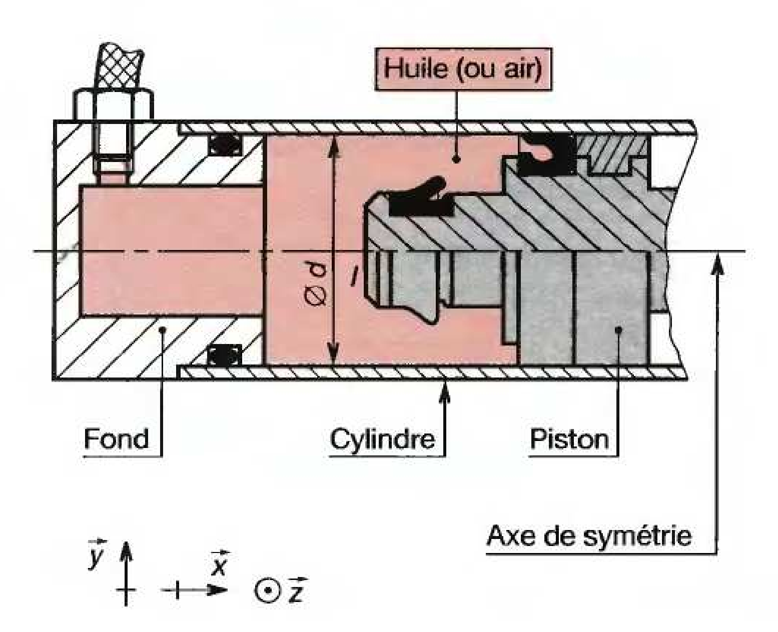
Donc $X_F = 2\,965$ N (soit $X_F \approx 2{,}97$ kN).

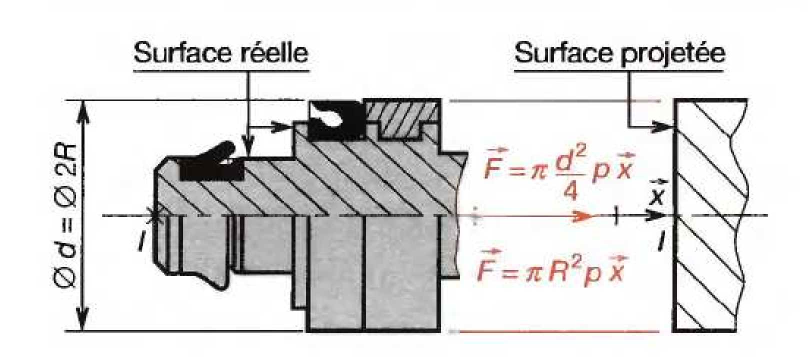
selon $(O, \vec{z})$:

$$Z_F = p \cdot S_z \quad \text{avec} \quad p = 6{,}1 \text{ N/mm}^2$$
$$S_z = 503 \text{ mm}^2.$$

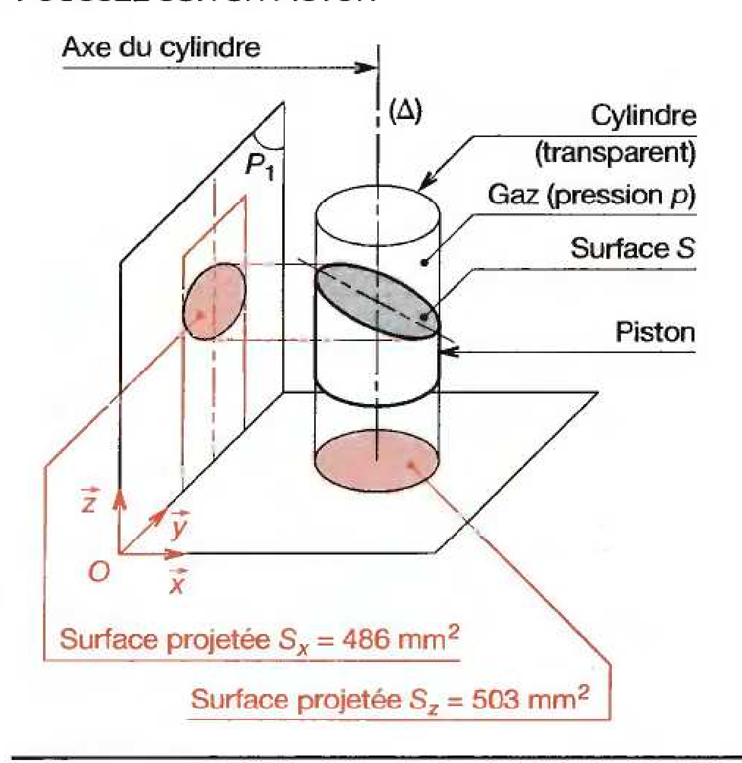
Donc $Z_F = 3\,068$ N (soit $Z_F \approx 3{,}07$ kN).

POUSSEE SUR UNE TIGE DE VÉRIN





POUSSÉE SUR UN PISTON



17 Action de la pression ambiante

La pression ambiante, P_{amb}, engendre des efforts sur toutes les surfaces de corps qu'elle baigne.

On peut les représenter par des forces uniformément réparties, perpendiculaires à ces surfaces. Deux cas se présentent :

La pression ambiante agit tout autour du corps	La pression ambiante n'agit pas tout autour du corps
Le torseur représentant l'effort résultant est nul : il n'est pas indispensable de recenser ces forces. EXEMPLE : ■ **Solides en contact par des surfaces rugueuses : l'air passe entre les deux solides (§ 6.4).** ■ **Solides reposant sur un fluide (§ 64.5).**	**Le torseur représentant l'effort résultant n'est pas nul : il faut tenir compte de cette pression ambiante.** EXEMPLE : ■ **Solides en contact par des surfaces «miroir» entre lesquelles on a chassé toute trace d'air (cales-étalon).** ■ **Clapets, pistons et autres dispositifs hydrauliques.**

EXEMPLE 1 : cales-étalon

Après avoir chassé l'air d'entre les deux surfaces miroirs en contact, la pression atmosphérique n'agit plus que sur la face extérieure. Pour séparer les deux pièces par arrachement, il faut exercer un effort F :

$$F > F_p$$

EXEMPLE 2 : tube dentifrice

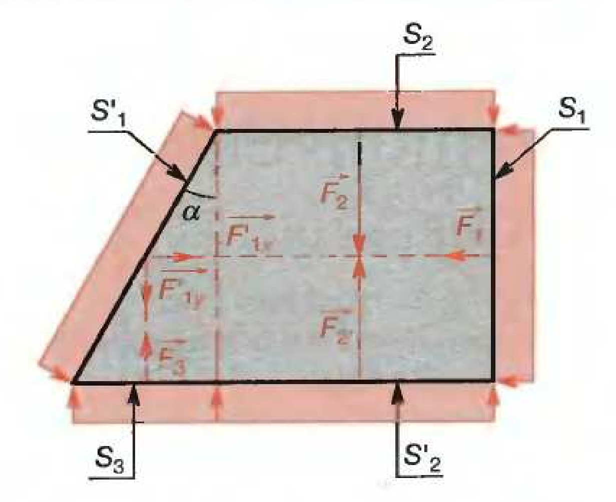
Phase 1 : en réduisant le volume par déformation de l'embout, la pâte dentifrice ne peut que sortir.

Phase 2 : en relachant l'embout, celui-ci reprend sa forme initiale, augmentant le volume interne, ce qui crée une dépression. La pression atmosphérique qui engendre sur le piston une force F' déplace alors celui-ci vers le haut du tube tandis que la pâte, trop visqueuse, se comporte comme un bouchon.

REMARQUE :

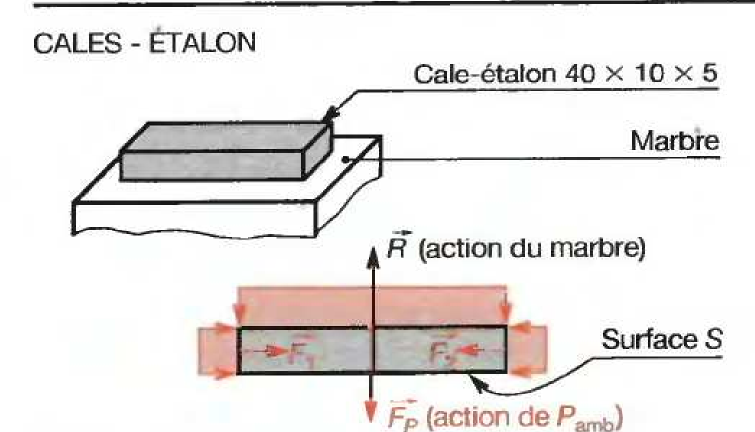
Lors d'un isolement de corps (chapitre 20), il est prudent de réfléchir aux effets de la pression ambiante dès que l'on recense les actions de contact. Les résultats du chapitre 16 s'appliquent intégralement.

CORPS ENTOURÉ PAR LA PRESSION AMBIANTE



$$\left.\begin{aligned} F_1 &= P_{amb} \cdot S_1 \;;\; F'_{1x} = P_{amb} \cdot S'_1 \cdot \cos\alpha = F_1 \\ F_3 &= P_{amb} \cdot S_3 \;;\; F'_{1y} = P_{amb} \cdot S'_1 \cdot \sin\alpha = F_3 \\ F_2 &= P_{amb} \cdot S_2 \;;\; F'_2 = P_{amb} \cdot S'_2 = F_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{0\}$$

CALES - ÉTALON



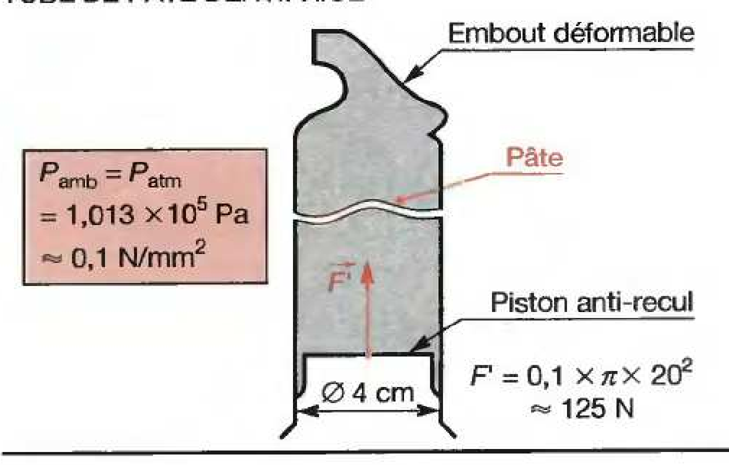
$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

$\|\vec{F_P}\| = P_{amb} \cdot S$

Si $P_{amb} = P_{atm} = 0{,}1$ N/mm² et $S = 4$ cm² : $\|\vec{F_P}\| = 40$ N

N.B : Poids négligeable :
$P \approx 10 \times 7{,}2 \times 0{,}4 \times 0{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}144$ N

TUBE DE PÂTE DENTIFRICE

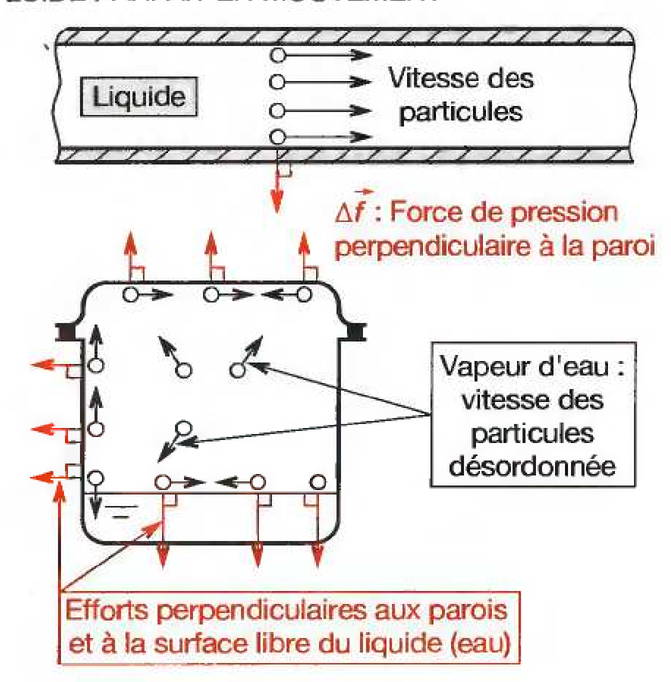


18 Action d'un fluide en mouvement

18.1 Fluide parfait

Ce cas concerne les liquides non visqueux et les gaz.
Le frottement des molécules entre elles et sur les parois peut être négligé : identique à un fluide statique.

Un fluide parfait, en mouvement contre une paroi, exerce des actions mécaniques élémentaires modélisables par des pointeurs perpendiculaires à cette paroi.



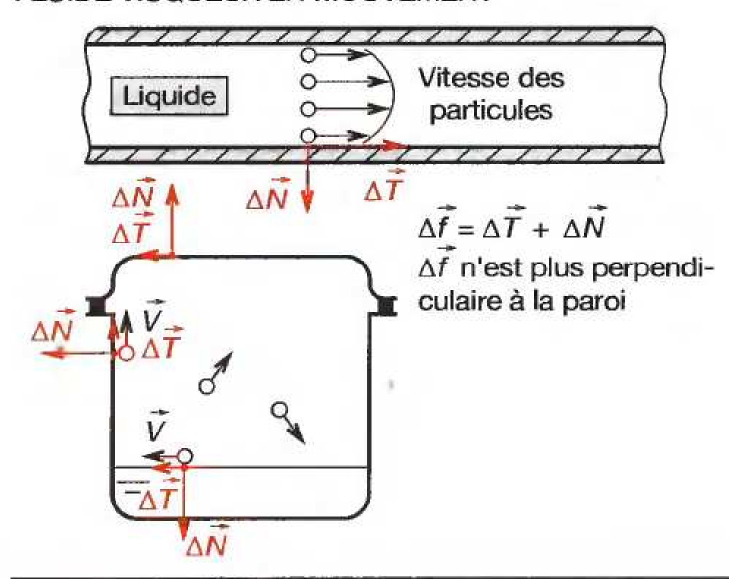
18.2 Fluide visqueux

Chaque particule exerce sur la paroi une action tangentielle proportionnelle à la viscosité, la valeur de la surface de contact, la vitesse (voir § 65.2) et comparable à celle dûe aux frottements entre solides.

Ce frottement s'accompagne donc d'une perte d'énergie (voir chapitre 67 - pertes de charges).

REMARQUE :
Le facteur de frottement entre particules de fluides et avec les parois, est toujours nettement inférieur à celui des solides entre eux.

Un fluide visqueux, en mouvement contre une paroi, exerce contre celle-ci des actions mécaniques élémentaires modélisables par des pointeurs non perpendiculaires à cette paroi.



18.3 Traînée

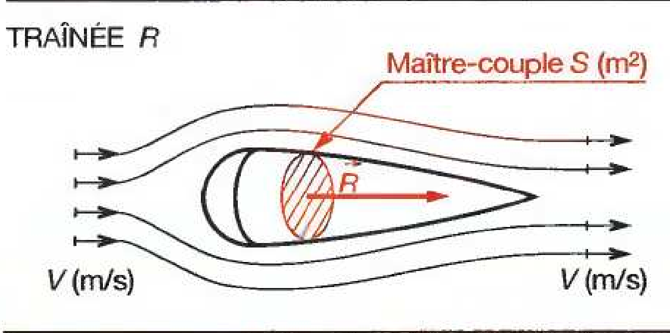
C'est la résultante $\vec{R}$ de l'effort exercé par le fluide sur le corps, en mouvements relatifs :

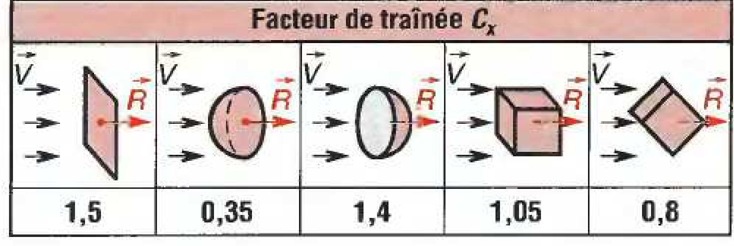
$$R = 0{,}5 \cdot C_x \cdot \rho \cdot S \cdot V^2$$

R : traînée (N) ; C_x : facteur de traînée ;
ρ : masse volumique du fluide (kg/m^3) ;
S : maître couple du corps (m^2) ; V : vitesse relative (m/s).

EXEMPLE :
Un véhicule ($C_x = 0{,}3$; $S = 2{,}4$ m^2) se déplaçant dans l'air ($\rho = 1{,}22$ kg/m^3) à 90 km/h subit :

$$R = 0{,}5 \times 0{,}3 \times 1{,}22 \times 2{,}4 \times \left(\frac{90}{3{,}6}\right)^2 = 274\text{N}$$





Facteur de traînée C_x				
1,5	0,35	1,4	1,05	0,8

19 Notions de théorie des mécanismes

19■1 Définitions

■ **Mécanisme**

C'est un assemblage d'éléments capables de transformer l'énergie mécanique (exemples : systèmes bielle-manivelle, vis-écrou, réducteur, etc.). Un mécanisme possède au moins une entrée où l'on applique l'action motrice, et, au moins, une sortie réceptrice.

■ **Loi entrée-sortie**

Il s'agit d'une relation entre les variables (ou paramètres) d'entrée et de sortie.

■ **Graphe fonctionnel ou graphe de structure**

Il représente schématiquement le mécanisme.

Chaque sous-ensemble de solides «sans mouvement relatif» apparaît sous un seul repère (voir chapitre 20).
Le trait continu qui les relie, représente une liaison.

Le graphe de structure permet de distinguer les boucles de la chaîne cinématique (§ 5.33).

■ **Mobilités utiles**

Elles justifient le mécanisme. Par exemple, dans une automobile, la translation du piston entraîne la rotation de la roue après embrayage ; le déplacement du levier de vitesse engendre celui d'un baladeur situé dans la boîte de vitesse ; la rotation du volant permet d'orienter les roues, etc.
Posons m_u le nombre des mobilités utiles.

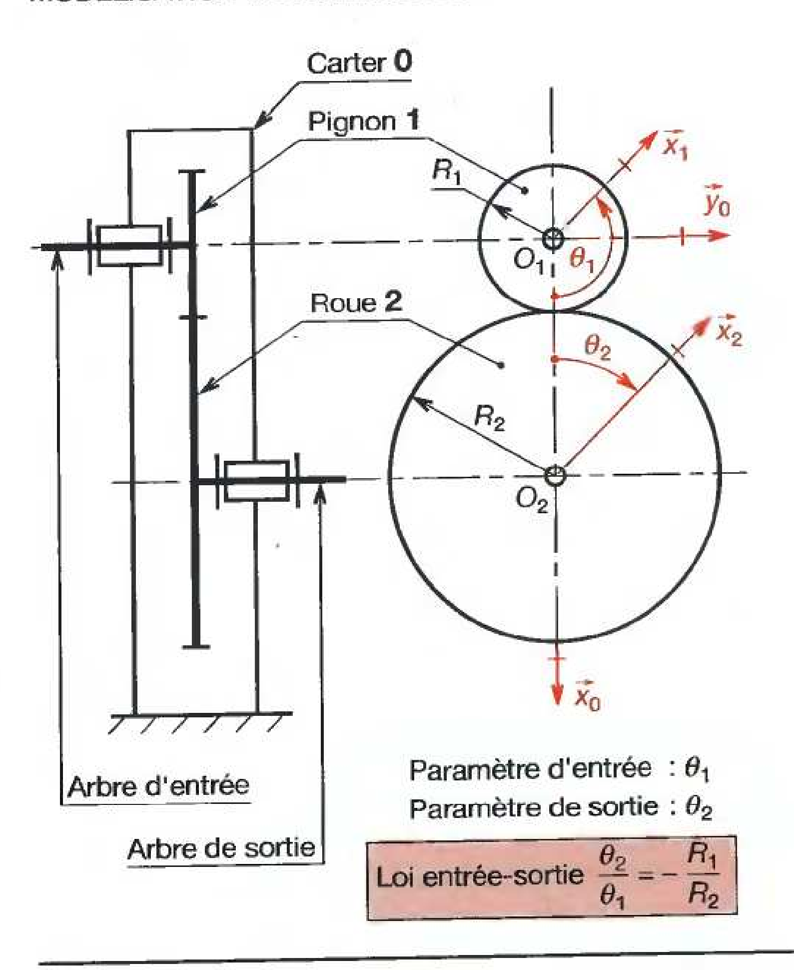
■ **Mobilités internes**

Elles n'interviennent pas dans le fonctionnement du mécanisme. Par exemple, l'axe du piston le reliant à la bielle peut tourner sur lui-même, tout comme une barre de direction articulée entre deux rotules ou le pommeau des leviers de vitesses sur son levier, ...
Posons m_i le nombre de mobilités internes.

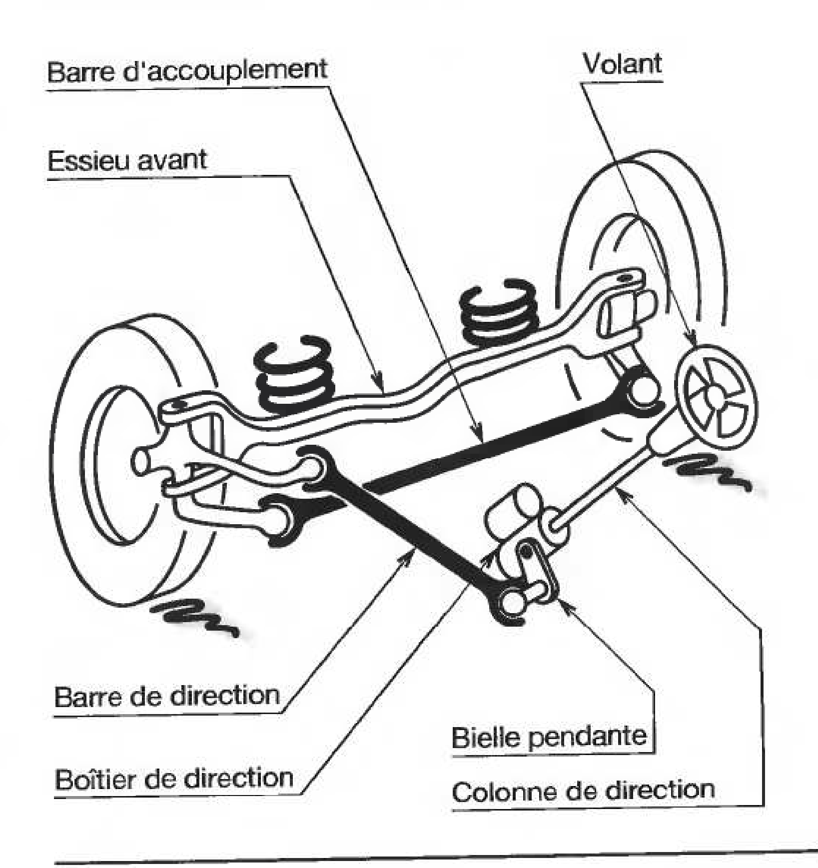
■ **Isostatisme et hyperstatisme**

Lorsqu'on peut déterminer les actions mécaniques à l'aide des seules équations de la statique, on dit que le système est **isostatique** ; sinon on le dit **hyperstatique**.

MODÉLISATION D'UN RÉDUCTEUR



CROQUIS D'UN SYSTÈME DE DIRECTION



19■2 Modèles normalisés des liaisons

Pour chaque liaison modélisée (chapitres 4 à 12) :

- on considère les mouvements possibles (torseur cinématique) :

n_c : nombre d'inconnues cinématiques **e : nombre de degrés de liberté**	**Pour une liaison** **$n_c = e$**

- on considère les actions mécaniques transmissibles (torseur des efforts transmissibles) :

n_s : nombre d'inconnues statiques de liaisons	**Pour une liaison** **$n_c + n_s = 6$**

REMARQUES :

- La modélisation suppose que les jeux, frottements, masses et déformations restent négligeables.
- Les efforts dynamiques doivent pouvoir être négligés.
- Une liaison réelle peut recevoir plusieurs modélisations.

19■3 Degré d'hyperstatisme

Pour un mécanisme comprenant avec le bâti n sous-ensembles, l'isolement de chacun, excepté le bâti, conduit à $6\ (n-1)$ équations.

L'ensemble des mobilités procure m_u relations indépendantes et m_i relations non significatives (du genre $0 = 0$).

- Pour un mécanisme isostatique : $6\,(n-1) - m_u - m_i = \Sigma n_s$
- Pour un mécanisme hyperstatique : $6\,(n-1) - m_u - m_i = \Sigma n_s - h$

h représente le degré d'hyperstatisme :

$$h = m_u + m_i + \Sigma n_s - 6\,(n-1)$$

19■4 Étude cinématique

Pour chaque boucle fermée indépendante du graphe de structure, on peut écrire une relation cinématique telle $\overrightarrow{V_{A \in i/j}} = \vec{0}$.

Celà procure 6 relations algébriques, dans l'espace.

Compte tenu des mobilités m, on peut écrire :

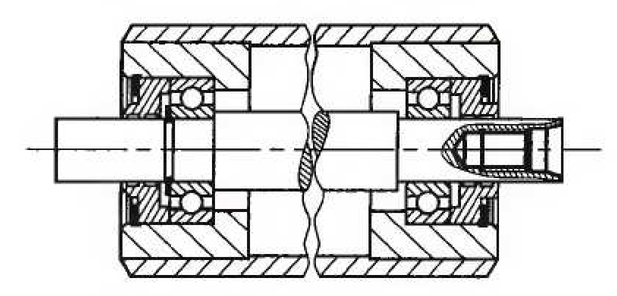
- pour un mécanisme isostatique : $n_c - 6 = m$
- pour un mécanisme hyperstatique : $n_c - 6 = m - h$

$$h = m - n_c + 6 \quad \textbf{(boucle par boucle)}$$

19■5 Nombre cyclomatique γ

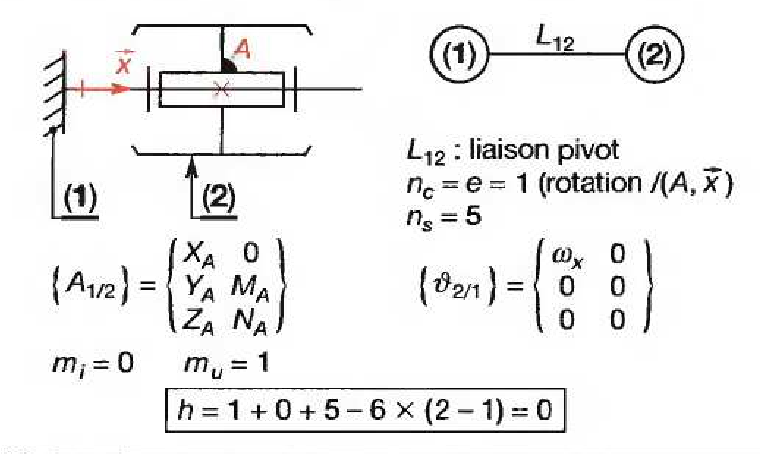
Il indique le nombre de boucles fermées indépendantes dans ℓ liaisons : $\gamma = \ell - n + 1$

MODÉLISATIONS SELON LES HYPOTHÈSES



Rouleaux embarreurs SNR

MODÉLISATION GLOBALE



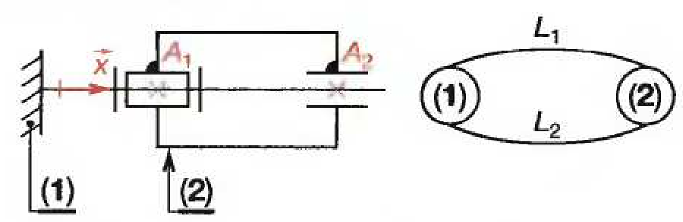
L_{12} : liaison pivot
$n_c = e = 1$ (rotation $/(A, \vec{x})$)
$n_s = 5$

$$\{A_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix} \qquad \{\vartheta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$m_i = 0 \qquad m_u = 1$

$$h = 1 + 0 + 5 - 6 \times (2-1) = 0$$

MODÉLISATION 1



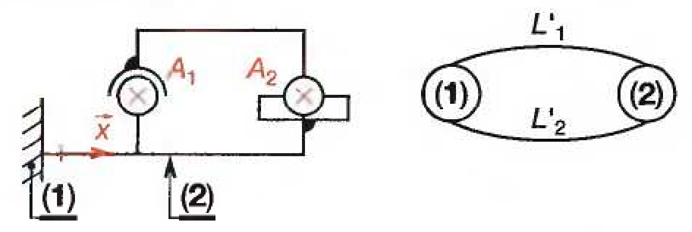
Les deux roulements contrarient la libre déformation de l'arbre (1).
L_1 : pivot ($n_s = 5$) L_2 : pivot glissant ($n_s = 4$)

$$h = 1 + (5 + 4) - 6 \times (2 - 1) = 4$$

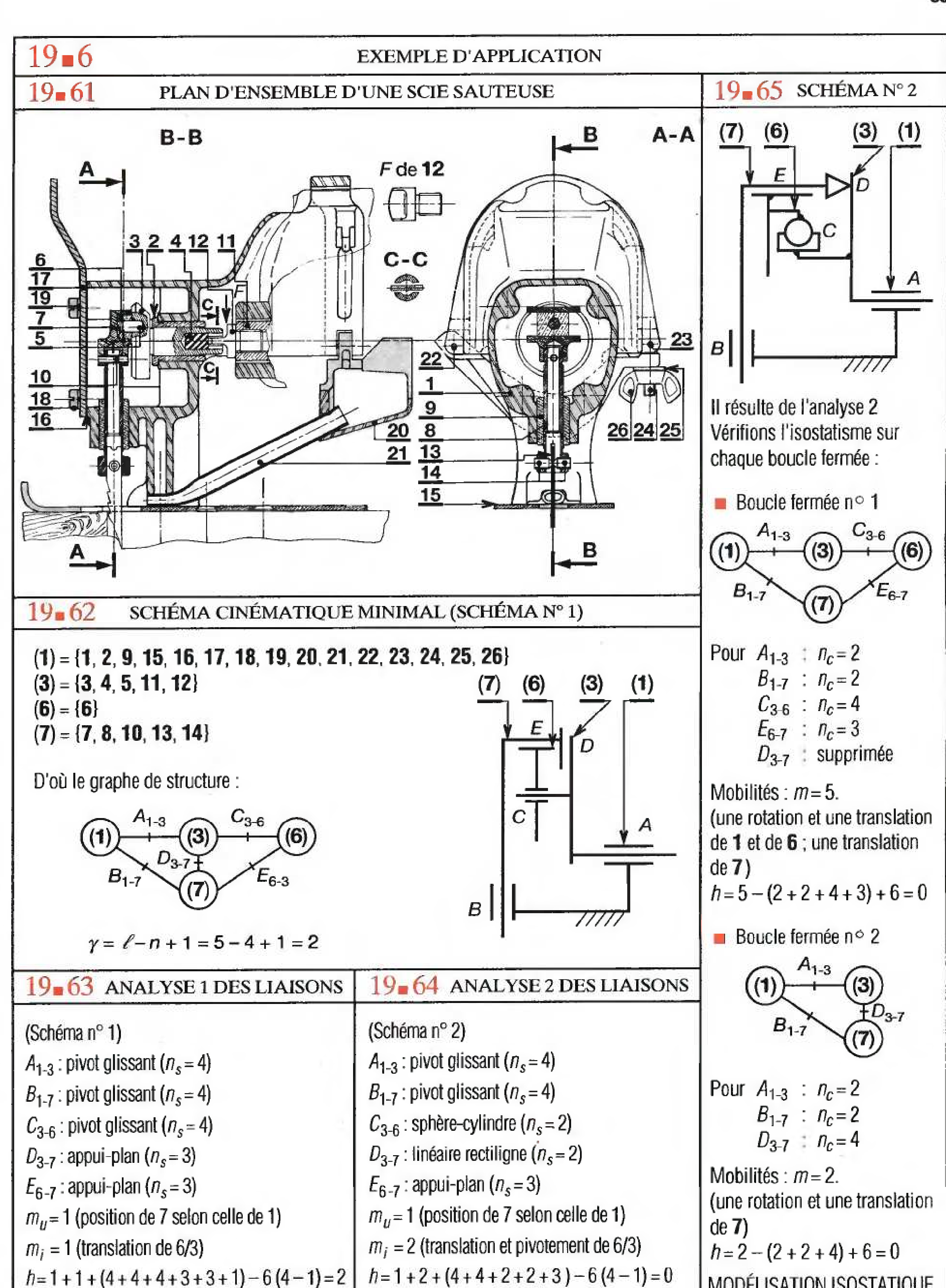
Dans deux plans perpendiculaires se coupant selon $A_1\ A_2$, il faut vérifier :

- le parallélisme des axes de roulements,
- leur alignement (coaxialité).

MODÉLISATION 2



Les deux roulements tolèrent la libre déformation de l'arbre (1). On obtient $h = 0$.



19.6 EXEMPLE D'APPLICATION

19.61 PLAN D'ENSEMBLE D'UNE SCIE SAUTEUSE

19.62 SCHÉMA CINÉMATIQUE MINIMAL (SCHÉMA N° 1)

(1) = {**1**, **2**, **9**, **15**, **16**, **17**, **18**, **19**, **20**, **21**, **22**, **23**, **24**, **25**, **26**}
(3) = {**3**, **4**, **5**, **11**, **12**}
(6) = {**6**}
(7) = {**7**, **8**, **10**, **13**, **14**}

D'où le graphe de structure :

(1) —$A_{1\text{-}3}$— (3) —$C_{3\text{-}6}$— (6) ; (1) —$B_{1\text{-}7}$— (7) ; (3) —$D_{3\text{-}7}$— (7) ; (6) —$E_{6\text{-}3}$— (7)

$\gamma = \ell - n + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$

19.63 ANALYSE 1 DES LIAISONS

(Schéma n° 1)

$A_{1\text{-}3}$: pivot glissant ($n_s = 4$)
$B_{1\text{-}7}$: pivot glissant ($n_s = 4$)
$C_{3\text{-}6}$: pivot glissant ($n_s = 4$)
$D_{3\text{-}7}$: appui-plan ($n_s = 3$)
$E_{6\text{-}7}$: appui-plan ($n_s = 3$)
$m_u = 1$ (position de 7 selon celle de 1)
$m_i = 1$ (translation de 6/3)
$h = 1 + 1 + (4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 1) - 6\,(4 - 1) = 2$

19.64 ANALYSE 2 DES LIAISONS

(Schéma n° 2)

$A_{1\text{-}3}$: pivot glissant ($n_s = 4$)
$B_{1\text{-}7}$: pivot glissant ($n_s = 4$)
$C_{3\text{-}6}$: sphère-cylindre ($n_s = 2$)
$D_{3\text{-}7}$: linéaire rectiligne ($n_s = 2$)
$E_{6\text{-}7}$: appui-plan ($n_s = 3$)
$m_u = 1$ (position de 7 selon celle de 1)
$m_i = 2$ (translation et pivotement de 6/3)
$h = 1 + 2 + (4 + 4 + 2 + 2 + 3) - 6\,(4 - 1) = 0$

19.65 SCHÉMA N° 2

Il résulte de l'analyse 2
Vérifions l'isostatisme sur chaque boucle fermée :

- **Boucle fermée n° 1**

(1) —$A_{1\text{-}3}$— (3) —$C_{3\text{-}6}$— (6) ; (1) —$B_{1\text{-}7}$— (7) —$E_{6\text{-}7}$— (6)

Pour $A_{1\text{-}3}$: $n_c = 2$
$B_{1\text{-}7}$: $n_c = 2$
$C_{3\text{-}6}$: $n_c = 4$
$E_{6\text{-}7}$: $n_c = 3$
$D_{3\text{-}7}$: supprimée

Mobilités : $m = 5$.
(une rotation et une translation de **1** et de **6** ; une translation de **7**)
$h = 5 - (2 + 2 + 4 + 3) + 6 = 0$

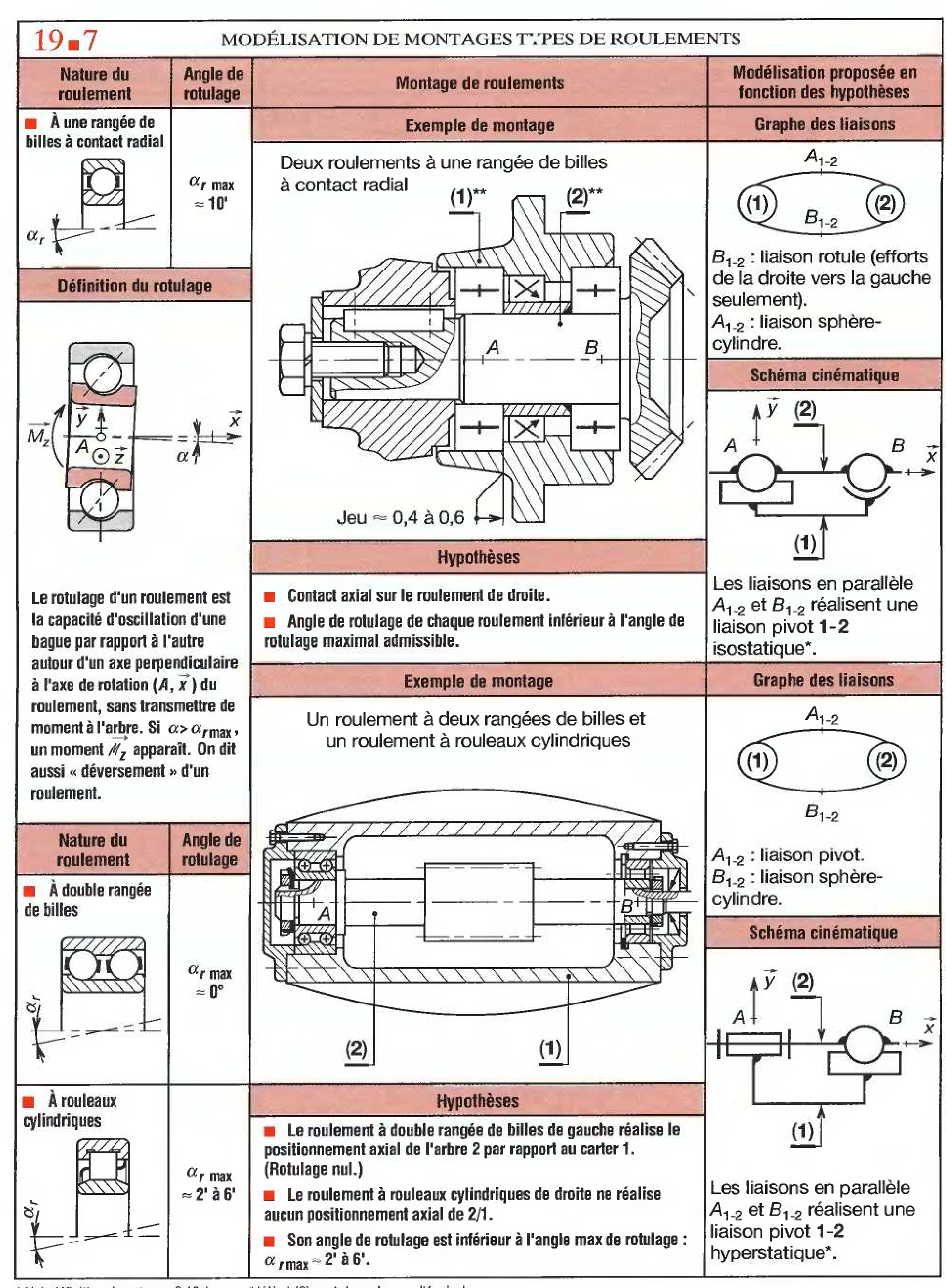
- **Boucle fermée n° 2**

(1) —$A_{1\text{-}3}$— (3) —$D_{3\text{-}7}$— (7) ; (1) —$B_{1\text{-}7}$— (7)

Pour $A_{1\text{-}3}$: $n_c = 2$
$B_{1\text{-}7}$: $n_c = 2$
$D_{3\text{-}7}$: $n_c = 4$

Mobilités : $m = 2$.
(une rotation et une translation de **7**)
$h = 2 - (2 + 2 + 4) + 6 = 0$

MODÉLISATION ISOSTATIQUE



19.7 MODÉLISATION DE MONTAGES TYPES DE ROULEMENTS

Nature du roulement	Angle de rotulage	Montage de roulements	Modélisation proposée en fonction des hypothèses
■ À une rangée de billes à contact radial	$\alpha_{r\,max} \approx 10'$	**Exemple de montage** Deux roulements à une rangée de billes à contact radial	**Graphe des liaisons** B_{1-2} : liaison rotule (efforts de la droite vers la gauche seulement). A_{1-2} : liaison sphère-cylindre.
Définition du rotulage Le rotulage d'un roulement est la capacité d'oscillation d'une bague par rapport à l'autre autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation $(A, \vec{x})$ du roulement, sans transmettre de moment à l'arbre. Si $\alpha > \alpha_{r\,max}$, un moment $\vec{M_z}$ apparaît. On dit aussi « déversement » d'un roulement.		**Hypothèses** ■ Contact axial sur le roulement de droite. ■ Angle de rotulage de chaque roulement inférieur à l'angle de rotulage maximal admissible.	**Schéma cinématique** Les liaisons en parallèle A_{1-2} et B_{1-2} réalisent une liaison pivot **1-2** isostatique*.
■ À double rangée de billes	$\alpha_{r\,max} \approx 0°$	**Exemple de montage** Un roulement à deux rangées de billes et un roulement à rouleaux cylindriques	**Graphe des liaisons** A_{1-2} : liaison pivot. B_{1-2} : liaison sphère-cylindre.
■ À rouleaux cylindriques	$\alpha_{r\,max} \approx 2'$ à $6'$	**Hypothèses** ■ Le roulement à double rangée de billes de gauche réalise le positionnement axial de l'arbre 2 par rapport au carter 1. (Rotulage nul.) ■ Le roulement à rouleaux cylindriques de droite ne réalise aucun positionnement axial de 2/1. ■ Son angle de rotulage est inférieur à l'angle max de rotulage : $\alpha_{r\,max} \approx 2'$ à $6'$.	**Schéma cinématique** Les liaisons en parallèle A_{1-2} et B_{1-2} réalisent une liaison pivot **1-2** hyperstatique*.

* Voir définition de ce terme § 19.1. **(1) et (2) sont deux classes d'équivalence.

Nature du roulement	Angle de rotulage	Montage de roulements	Modélisation proposée en fonction des hypothèses
		Exemple de montage*	**Graphe des liaisons**
■ À deux rangées de billes (ou rouleaux) à rotule	À billes $\alpha_{r\,max}$ ≈ 1,5 à 3° À rouleaux $\alpha_{r\,max}$ ≈ 1 à 2,5°	Une butée à rotule et un roulement à deux rangées de rouleaux à rotule Jeu : 0,5	$A_{1\text{-}2}$: liaison rotule (efforts de **1/2** de haut en bas seulement) $B_{1\text{-}2}$: liaison sphère-cylindre.
			Schéma cinématique
■ Butée à rotule sur rouleaux	$\alpha_{r\,max}$ ≈ 2,5 à 3°	**Hypothèses** ■ La butée à rotule assure un centrage de l'arbre 2 par rapport au palier 1 et un positionnement axial de 2/1. ■ Le roulement à rotule assure un centrage de 2/1 et n'assure pas de positionnement axial. ■ L'angle de rotulage est inférieur à 1,5°.	
		Exemple de montage*	**Graphe des liaisons**
■ Butée à billes (ou à aiguilles)	$\alpha_{r\,max}$ ≈ 0°	Deux roulements à rouleaux et une butée à simple effet à rouleaux cylindriques	$A_{1\text{-}2}$: liaison rotule (efforts de **2/1** vers la droite seulement) $B_{1\text{-}2}$: appui-plan (efforts de **2/1** vers la gauche) $C_{1\text{-}2}$: sphère-cylindre
		Hypothèses	**Schéma cinématique**
■ Roulement à rouleaux cylindriques	$\alpha_{r\,max}$ ≈ 2' à 6'	■ Les roulements à rouleaux cylindriques assurent un centrage de 1/2. Celui de droite, en *C*, n'assure pas de positionnement axial. ■ L'angle de rotulage des deux roulements est inférieur à 2' (valeur maximale du rotulage) : roulements rapprochés, bien alignés. ■ La butée à rouleaux assure le positionnement axial de la droite vers la gauche. L'angle de rotulage est nul.	La liaison **1-2** est hyperstatique d'où nécessité de réglages et de tolérances serrées de concentricité des roulements et de perpendicularité arbre-butée à rouleaux

* D'après S.K.F.

20 Isolement d'un système

L'isolement d'un système consiste à :

- considérer une partie d'un mécanisme ou d'un objet,
- recenser toutes les actions mécaniques qui lui sont appliquées.

REMARQUES :

- L'isolement d'un système est une opération indispensable en mécanique ; il intervient en statique, résistance des matériaux, mécaniques des fluides, thermodynamique…
- Le graphe des liaisons apporte une aide précieuse.

EXEMPLE 1 :

Soit à isoler l'ensemble (**6**) du montage § 5.3.

HYPOTHÈSES :

- Étude plane dans $(A, \vec{x}, \vec{y})$.
- L'opérateur exerce un effort $\vec{F}$ normal au levier, d'intensité 100 N et le levier affleure la butée.
- Poids négligeable et pression ambiante tout autour.
- Frottement de facteur μ entre (**6**) et (**1**) seuls.

ANALYSE :

Le graphe de structure montre que la pièce (**6**) est en liaison avec (**9**) et (**1**), outre l'opérateur. On obtient les résultats ci-contre.

EXEMPLE 2 :

Isoler l'ensemble $(E) = \{(\mathbf{6}), (\mathbf{9}), (\mathbf{11})\}$ du montage modélisé au § 5.3.

HYPOTHÈSES :

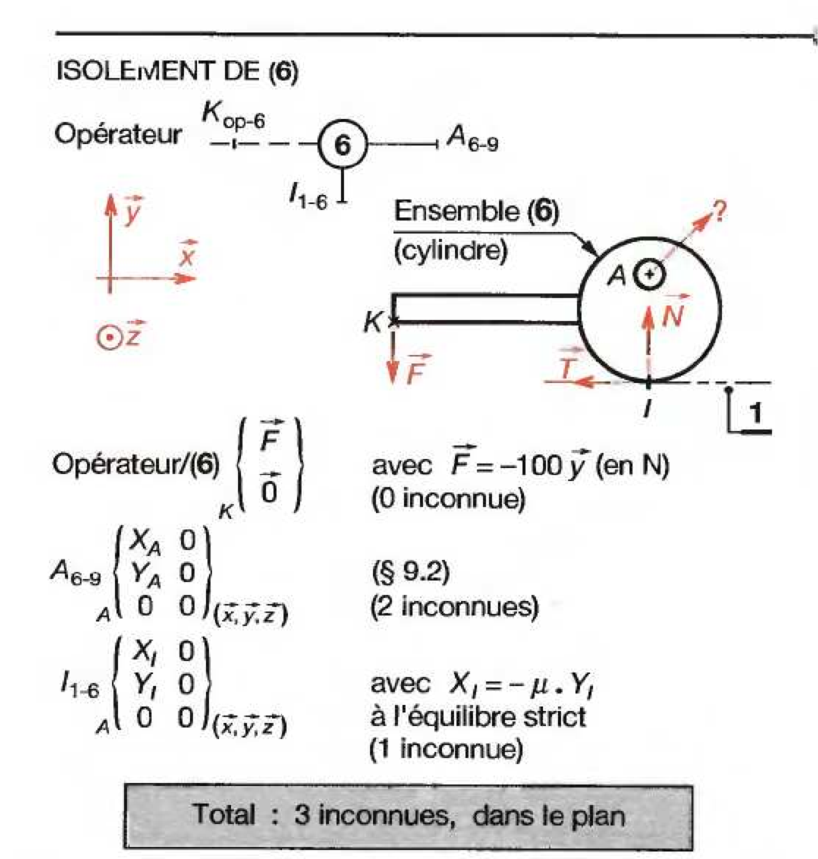
- Étude spatiale dans $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Autres hypothèses ci-dessus + action du ressort négligeable.

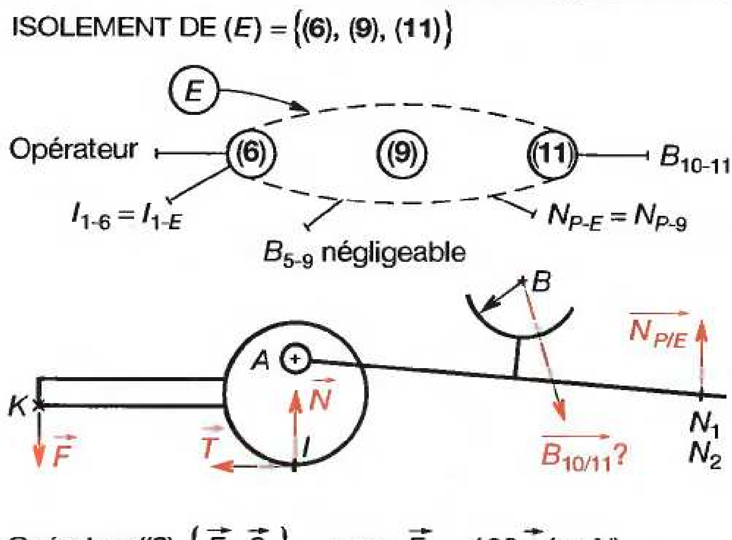
ANALYSE :

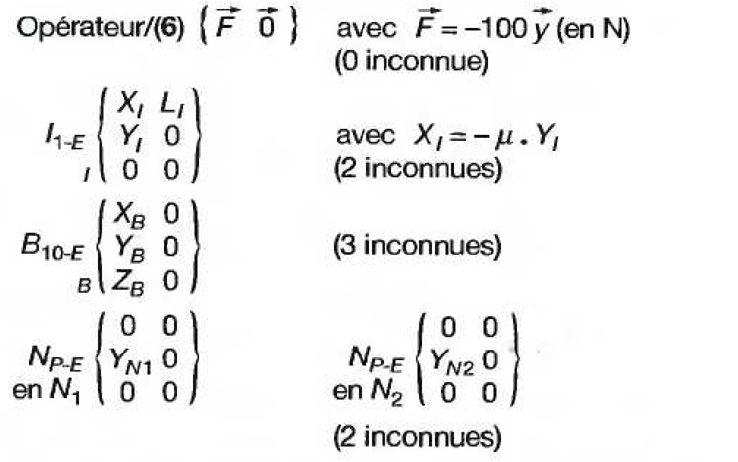
Les résultats ci-contre montrent que cette modélisation conduit à 7 inconnues, donc une de trop pour pouvoir résoudre isostatiquement (voir chapitre 19).

REMARQUES :

- Si le jeu dans le pivot $A_{6\text{-}9}$ reste trop faible : on ne peut à la fois, observer un contact linéaire entre (**6**) et (**1**) et un double appui ponctuel avec la pièce.
Comme ce dernier est nécessaire au fonctionnement, on peut supposer (et admettre) un contact ponctuel $I_{1\text{-}6}$.
- Si le jeu dans le pivot $A_{6\text{-}9}$ est suffisant : on conserve 7 inconnues mais l'isolement de (**6**) seul n'en présente plus que 5 dans l'espace : ensemble résolvable.







Total : 7 inconnues

21 Mouvement d'un solide

21 ■ 1 Position d'un solide dans un repère

Elle est complètement déterminée par :

■ La position d'un point A, origine d'un repère local $(A, \vec{x_S}, \vec{y_S}, \vec{z_S})$ lié au solide (S).

Il suffit alors d'exprimer le pointeur $\overrightarrow{OA}$ par ses coordonnées cartésiennes, fonctions du temps t :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{OA} = x_{(t)}.\vec{x_0} + y_{(t)}.\vec{y_0} + z_{(t)}.\vec{z_0}.$$

■ La position du repère local par rapport au repère de référence $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ à l'aide des trois angles, également fonctions du temps (voir chap. 3.2).

■ Dans le cas d'un mouvement plan sur plan (chap. 28), il suffit de trois paramètres.

REMARQUE :
Toute étude de mouvement nécessite le choix d'un repère de référence – ou référentiel – car la notion de mouvement est relative.

Le passager assis dans l'avion pendant le décollage est immobile par rapport au repère local lié à l'avion et en mouvement par rapport au sol.

21 ■ 2 Trajectoire d'un point

Il s'agit de l'ensemble des positions successives du point lors de son mouvement dans le repère de référence.

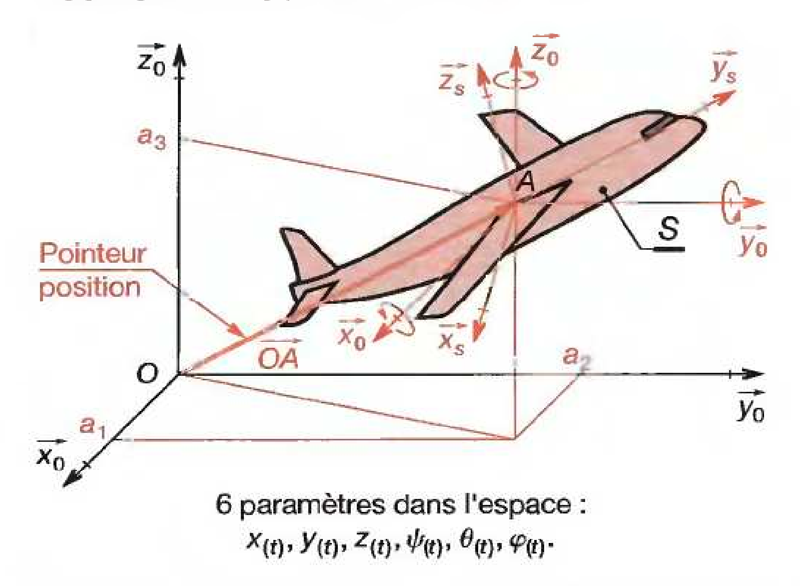
21 ■ 3 Abscisse curviligne Équation horaire

En choisissant une position particulière A_0 du point A sur sa trajectoire et en donnant une orientation à cette trajectoire, on définit l'abscisse curviligne du point A à un autre instant t :

L'abscisse curviligne s du point A est la valeur algébrique $\widehat{A_0A}$ de l'arc de courbe parcouru par A. Elle dépend du temps. $s = \widehat{A_0A} = f_{(t)}$.

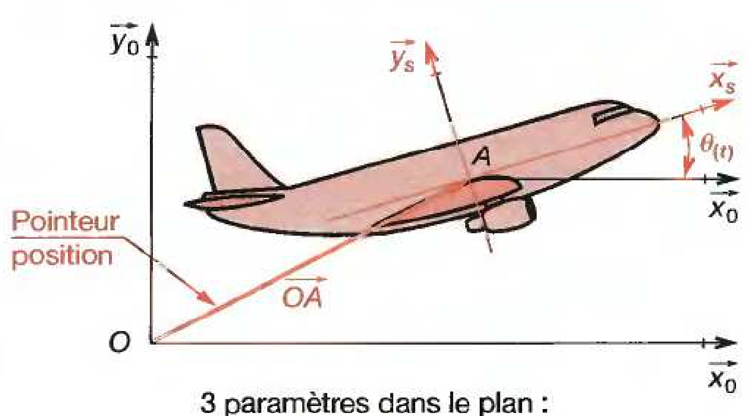
REMARQUE :
$s = f_{(t)}$ s'appelle « **équation horaire** » ou « **équation du mouvement** » de A sur sa trajectoire.

POSITION D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE



6 paramètres dans l'espace :
$x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}, \psi_{(t)}, \theta_{(t)}, \varphi_{(t)}$.

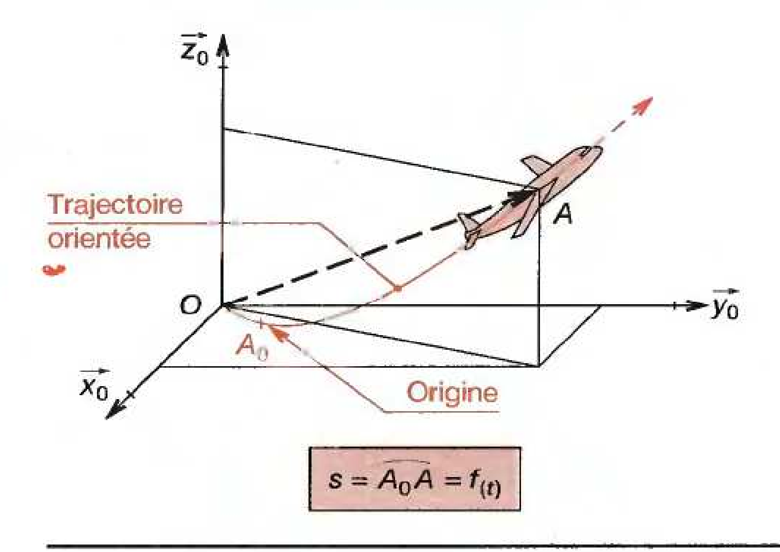
POSITION D'UN SOLIDE DANS LE PLAN



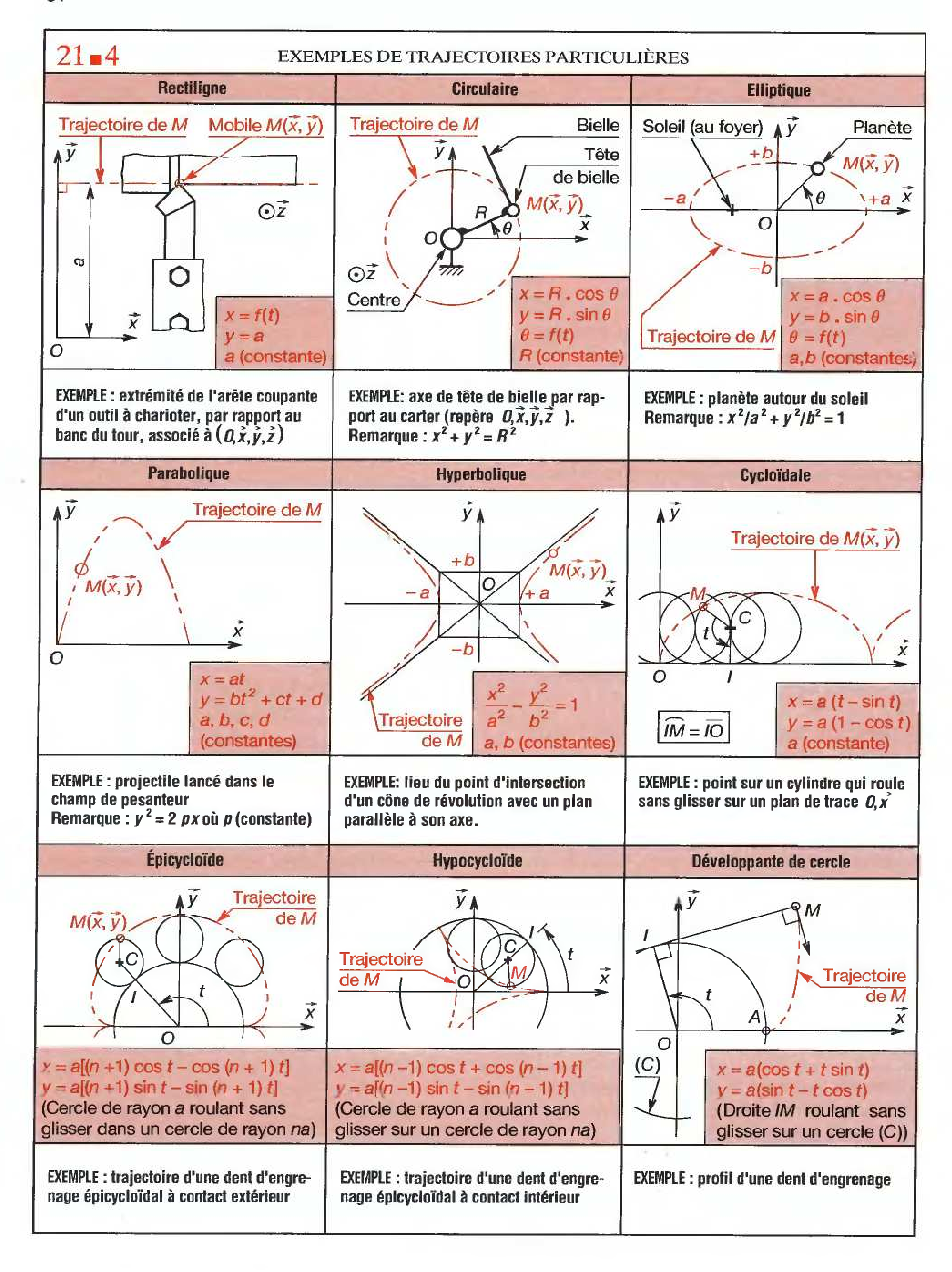
3 paramètres dans le plan :
$x_{(t)}, y_{(t)}, \theta_{(t)}$ tels que :

$$\overrightarrow{OA} = x_{(t)}.\vec{x} + y_{(t)}.\vec{y}$$
$$(\vec{x_0}, \vec{x_S}) = \theta_{(t)}$$

TRAJECTOIRE-ABSCISSE CURVILIGNE



$$s = \widehat{A_0A} = f_{(t)}$$


21.4 EXEMPLES DE TRAJECTOIRES PARTICULIÈRES
Rectiligne
Trajectoire de M
Mobile $M(\vec{x}, \vec{y})$
$x = f(t)$
$y = a$
a (constante)
EXEMPLE : extrémité de l'arête coupante d'un outil à charioter, par rapport au banc du tour, associé à $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Circulaire
Trajectoire de M
Bielle
Tête de bielle
$M(\vec{x}, \vec{y})$
Centre
$x = R \cdot \cos\theta$
$y = R \cdot \sin\theta$
$\theta = f(t)$
R (constante)
EXEMPLE: axe de tête de bielle par rapport au carter (repère $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$).
Remarque : $x^2 + y^2 = R^2$
Elliptique
Soleil (au foyer)
Planète
$M(\vec{x}, \vec{y})$
Trajectoire de M
$x = a \cdot \cos\theta$
$y = b \cdot \sin\theta$
$\theta = f(t)$
a,b (constantes)
EXEMPLE : planète autour du soleil
Remarque : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
Parabolique
Trajectoire de M
$M(\vec{x}, \vec{y})$
$x = at$
$y = bt^2 + ct + d$
a, b, c, d (constantes)
EXEMPLE : projectile lancé dans le champ de pesanteur
Remarque : $y^2 = 2\,px$ où p (constante)
Hyperbolique
$M(\vec{x}, \vec{y})$
Trajectoire de M
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
a, b (constantes)
EXEMPLE: lieu du point d'intersection d'un cône de révolution avec un plan parallèle à son axe.
Cycloïdale
Trajectoire de $M(\vec{x}, \vec{y})$
$\widehat{IM} = \overline{IO}$
$x = a\,(t - \sin t)$
$y = a\,(1 - \cos t)$
a (constante)
EXEMPLE : point sur un cylindre qui roule sans glisser sur un plan de trace $O, \vec{x}$
Épicycloïde
$M(\vec{x}, \vec{y})$
Trajectoire de M
$x = a[(n+1)\cos t - \cos(n+1)t]$
$y = a[(n+1)\sin t - \sin(n+1)t]$
(Cercle de rayon a roulant sans glisser dans un cercle de rayon na)
EXEMPLE : trajectoire d'une dent d'engrenage épicycloïdal à contact extérieur
Hypocycloïde
Trajectoire de M
$x = a[(n-1)\cos t + \cos(n-1)t]$
$y = a[(n-1)\sin t - \sin(n-1)t]$
(Cercle de rayon a roulant sans glisser sur un cercle de rayon na)
EXEMPLE : trajectoire d'une dent d'engrenage épicycloïdal à contact intérieur
Développante de cercle
Trajectoire de M
(C)
$x = a(\cos t + t\sin t)$
$y = a(\sin t - t\cos t)$
(Droite IM roulant sans glisser sur un cercle (C))
EXEMPLE : profil d'une dent d'engrenage

21 ■ 5 Vitesse d'un point

21 ■ 51 Vitesse moyenne v_{moy}

Si, à l'instant $t_1(s)$, le mobile A est en A_1 à l'abscisse s_1, si, à l'instant t_2, il passe en A_2 à l'abscisse s_2, alors, entre t_1 et t_2, sa vitesse moyenne se calcule par :

$$v_{moy} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

v_{moy} = vitesse moyenne (m/s ou m . s^{-1}).
$s_2 - s_1$ = variation de l'abscisse curviligne (m).
$t_2 - t_1$ = variation du temps (s).

21 ■ 52 Vitesse algébrique (ou instantanée) v

À un instant t quelconque : $s = \widehat{A_0A} = f(t)$.

À un instant voisin $t + \Delta t$, le mobile A occupera une nouvelle abscisse curviligne : $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$.

Vitesse moyenne sur cet intervalle de temps :

$$v_{moy} = \frac{s + \Delta s - s}{t + \Delta t - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Lorsque $\Delta t \to 0$, $\Delta s \to 0$ et $v_{moy} \to s'_{(t)} = \frac{ds}{dt}$

$v = s'_{(t)}$	$v = \frac{ds}{dt}$

$s'_{(t)} = ds/dt$: dérivée de $s_{(t)}$ par rapport à t.

21 ■ 53 Vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A/\mathcal{R}0}}$

À l'instant t, le mobile est en A, défini par $\overrightarrow{OA}$.

À l'instant $t + \Delta t$, il vient en A' défini par $\overrightarrow{OA'}$.

On pose : $\overrightarrow{V_{A/\mathcal{R}0}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{(t + \Delta t) - t}$

Comme $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \Delta(\overrightarrow{OA})$, il vient :

$$\overrightarrow{V_{A/\mathcal{R}0}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \overrightarrow{OA}}{\Delta t}\right) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right)_{\mathcal{R}0} \quad \begin{array}{l} v_x = dx_{(t)}/dt \\ v_y = dy_{(t)}/dt \\ v_z = dy_{(t)}/dt \end{array}$$

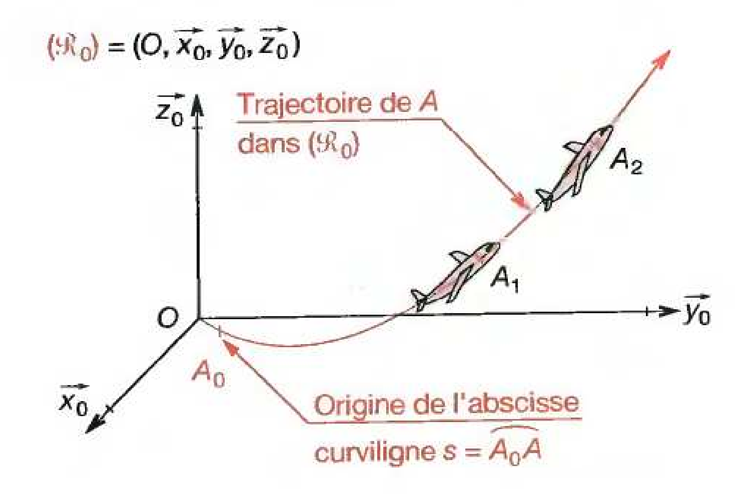
■ Lorsque $\Delta t \to 0$, A' se rapproche de A et $\overrightarrow{AA'}$ se rapproche de la direction du vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent en A à la trajectoire. En notant $ds = \overrightarrow{AA'}$ et d $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AA'}$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{ds}\right)_{\mathcal{R}0} = \vec{\tau}$$

■ $\overrightarrow{V_{A/\mathcal{R}0}} = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right)_{\mathcal{R}0} = \left(\frac{d}{ds}\overrightarrow{OA}\right)_{\mathcal{R}0} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot v.$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens de mouvement.

VITESSES MOYENNE ET ALGÉBRIQUE

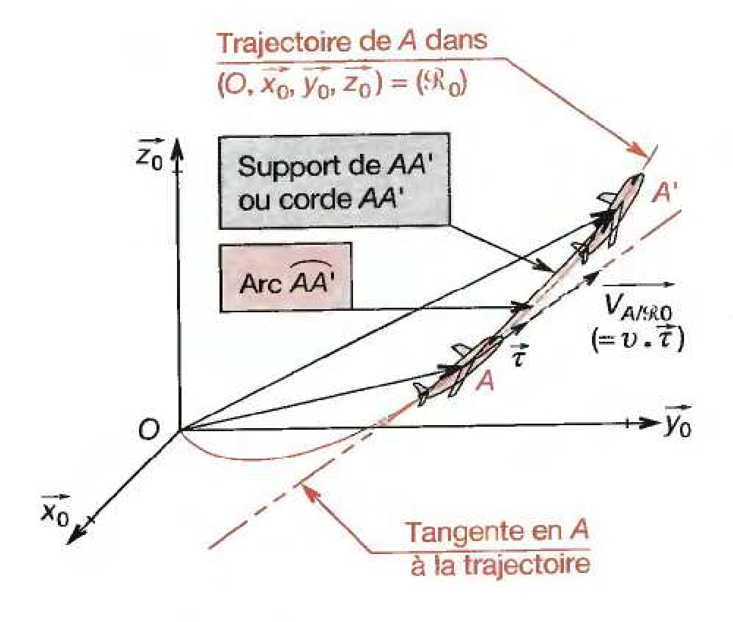


Exemple : $s = 5t^2 - 8$ (s en mètre, t en seconde).
On peut calculer $s'(t) = 10\,t$.

Entre $t = 2$ et $t = 3$ s : $v_{moy} = \frac{37 - 12}{3 - 2} = 25$ m/s.

t (s)	0	1	2	3	4	5
s (m)	−8	−3	12	37	72	117
s' (m/s)	0	10	20	30	40	50

VECTEUR VITESSE (en un point, dans un repère $(\mathcal{R}_0)$)



$$\overrightarrow{V_{A/\mathcal{R}0}} = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right)_{(\mathcal{R}0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} = v \cdot \vec{\tau}$$

21 ▪ 54 Détermination algébrique de la vitesse

La trajectoire d'un point M étant connue, il suffit d'indiquer son abscisse curviligne pour pouvoir calculer sa position à tout instant.

EXEMPLE 1 :

On donne $s = 7 \cos(10\,\pi\,t) + 120$.

On en déduit $s'_{(t)} = v = -70\,\pi \sin(10\,\pi\,t)$.

EXEMPLE 2 :

Si $s_{(t)} = 20\,t^3 - 8\,t^2 + 10$, avec s en (m) et t en (s).

Alors :

$v = s'_{(t)} = 60\,t^2 - 16\,t$ et $s_{(0)} = 10$ m, $v_{(0)} = 0$ m/s ;

$s_{(1)} = 20 - 8 + 10 = 22$ m ; $v_{(1)} = 60 - 16 = 44$ m/s, etc.

21 ▪ 55 Détermination vectorielle de la vitesse

La position d'un point M est connue dès l'instant que l'on sait exprimer son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère d'origine O.

EXEMPLE (fig. 1) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'H} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} e.\cos\,\theta \\ e.\sin\,\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e.\sin\,\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \end{pmatrix}^*$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} e.\cos\,\theta + R + \ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\theta = \omega\,.\,t$ où ω est une constante, θ dépend de t.

$\overrightarrow{OM}$ est bien une fonction vectorielle du temps t.

Le vecteur vitesse s'en déduit par dérivation par rapport à t :

$$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}0}}\begin{pmatrix} -e.\omega.\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

APPLICATION :

$e = 7$; $\omega = 300$ tr/min $= 10\,\pi$ rad/s ; $R = 20$; $\ell = 100$.

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 7\cos(10\,\pi\,t) + 120 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}0}}\begin{pmatrix} -70\,\pi\sin(10\,\pi\,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

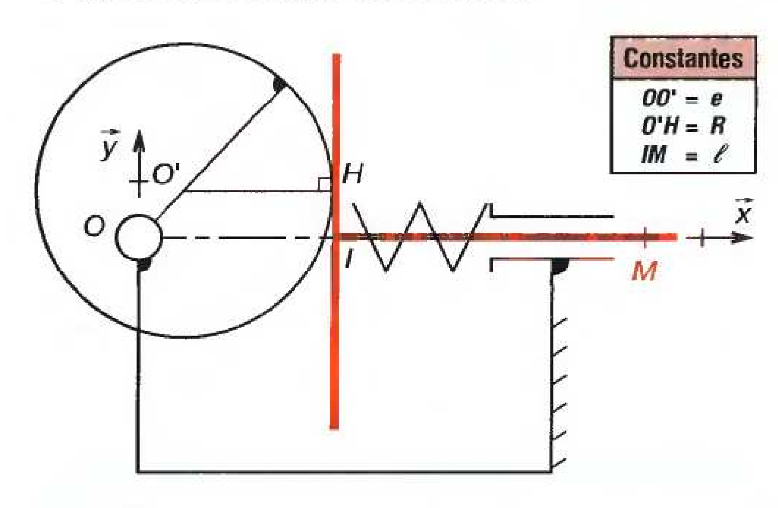
21 ▪ 56 Détermination graphique de la vitesse

Chaque fois que l'on dispose d'une représentation graphique de $s : f(t)$, on peut opérer une dérivation graphique dont la précision dépendra de la qualité du tracé (fig. 2).

- Tracer la tangente en un point A et relever Δs, Δt.
- Porter la valeur de $v = \Delta s / \Delta t$ à l'instant considéré.

* Présentation «pratique» (§ 72.5)

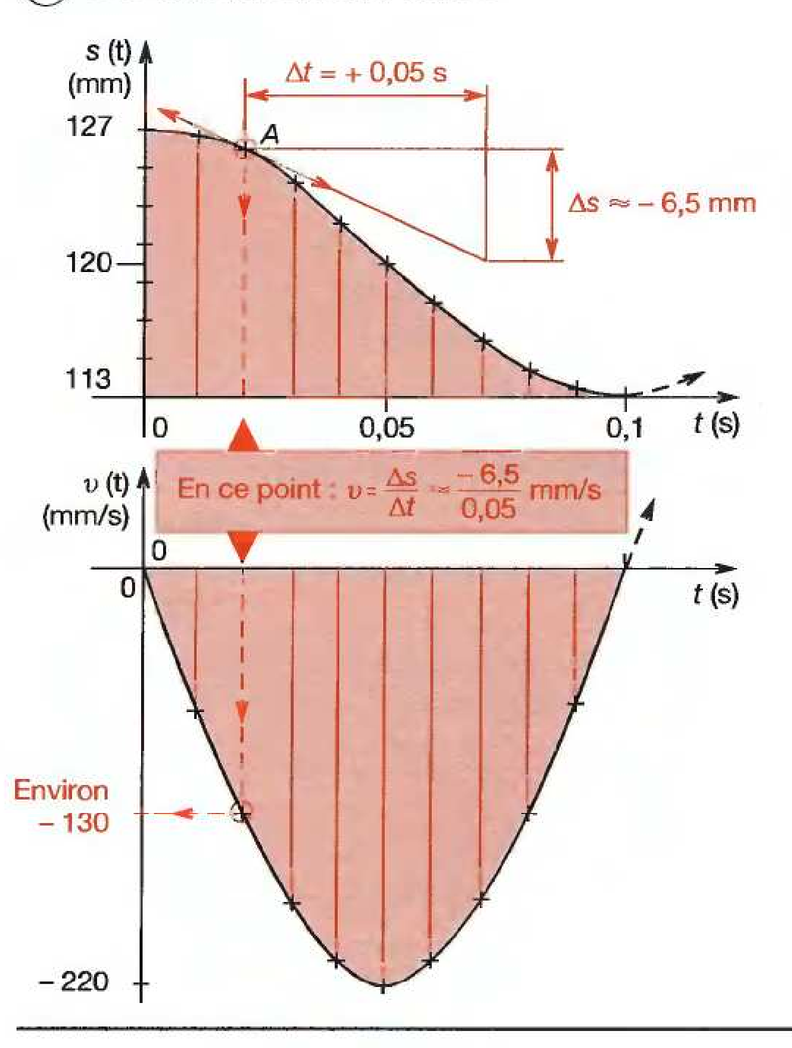
① SCHÉMA D'UNE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT PAR EXCENTRIQUE



$\overrightarrow{OM}\,.\,\vec{x} = s = 7\cos(10\,\pi t) + 120$ (angle en rad)

t (s)	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...
s (mm)	127	126,7	125,7	124	122	...
v (mm/s)	0	– 68	– 129	– 178	– 209	...

② DÉTERMINATION GRAPHIQUE



21 ▪ 6 Accélération d'un point

21 ▪ 61 Accélération moyenne

Si le point A se situe en A_1 à l'instant t_1(s) et qu'il possède une vitesse instantanée v_1(m/s) ; s'il passe à l'instant t_2 en A_2 à la vitesse v_2, son accélération tangentielle moyenne entre t_1 et t_2, notée $a_{t\,moy}$ (m/s² ou m . s⁻²), vaut :

$$a_{t\,moy} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

21 ▪ 62 Accélération tangentielle instantanée

À l'instant t quelconque, l'accélération tangentielle instantanée, notée a_t correspond à la limite du rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ lorsque $\Delta t \to 0$. On le note alors :

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ ; comme } v = \frac{ds}{dt} : a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''(t)$$

EXEMPLE :

- On donne $s = -10\,t^3 + 2\,t + 1$ (t en (s) et s en (m)).
- On calcule $v = s' = ds/dt = -30\,t^2 + 2$ et $a_t = s'' = -60\,t$.

RÉSULTATS PARTIELS :

t(s)	0	1	2	3	4
s(m)	1	−7	−75	−263	−631
v (m/s)	2	−28	−118	−268	−478
a_t(m/s²)	0	−60	−120	−180	−240

21 ▪ 63 Vecteur accélération $\overrightarrow{a_{A/\Re 0}}$

Si le point mobile A a une vitesse $\overrightarrow{V_{A/\Re 0}}$ à l'instant t et si cette vitesse devient $\overrightarrow{V_{A'/\Re 0}}$ à l'instant $t + \Delta t$, on peut dire que la vitesse vectorielle a varié de $\Delta \vec{V_A} = \overrightarrow{V_{A'/\Re 0}} - \overrightarrow{V_{A/\Re 0}}$ pendant le temps Δt. On pose :

$$\overrightarrow{a_{A/\Re 0}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V_A}}{\Delta t} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{V_{A/\Re 0}}}{dt}\right)_{\Re 0} = \left(\frac{d^2\,\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right)_{\Re 0}$$

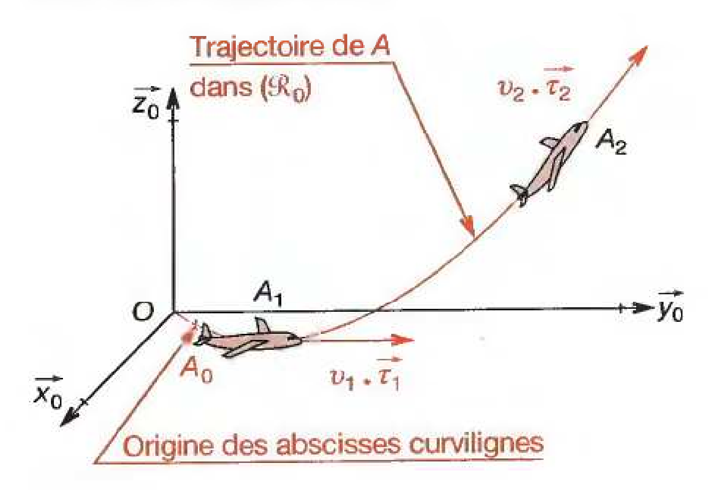
21 ▪ 64 Composantes intrinsèques de l'accélération

Puisque $\overrightarrow{a_{A/\Re 0}} = \left(\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{V_{A/\Re 0}}\right)_{\Re 0}$ et que $\overrightarrow{V_{A/\Re 0}} = v.\vec{\tau}$, alors :

$$\overrightarrow{a_{A/\Re 0}} = \left(\frac{d}{dt}v\right).\vec{\tau} + v.\left(\frac{d}{dt}\vec{\tau}\right)_{\Re 0} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v.\left(\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)_{\Re 0}.\frac{ds}{dt}$$

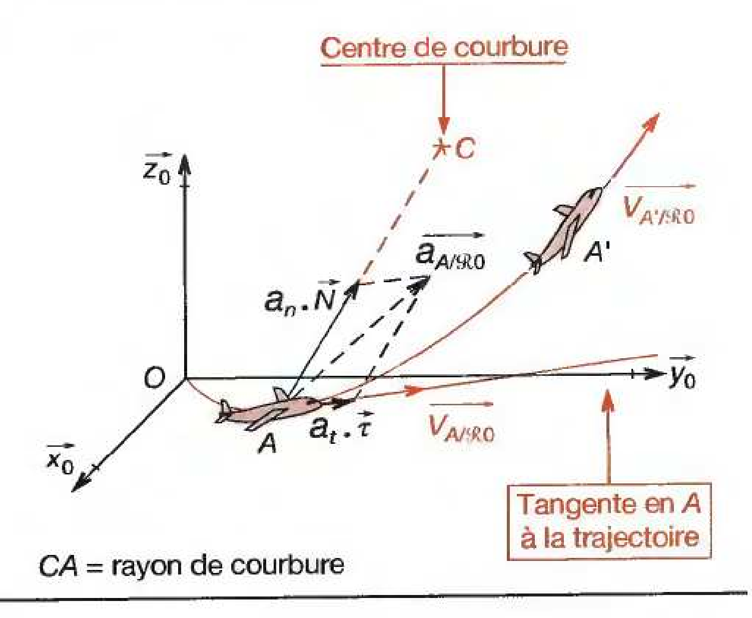
En géométrie analytique, on montre que $\left(\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)_{\Re 0} = \frac{\vec{N}}{R}$

ACCÉLÉRATION MOYENNE



Si $s = \overset{\frown}{A_0 A_1} = 5t^2 - 8$ (t en (s) et s en (m))
$v = 10\,t$
Si A se situe en A_1 à $t = 1$: $v_1 = 10$ m/s
Si A se situe en A_2 à $t = 2$: $v_2 = 20$ m/s
Son accélération moyenne entre t_1 et t_2 vaut $a_{t\,moy} = \frac{20 - 10}{2 - 1} = 10$ m/s²

VECTEUR ACCÉLÉRATION



$\vec{N}$ représente le vecteur unitaire «normale au point», toujours dirigé vers le centre de courbure, et R représente la valeur du rayon de courbure.

On peut donc noter que, quelle que soit la nature des mouvements :

$$\overrightarrow{a_{A/\Re 0}} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \quad \text{où :}$$

$\vec{a_t} = a_t.\vec{\tau} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau}$: **accélération tangentielle ;**

$\vec{a_n} = a_n.\vec{N} = (v^2/R).\vec{N}$: **accélération normale.**

21 ■ 65 Détermination algébrique de l'accélération

Seule l'accélération tangentielle peut se calculer à partir de l'abscisse curviligne. L'accélération normale dépend du rayon de courbure de la trajectoire que l'on calcule dans les cas particuliers de la translation, de la rotation et du mouvement hélicoïdal.

Soit, pour les exemples du § 21.54.

$v' = -70\,\pi \sin(10\,\pi t) \Rightarrow a_t = v' = -700\,\pi^2 \cos 10\,(\pi t)$;

$v = 60\,t^2 - 16\,t \qquad \Rightarrow a_t = v' = 120\,t - 16$ m/s².

21 ■ 66 Détermination vectorielle de l'accélération

La position d'un point M est connue dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dès l'instant que l'on sait exprimer son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps t. Il suffit ensuite de savoir calculer des dérivées :

EXEMPLE : $\overrightarrow{OM}_{(x,y)}$ avec $x = 3\,t - 1$ et $y = t^2 + 3\,t - 1$.

(distances en (m) et temps t en (s)).

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{V_{M/(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{a_{M/(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}\begin{pmatrix}x''(t)\\y''(t)\end{pmatrix}$$

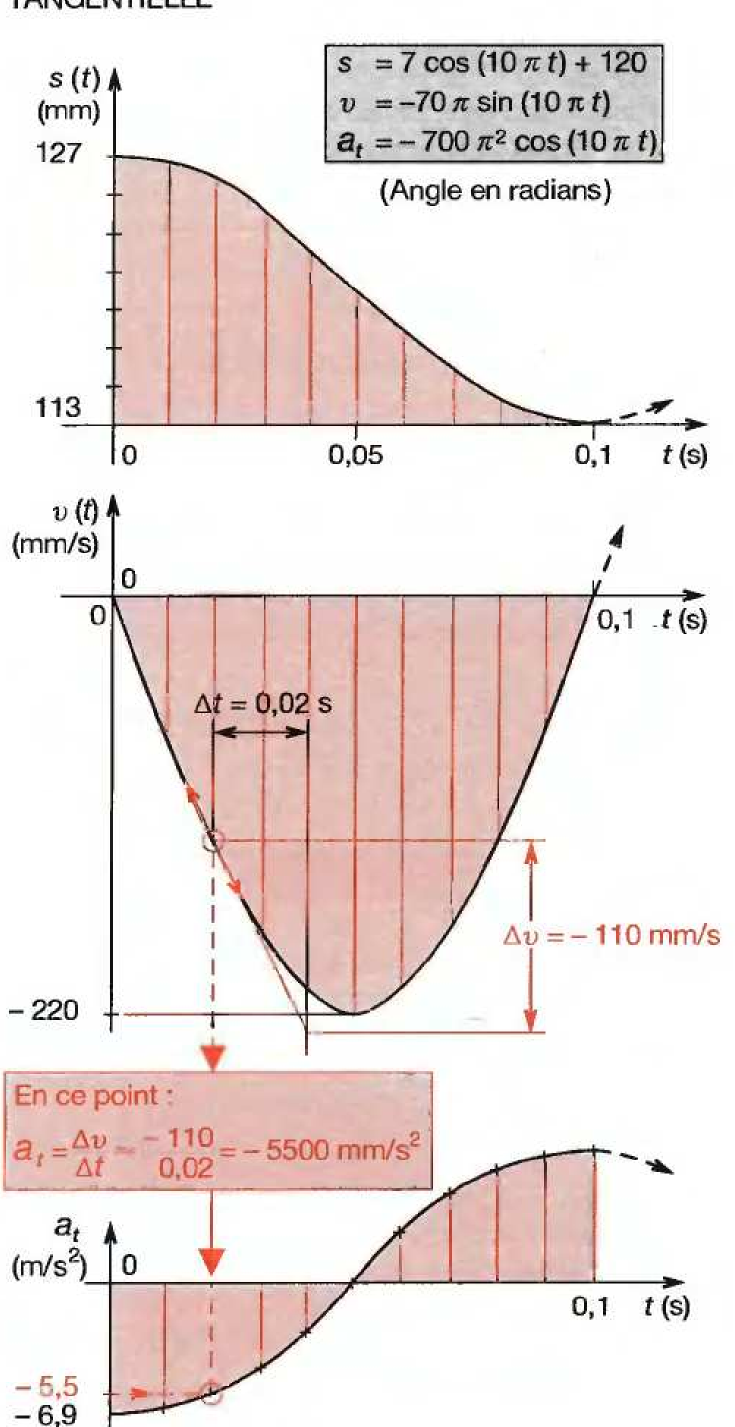
CALCULS :

$$x = 3\,t - 1 \qquad x'_{(t)} = 3 \qquad x''_{(t)} = 0$$
$$\Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow$$
$$y = t^2 + 3\,t - 1 \qquad y'_{(t)} = 2\,t + 3 \qquad y''_{(t)} = 2$$

21 ■ 67 Détermination graphique de l'accélération

Elle repose sur le même principe que celle de la vitesse exposée au § 21.56. Elle se limite à l'accélération tangentielle.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE L'ACCÉLÉRATION TANGENTIELLE



21 ■ 7 Hodographe d'un mouvement

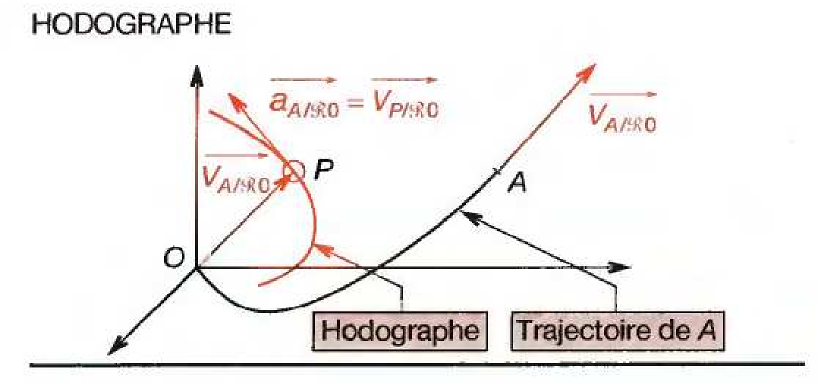
Pour un mouvement donné, on porte **à partir d'un point fixe** choisi arbitrairement, le vecteur vitesse. L'extrémité P du pointeur ainsi défini, décrit une courbe appelée hodographe.

Exemples de mouvements	Nature de l'hodographe
Mouvement rectiligne uniforme	Un point
Mouvement rectiligne varié	Une droite
Mouvement circulaire uniforme	Un cercle
Mouvement circulaire uniformément varié	Spirale

REMARQUE :

Sur l'hodographe, la vitesse du point P correspond exactement à l'accélération du point A associé.

HODOGRAPHE



22 Translation d'un solide

22.1 Définition

Un solide est en translation dans un repère lorsque deux bipoints distincts $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ de ce solide, gardent des directions constantes au cours du mouvement.

22.2 Différents modes de translation

Selon la trajectoire des points du solide, la translation est :

- rectiligne uniforme (chapitre 23) ou variée (chapitre 24) ;
- circulaire uniforme ou variée (chapitre 25) ;
- quelconque.

22.3 Vitesse angulaires et linéaires

Lorsqu'un solide (S) est en translation dans un repère $(\mathcal{R}_0)$:

- La vitesse angulaire de tous les points de (S) est nulle :

$$\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} = \vec{0} \text{ (rad/s ou tr/min)}.$$

- La vitesse linéaire de tous les points de (S) est égale :

$$\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{B\in S/\mathcal{R}_0}}.$$

On dit que le « champ des vitesses » est uniforme.

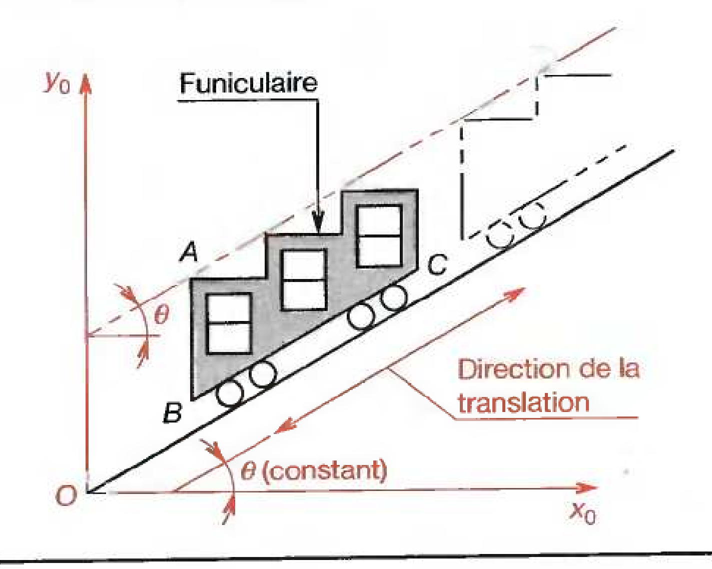
REMARQUE :
Le champ des vitesses se trouve complètement défini par un torseur cinématique :

$$\{\vartheta_{S/\mathcal{R}_0}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}_0}} \;\; \overrightarrow{V_{A\,S/\mathcal{R}_0}}\right\} = \left\{\vec{0} \;\; \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}_0}}\right\}.$$

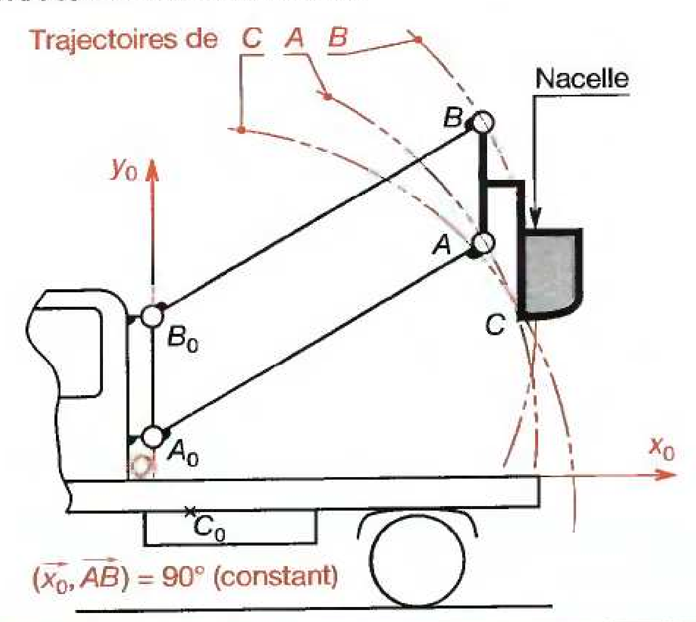
La relation entre moments d'un torseur (§ 76) s'applique :

$$\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{V_{B\in S/\mathcal{R}_0}} + \overrightarrow{AB} \times \vec{0} = \overrightarrow{V_{B\in S/\mathcal{R}_0}}.$$

TRANSLATION RECTILIGNE

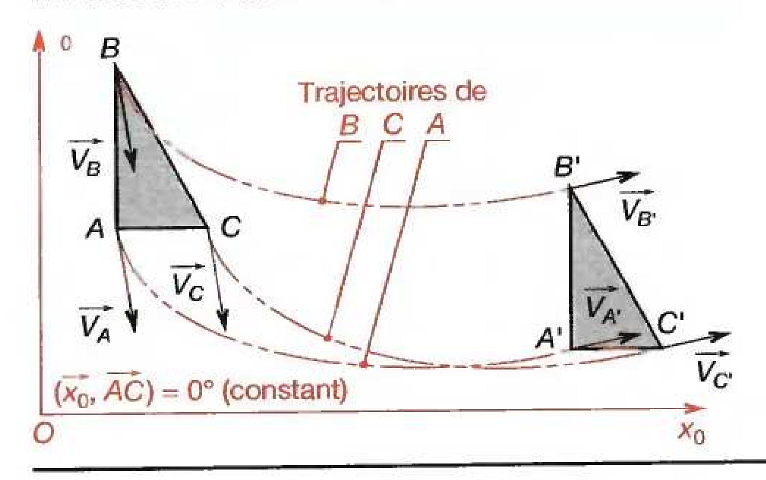


TRANSLATION CIRCULAIRE



Les trajectoires de A, B, C ont pour centres $A_0\,B_0\,C_0$ et même rayon $A_0A = B_0B = C_0C$

TRANSLATION QUELCONQUE



23 Translation rectiligne uniforme

23.1 Définition

Un solide est en translation rectiligne uniforme si :
- **tous ses points décrivent des droites parallèles ;**
- **tous ses points ont une vitesse constante.**

23.2 Exemple

Déplacement uniforme d'une tige de vérin/corps.
Autre exemple § 24.5.

23.3 Équations du mouvement

- $\overrightarrow{OM}.\vec{x} = s_{(t)} = v_0(t-t_0)+s_0$

$s_{(t)}$: abscisse curviligne (m) du point M à l'instant t (s).
v_0 : vitesse (en m/s), du point M à l'instant t_0 (s).
s_0 : abscisse (en m), du point M à l'instant t_0 (s).

- $v_{(t)} = s'_{(t)} = v_0$ $\qquad v_{(t)} = \dfrac{ds}{dt} = v_0$

Dérivée de $s_{(t)}$ par rapport au temps : $s'_{(s)} = ds/dt$.

- $a_{(t)} = v'_{(t)} = 0$ **(la dérivée d'une constante = 0)**

Accélération tangentielle du point M : $v'_{(0)} = dv/dt$.

23.4 Caractéristiques vectorielles

- Le solide (S) en mouvement formant, par deux de ses points, un angle constant avec le repère ($\mathcal{R}_0$) :

Le vecteur «vitesse angulaire» $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \vec{0}$

- $\vec{x}$ représentant le vecteur unitaire de la trajectoire :

$\overrightarrow{ON} = s.\vec{x} + a.\vec{y}$ (voir exemple)

$\overrightarrow{V_{N/\mathcal{R}0}} = v_0.\vec{x}$ où $v_0 = s'$

$\overrightarrow{a_{N/\mathcal{R}0}} = v'.\vec{\tau} + \dfrac{v^2}{R}\vec{N}$ (§ 21.64).

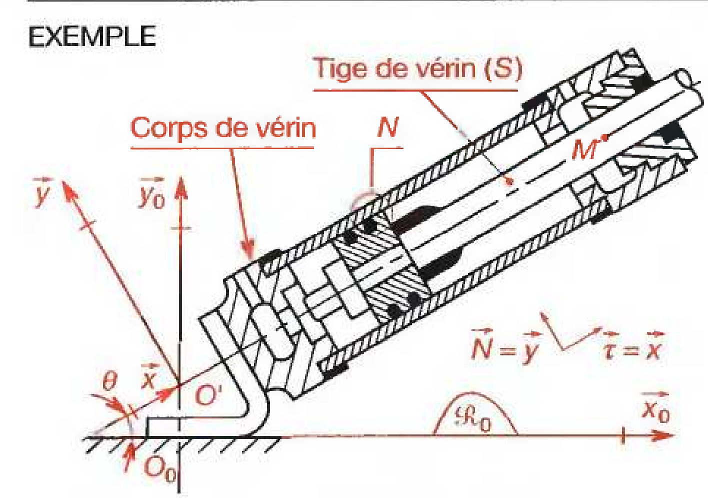
Pour une trajectoire rectiligne $R \to \infty$; donc $v^2/R \to 0$.
Comme par ailleurs $v' = 0$: $\overrightarrow{a_{N/\mathcal{R}0}} = \vec{0}$.

- Le torseur cinématique est de la forme :

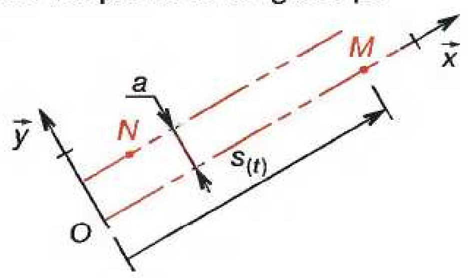
$$\{\vartheta_{S/\mathcal{R}0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} \\ \overrightarrow{V_{N/\mathcal{R}0}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v.\vec{x} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}0} \text{ où } v = s'_{(t)} \text{ (constante)}$$

Comme $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}0}} = \overrightarrow{V_{N/\mathcal{R}0}}$: le champ des vitesses est uniforme.

EXEMPLE



Trajectoires des points de la tige/corps



APPLICATION :

1° La tige parcourant 130 mm en 1 s d'un mouvement rectiligne uniforme, calculer la distance parcourue en 1,5 s à l'aide des équations du mouvement.

2° Exprimer vectoriellement la vitesse du point N de la lèvre du joint d'étanchéité pendant ce déplacement.

SOLUTION :

1° Le mouvement a pour équation :
$s_{(t)} = v_0(t-t_0) + s_0$
Posons : pour $t = 0$ ($= t_0$), $s_{(0)} = 0$ mm (a),
pour $t = 1$, $s_{(1)} = 130$ mm (b).
Pour (a), l'équation s'écrit : $0 = s_0$.
Pour (b), elle devient : $130 = v_0 \times (1) + 0$.
Donc $v_0 = 130$ mm/s (vérifié).
Lorsque $t = 1,5$ s, on remplace de même :

$$s_{(1,5)} = 130 \times (1,5 - 0) + 0 = 195 \text{ mm}$$

2° Tous les points ont une même vitesse à chaque instant :

$$\overrightarrow{V_{N/\mathcal{R}0}} = \overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}0}} = 130\vec{x} \text{ (mm/s)}$$

On peut remarquer que, pour un torseur :

$$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{V_{N/\mathcal{R}0}} + \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \overrightarrow{V_{N/\mathcal{R}0}} \text{ (§ 76.1)}$$

24 Translation rectiligne uniformément variée

24■1 Définition

Un solide est en translation rectiligne uniformément variée si :
- **tous ses points décrivent des droites parallèles ;**
- **tous ses points ont une accélération constante.**

24■2 Exemple

Déplacement d'un porte-outil de tour vertical : phases 1 et 3 décrites par les diagrammes ci-contre (voir § 24.5).

24■3 Équations du mouvement

Elles expriment les relations entre :
- l'abscisse curviligne $s_{(t)}$ (exprimée en mètres) ;
- la vitesse algébrique $v_{(t)}$ (exprimée en m/s) ;
- l'accélération tangentielle a_t (exprimée en m/s²).

Elles s'écrivent :

$$s_{(t)} = 0{,}5\, a_t\, (t - t_0)^2 + v_0\, (t - t_0) + s_0,$$
$$s' = v_{(t)} = a_t\, (t - t_0) + v_0,$$
$$s'' = a_{(t)} = a_t.$$

t_0 : instant initial (s).
v_0 : vitesse à l'instant t_0.
a_t : constante.

24■4 Caractéristiques vectorielles

- Un bipoint quelconque du solide (S) en translation dans le repère, forme un angle constant de ce repère :

La vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} = \vec{0}$

- $\vec{x}$ représentant le vecteur unitaire de la trajectoire :

(voir fig. § 24.5) $\overrightarrow{OM} = s_{(t)} \cdot \vec{x} - h \cdot \vec{y}$,
$\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}} = v_{(t)} \cdot \vec{x}$,
$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = a_t \cdot \vec{x}$.

REMARQUE :
Pour tout mouvement rectiligne, l'accélération est tangente à la trajectoire.

- Le torseur cinématique est de la forme :

$$\{\vartheta_{S/\mathcal{R}0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} \\ \overrightarrow{V_{M\in S/\mathcal{R}0}} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{M\in S/\mathcal{R}0}} \end{matrix} \right\} \text{ où } \overrightarrow{V_{M\in S/\mathcal{R}0}} = v(t) \cdot \vec{x}$$

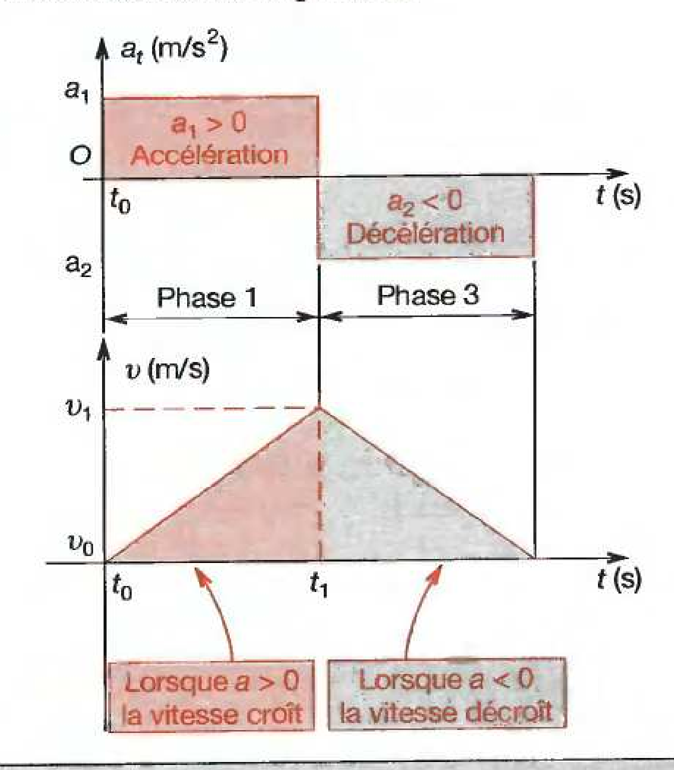
$$\overrightarrow{V_{N\in S/\mathcal{R}0}} = \overrightarrow{V_{M\in S/\mathcal{R}0}} + \overrightarrow{NM} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \overrightarrow{V_{M\in S/\mathcal{R}0}}\ ^*$$

Le champ des vitesses est uniforme.

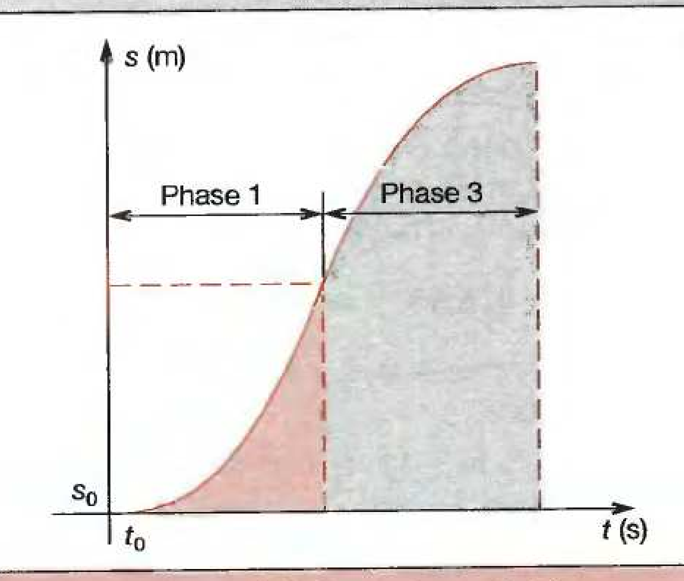
* Relation entre moments d'un torseur §74.1

DIAGRAMMES DU MOUVEMENT

Loi des accélérations tangentielles



L'accélération tangentielle est une dérivée de la vitesse algébrique
La vitesse algébrique est une primitive de l'accélération tangentielle



La vitesse algébrique est une dérivée de l'abscisse curviligne
L'abscisse curviligne est une primitive de la vitesse algébrique

24.5 Étude de translations rectilignes

Le croquis montre le mouvement du coulant d'un tour vertical vers le magasin des outils.

Phase 1

Partant du repos, le coulant atteint la vitesse de 0,06 m/s en 2 s selon un mouvement uniformément accéléré.

Phase 2

Le coulant poursuit son mouvement, de façon uniforme.

Phase 3

Le mouvement du coulant devient uniformément retardé jusqu'à l'arrêt, sur une distance de 0,2 m. Sur l'ensemble des trois phases, le coulant parcourt 1,4 m.

Écrire les équations du mouvement pour chaque phase et tracer les diagrammes correspondants.

SOLUTION :

Phase 1 (mouvement rectiligne uniformément accéléré) :

$a = a_1$ et $v = a_1(t - t_0) + v_0$.

Posons : $t_0 = 0$ (origine des temps).

Lorsque $t = 0$, $v = 0$; lorsque $t = 2$, $v = 0{,}06$ m/s.

Donc : $0{,}06 = a_1 . 2 \Rightarrow a_1 = 0{,}03$ m/s².

$$\mathbf{a_1 = 0{,}03\ m/s^2\ ;\ v = 0{,}03\,t\ ;\ s = 0{,}015\,t^2.}$$

Cas particulier : quand $t = 2$ s, $s_{(2)} = 0{,}06$ m.

Phase 2 (mouvement rectiligne uniforme) : a_2 (constante).

$s = v_0(t - t_0) + s_0$ s'écrit ici : $s = 0{,}06(t - 2) + 0{,}06$.

Cas particulier : lorsque $s = 1{,}2$ m, le mouvement change. Soit t_2 cet instant, on peut écrire :

$s_{(t2)} = 0{,}06(t_2 - 2) + 0{,}06 = 1{,}2 \Rightarrow t_2 = 21$ s

$$\mathbf{a_2 = 0\ ;\ v = 0{,}06\ m/s\ ;\ s = 0{,}06(t - 2) + 0{,}06.}$$

Phase 3 (mouvement rectiligne uniformément décéléré) : $a = a_3 < 0$ (constante).

$s = 0{,}5\,a_3(t - t_2)^2 + v_0(t - t_2) + s_0$ s'écrit ici :

$s = 0{,}5\,a_3(t - 21)^2 + 0{,}06(t - 21) + 1{,}2$ et $v = a_3(t - 21) + 0{,}06$.

Lorsque $t = t_3$, $s = 1{,}4$ et $v = 0$:

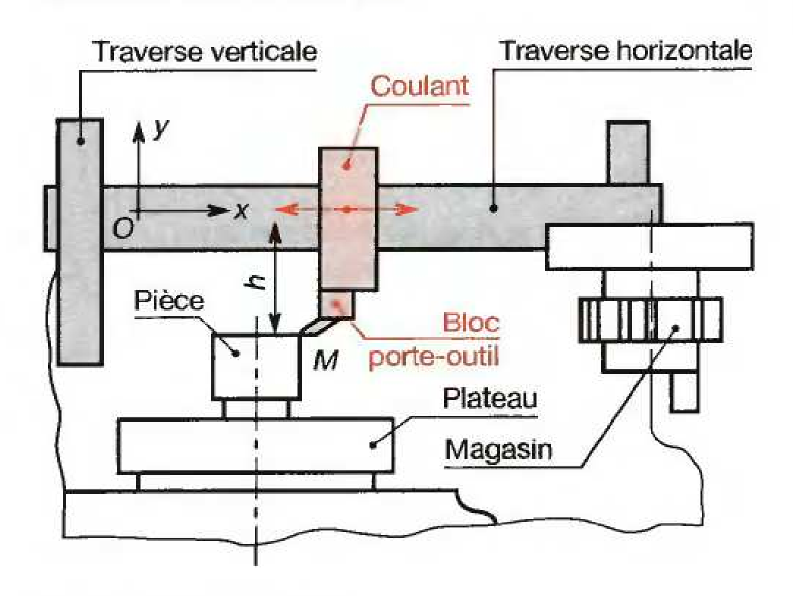
$0 = a_3(t_3 - 21) + 0{,}06 \Rightarrow t_3 - 21 = -0{,}06/a_3$; report dans s.

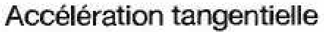
On trouve : $t_3 = 27{,}7$ s d'où $a_3 = -0{,}009$ m/s²,

$\mathbf{a_3 = -0{,}009\ m/s^2}$; $\mathbf{v = -0{,}009\,t + 0{,}249}$;

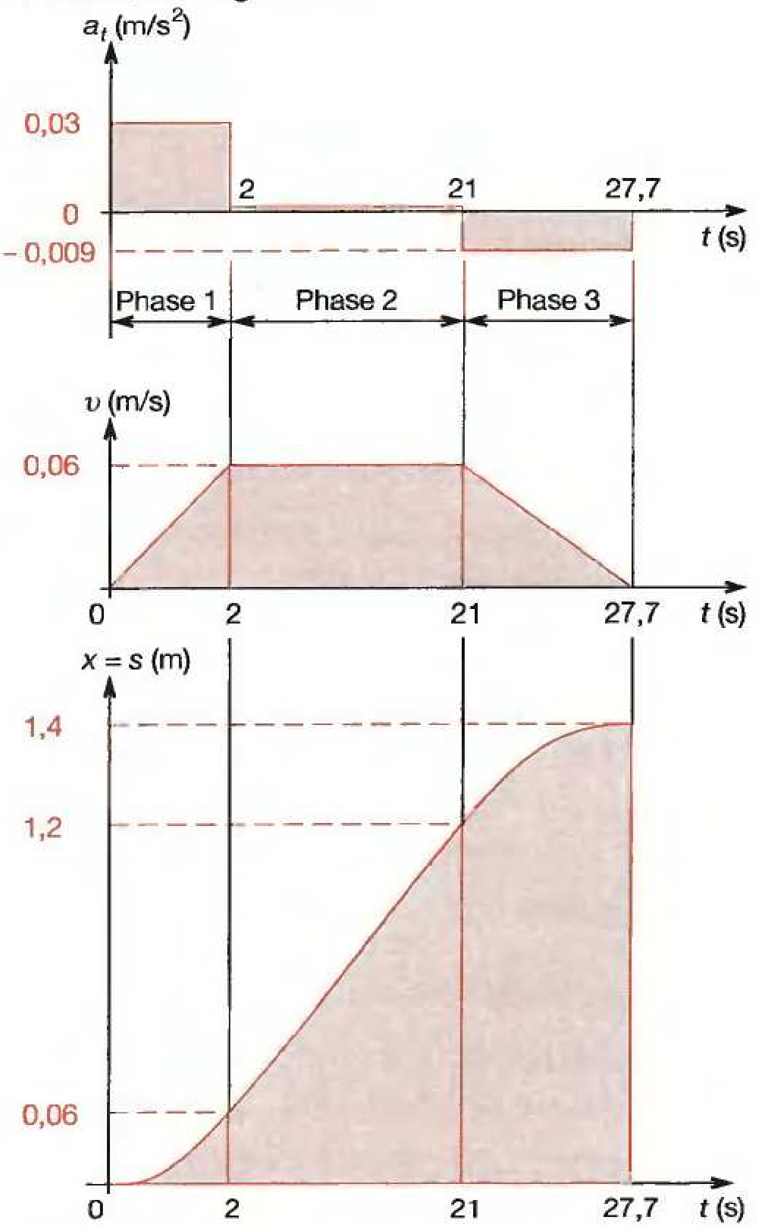
$\mathbf{s = -0{,}004\,5(t - 21)^2 + 0{,}06\,t + 1{,}2.}$

EXEMPLE : TOUR VERTICAL





Accélération tangentielle



25 Translation circulaire

25.1 Translation circulaire uniforme

25.11 Définition

C'est une translation (chapitre 22) au cours de laquelle un point quelconque lié au solide décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse de norme constante.

25.12 Propriétés

- Pour toute translation $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \vec{0}$.
- Pour un point particulier M: $\omega_0 = \theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ (constante).

Lois du mouvement de M:

$\theta = \omega_0 . (t - t_0) + \theta_0$ où | t_0 = origine des temps, θ_0 = origine des angles,

$\theta' = d\theta/dt = \omega_0$ (constante),

$\theta'' = d^2\theta/dt^2 = \omega'_0 = 0$ (accélération angulaire nulle).

- Tous les points ont même vitesse à chaque instant.

25.2 Translation circulaire uniformément variée

25.21 Définition

C'est une translation (chapitre 22) au cours de laquelle un point quelconque lié au solide, décrit une trajectoire circulaire avec une accélération constante.

25.22 Propriétés

- Pour toute translation $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \vec{0}$ (la vitesse angulaire du solide est nulle).
- Pour un point particulier M:

$\theta = 1/2 . \omega'_0 (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \theta_0$; $(\omega'_0 = \theta''_0)$,

$\theta' = d\theta/dt = \omega_0 (t - t_0) + \omega_0$ (ou $\theta' = \omega$),

$\theta'' = d^2\theta/dt^2 = \omega'_0$ (constante).

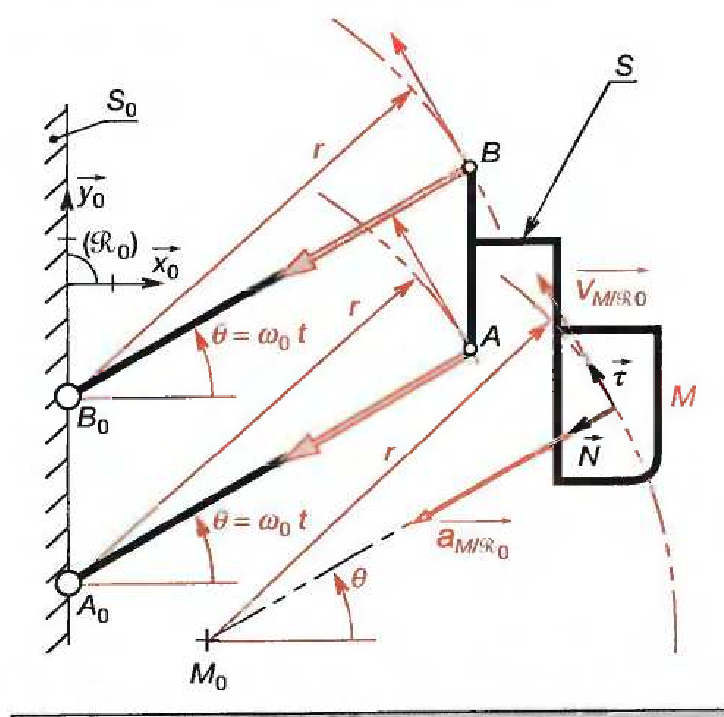
- Tous les points ont même vitesse à chaque instant.

REMARQUES :

Il convient de bien distinguer :

- La vitesse angulaire du solide (nulle) et celle ω_0 d'un point tel que M tournant autour de M_0.
- L'accélération angulaire du solide (nulle) et celle du point M: $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}0}} = \omega'_0 . r . \vec{\tau} + \omega^2 . r . \vec{N}$.
- La vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \vec{0}$ et la vitesse linéaire $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}0}}$.

TRANSLATION CIRCULAIRE UNIFORME

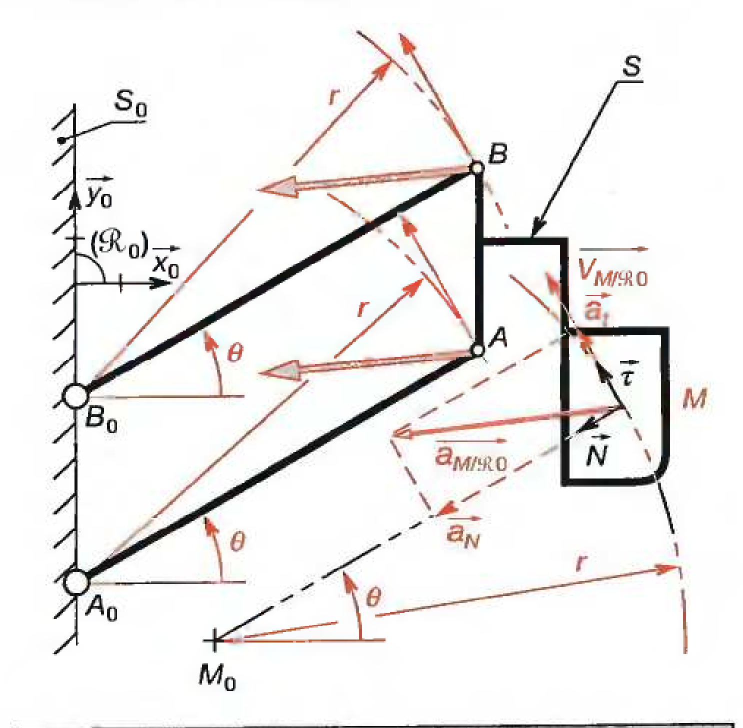


$A_0A = B_0B = M_0M = r$ (constante) ; ω_0 (constante)

$\forall M \in S : \overrightarrow{V_{M\in S/\mathcal{R}0}} = v . \vec{\tau}$ et $v = \theta' . r = \omega_0 . r$

$\forall M \in S : \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}0}} = a_N \vec{N}$ et $a_N = \theta'^2 . r = \omega_0^2 . r$

TRANSLATION CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIÉE



$A_0A = B_0M = M_0M$ $\qquad \omega'_0 = \theta''$ (constante)

$\forall M \in S : \overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}0}} = v . \vec{\tau}$ et $v = \theta' . r = \omega . r$

$\forall M \in S : \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}0}} = a_t . \vec{\tau} + a_N . \vec{N}$

et $a_t = \omega'_0 . r = \theta'' . r$; $a_N = \theta'^2 . r = \omega^2 . r$

25 ■ 3 Études de translations circulaires

Le croquis ci-contre schématise partiellement un bras manipulateur de fonderie. Le mouvement, d'amplitude 225° se déroule en trois phases :

- **Phase 1** rotation uniformément accélérée sur 15° $\left(\frac{\pi}{12}\text{ rad}\right)$,
- **Phase 2** rotation uniforme à 1 rad/s,
- **Phase 3** rotation uniformément décéléré sur 30°.

Écrire les équations du mouvement, tracer les diagrammes et préciser la vitesse de G ainsi que son accélération dans la configuration ci-contre sachant que $OA = 1{,}7$ m.

SOLUTION :

L'étude se ramène à celle d'un point dont on connaît la trajectoire, A par exemple.

■ **Phase 1** (mouvement uniformément accéléré) θ''_1 (constante) :

Lorsque $t = 0$: $t_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ (conditions initiales).
Lorsque $t = t_1$: $\theta_{(t1)} = 0{,}5\,\theta''_1 t_1^2 = \pi/12$; $\theta'_{(t1)} = \theta''_1 . t_1 = 1$.
Donc $\theta''_1 = 1/t_1$ et $\pi/12 = 0{,}5\, t_1$,
d'où $t_1 \approx 0{,}524$ s et $\theta''_1 = 1{,}91$ rad/s^2.

$\theta = 0{,}954\, t^2$; $\theta' = 1{,}91\, t$; $\theta'' = 1{,}91$ pour $t \in [0\,;0{,}524]$.

■ **Phase 2** (mouvement uniforme) θ'_2 (constante) :

$\theta = \omega_0 (t - t_0) + \theta_0$ s'écrit ici : $\theta = 1\,(t - 0{,}524) + \pi/12$,

Lorsque $\theta = 225° - 30° = 195° = 180° + 15° = 13\pi/12$, $t = t_2$.
Donc $13\,\pi/12 = t_2 - 0{,}524 + \pi/12 \Rightarrow t_2 \approx 3{,}67$ s.

$\theta = t - 0{,}524 + \pi/12$; $\theta' = 1$; $\theta'' = 0$ pour $t \in [0{,}524\,;3{,}67]$.

■ **Phase 3** (mouvement uniformément décéléré) θ''_3 (constante) :

$\theta = 0{,}5\,\omega'_0 (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \theta_0$
et $\theta' = \omega'_0 (t - t_0) + \omega_0$ s'écrivent :
$\theta = 0{,}5\,\theta''_3 (t - 3{,}67)^2 + 1\,(t - 3{,}67) + 13\,\pi/12$,

et $\theta' = \theta''_3 (t - 3{,}67) + 1$.

Lorsque $t = t_4$:
$\theta' = 0$ soit $\theta''_3 = -1/(t - 3{,}67)$,
$\theta = 225° = 5\,\pi/4$ rad.

Donc $5\,\pi/4 = -0{,}5\,(t - 0{,}367) + (t - 0{,}367) + 13\,\pi/12 \Rightarrow t \approx 4{,}71$ s,

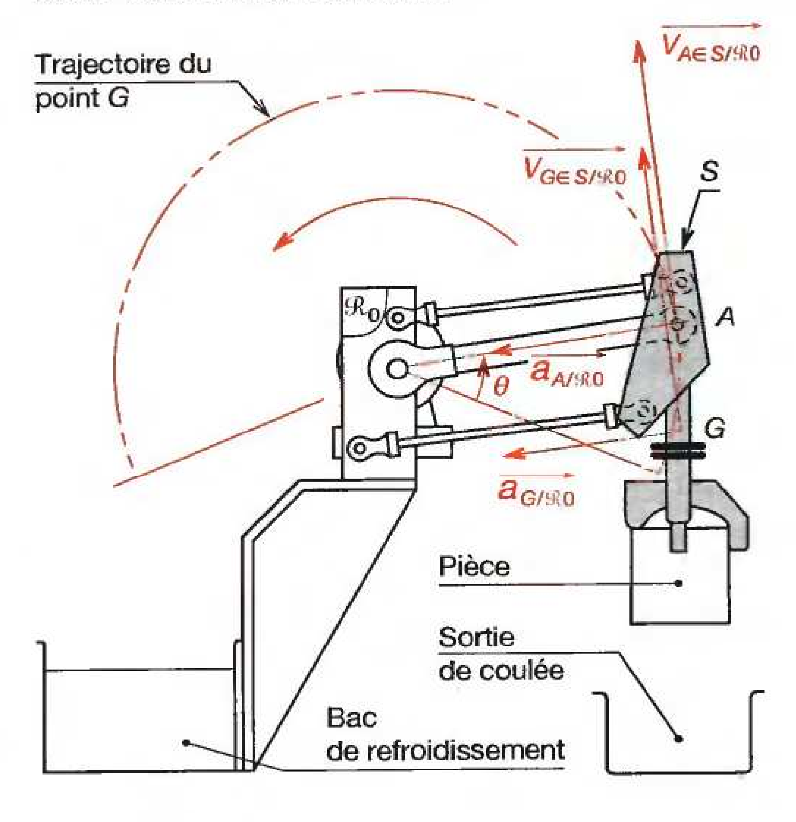
$\theta = 0{,}477\,(t - 0{,}367)^2 + t - 0{,}367 + 13\,\pi/12$
$\theta' = 0{,}955\,(t - 0{,}367) + 1$
$\theta'' = -0{,}955$ rad/s^2 pour $t \in [3{,}67\,;4{,}71]$.

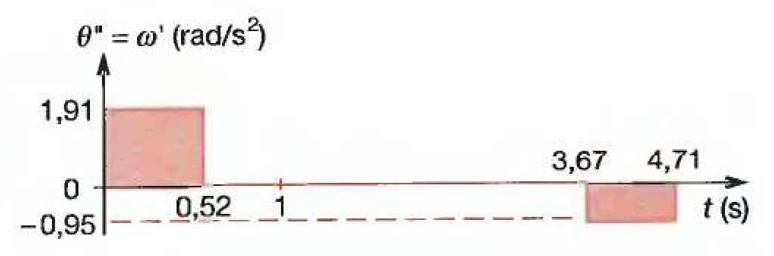
Dans la configuration de la figure : $\theta = 30°$, située dans la phase 2. On peut calculer $t(\pi/6) = 1$ s, la vitesse linéaire :

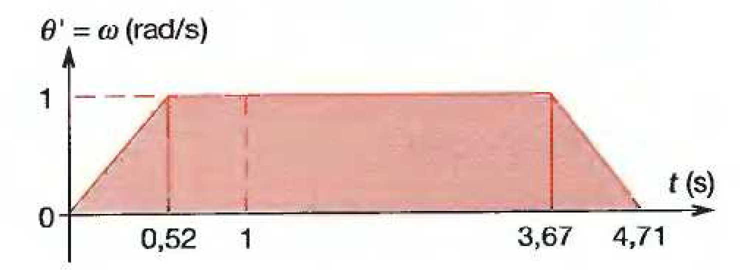
$\|\overrightarrow{V_{G,S/\Re0}}\| = \|\overrightarrow{V_{A,S/\Re0}}\| = 1{,}7 \times 1 = 1{,}7$ m/s

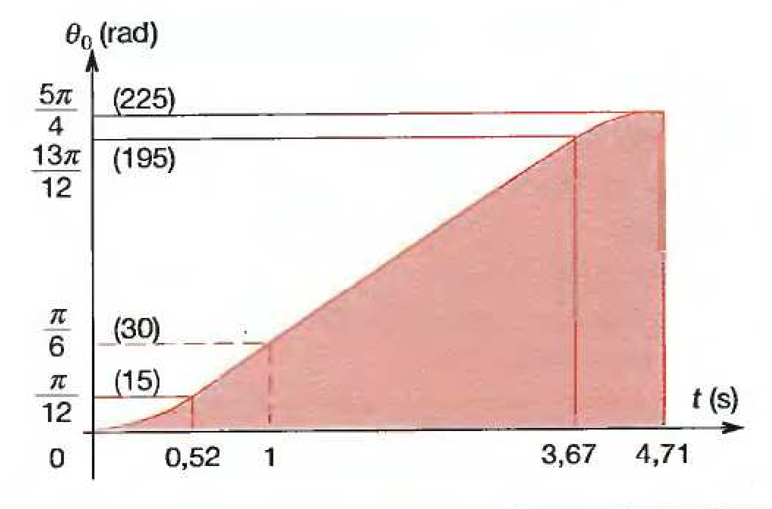
et l'accélération : $a_N = \theta' r^2 = 1{,}7$ m/s^2.

MANIPULATEUR DE FONDERIE









26 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

26■1 Définition

Un solide (S) est en rotation autour d'un axe de (S_0) lorsque deux points distincts de (S) coïncident en permanence avec deux points de l'axe de (S_0).

26■2 Différents modes

- Rotation uniforme (§ 27.1).
- Rotation uniformément variée (§ 27.2).
- Rotation quelconque ou selon une loi distincte des deux modes précédents.

26■3 Caractérisation du mouvement

- Tous les points décrivent des trajectoires circulaires coaxiales avec l'axe de rotation.
- Tous les points tournent du même angle au même instant ; on dit alors que :

Dans un mouvement de rotation, tous les points liés à un solide ont même vitesse angulaire.

- La vitesse angulaire d'un solide (S) en rotation par rapport à un autre solide (S_0) auquel on associe un repère $(\mathcal{R}_0) = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ peut être représentée par un vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \omega . \vec{z_0}$ de :

– direction : celle de l'axe $(O, \vec{z_0})$;
– sens : celui défini par la règle «du tire-bouchon» (ou des trois doigts) ;
– valeur algébrique : ω sur l'axe de rotation.

26■4 Relation entre vitesses linéaires et angulaires

On sait que $\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} = v . \vec{\tau} = \frac{ds}{dt} . \vec{\tau}$ (§ 21.53).

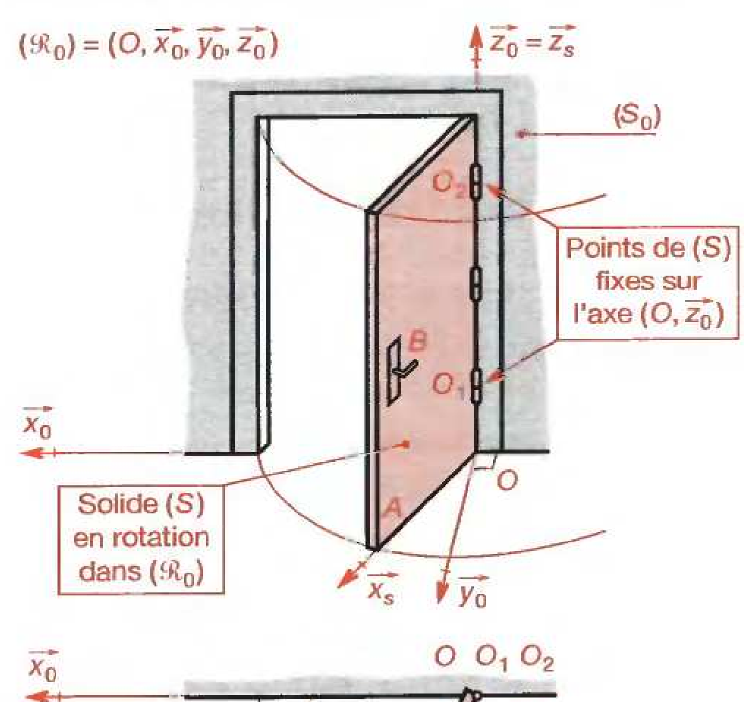
Pour un mouvement circulaire : $s = R . \theta$.

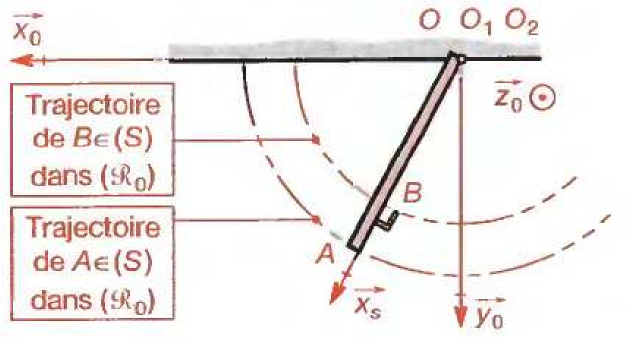
Donc $ds/dt = R\, d\theta/dt = R\omega$; d'où :

$$\| \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} \| = |\omega| . R$$

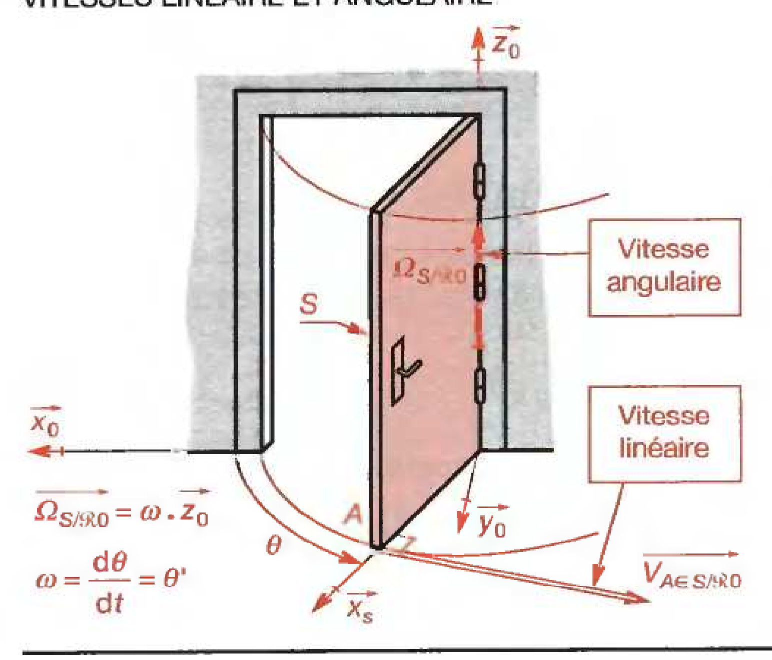
avec ω (rad/s), R (m), $\| \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} \|$ (m/s

SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE





VITESSES LINÉAIRE ET ANGULAIRE



26.5 Relation vectorielle entre $\overrightarrow{V_{A\in S/\Re 0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}}$

La définition de $\overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}}$ indiquée § 26.3 se trouve vérifiée par la relation vectorielle :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{V_{A\in S/\Re 0}} = \overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}}^{*} \\ \textbf{Soit encore :} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/\Re 0}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}\,(I, \overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}})\end{array}\right\} \text{ où } I \in \text{axe de rotation}$$

NOTA : $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\,(I, \overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}})$ se lit moment en A du pointeur $(I, \vec{\Omega})$.

26.6 Torseur cinématique

Il définit complètement le mouvement circulaire du solide à un instant donné.

■ Tous les points ont même vitesse angulaire : $\overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}} = \omega . \vec{z}$ est la somme de ce torseur ;

■ Les points I situés sur l'axe ont une vitesse linéaire nulle : Il s'écrit en I :

$$\{\vartheta_{S/\Re 0}\} = \left\{\begin{matrix}\omega . \vec{z} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{I\in(A,\vec{z})} \quad \text{car } \overrightarrow{V_{I\in S/\Re 0}} = \vec{0}$$

■ La vitesse linéaire de tous les points de (S) s'en déduit :

$$\overrightarrow{V_{A\in S/\Re 0}} = \overrightarrow{V_{I\in S/\Re 0}} + \overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}} = \overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\Re 0}}$$

(§ 76.1).

26.7 Champ des vitesses

D'après la relation § 26.4, puisque ω a même valeur pour tous les points liés au solide, la vitesse linéaire $\|\overrightarrow{V_{A\in S/\Re 0}}\|$ varie linéairement avec la distance R à l'axe de rotation (fig. 2).

26.8 Exemples

■ Un solide (S) est en rotation autour de AB à la vitesse de 300 tr/min. Calculer la vitesse linéaire de M situé à 50 mm de l'axe AB.

$$\|\overrightarrow{V_{M, S/\Re 0}}\| = 300 \times \frac{2\pi}{60} \times 50 \approx 1\,571 \text{ mm/s} = 1{,}571 \text{ m/s}.$$

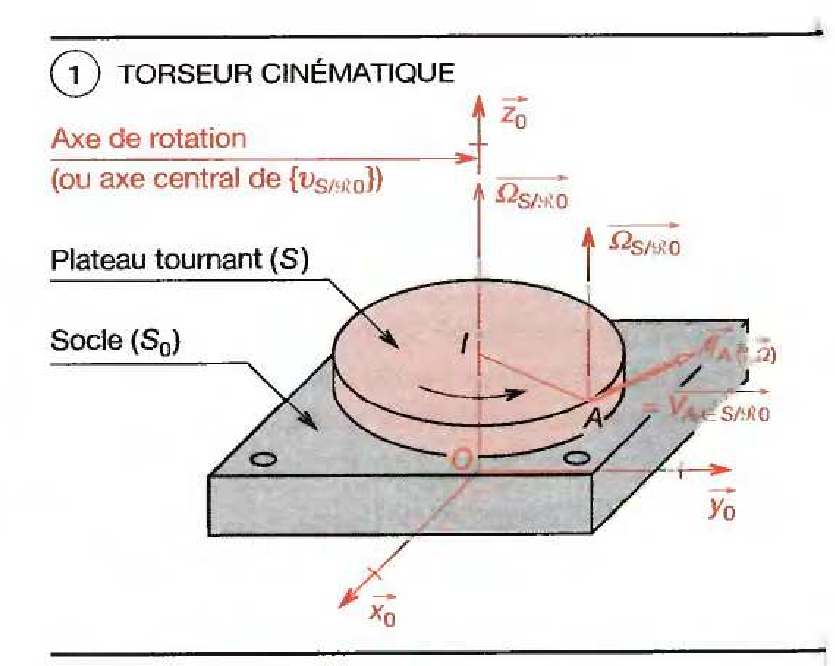
■ Un solide (S) est en rotation autour de l'axe (Δ). L'un de ses points N situé à 100 mm de (Δ) a une vitesse $v = 3$ m/s. Calculer celle de P situé à 70 mm de (Δ).

$v_N = \omega . r_N$ et $v_P = \omega . r_P$;

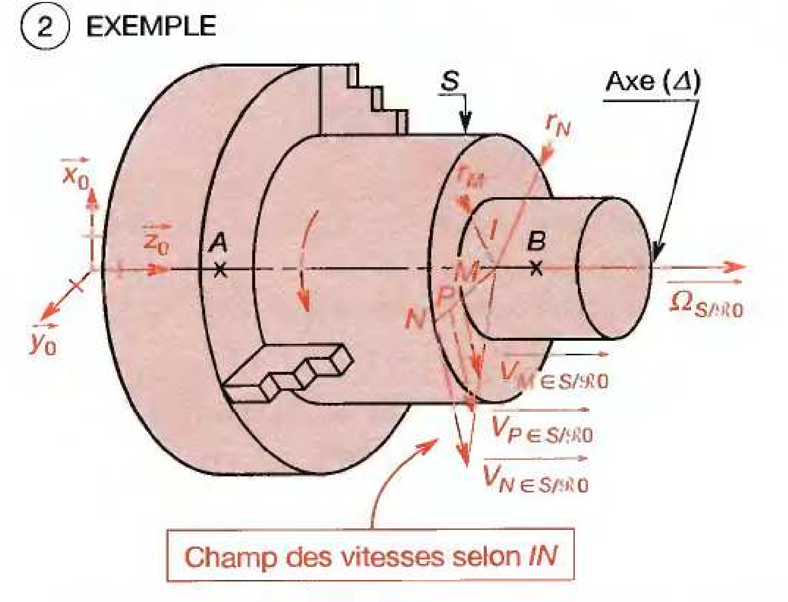
donc $v_P = v_N . r_N / r_P = 2{,}1$ m/s.

* $\times$: signe du produit vectoriel ($\wedge$ est toléré avec réserves ; voir § 70.6).

① TORSEUR CINÉMATIQUE



② EXEMPLE



■ L'axe de rotation AB de (S) est défini dans ($\Re_0$) par A (20, 20, 30), B(− 10, 50, 70). (S) tourne à 100 tr/min autour de AB. Etablir le torseur cinématique de $(S)/(\Re_0)$.

On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{10\,(-3)^2 + (3^2) + 4^2} = 10\sqrt{34}$

D'où $\vec{z_1} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{34} \\ 3/\sqrt{34} \\ 4/\sqrt{34} \end{pmatrix}$

$\omega = 100$ tr/min $\approx 10{,}47$ rad/s.

Par conséquent : $\{\overrightarrow{\vartheta_{S/\Re 0}}\} = \left\{\begin{matrix} 10{,}47\,\vec{z_1} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I\in(AB)}$

avec $\vec{z_1}$ déterminé ci-dessus.

27 Mouvements de rotation particuliers

27.1 Mouvement de rotation uniforme

En un point I de l'axe de rotation (axe central) $\vec{z}$, le torseur cinématique s'écrit :

$$\left[\overrightarrow{\vartheta_{S/\mathcal{R}0}}\right] = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_I \text{ avec } \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \omega_0 . \vec{z} \text{ (constante)}$$

Lois du mouvement t (s), ω (rad/s), θ'' (rad/s²) (Angle balayé et accélération angulaire se déduisent de ω_0)	
Vitesse angulaire (rad/s)	ω_0 (ou θ'_0) constante
Angle balayé (rad)	$\theta = \omega_0\ (t - t_0) + \theta_0$
Accélération angulaire (rad/s²)	θ'' (ou $\frac{d\omega}{dt}$ ou $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ou ω') = 0

27.2 Mouvement de rotation uniformément varié

En un point I de l'axe de rotation (axe central) $\vec{z}$, le torseur cinématique s'écrit :

$$\left[\overrightarrow{\vartheta_{S/\mathcal{R}0}}\right] = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_I \text{ avec } \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = \omega . \vec{z} \text{ (variable)}$$

Lois du mouvement t (s), ω (rad/s), θ'' (rad/s²) (Vitesse angulaire et angle balayé se déduisent de θ''_0)	
Accélération angulaire (rad/s²)	$\theta''_0 \left(\text{ou } \frac{d\omega}{dt} \text{ ou } \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ ou } \omega'_0\right)$ constante
Vitesse angulaire (rad/s)	$\theta' = \theta''_0\ (t - t_0) + \theta'_0$ (ou ω)
Angle balayé (rad)	$\theta = \frac{1}{2}\theta''_0 (t - t_0)^2 + \theta'_0 (t - t_0) + \theta_0$

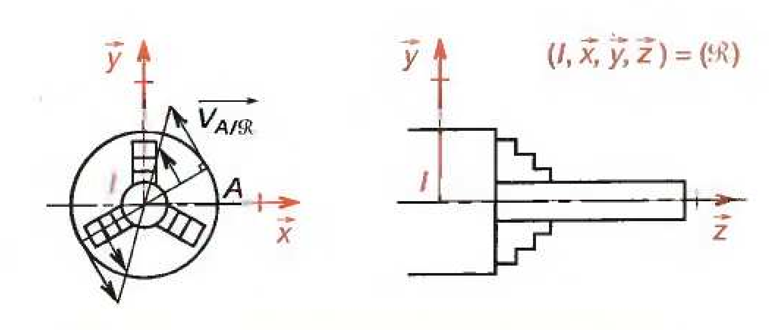
27.3 Exemple de calcul

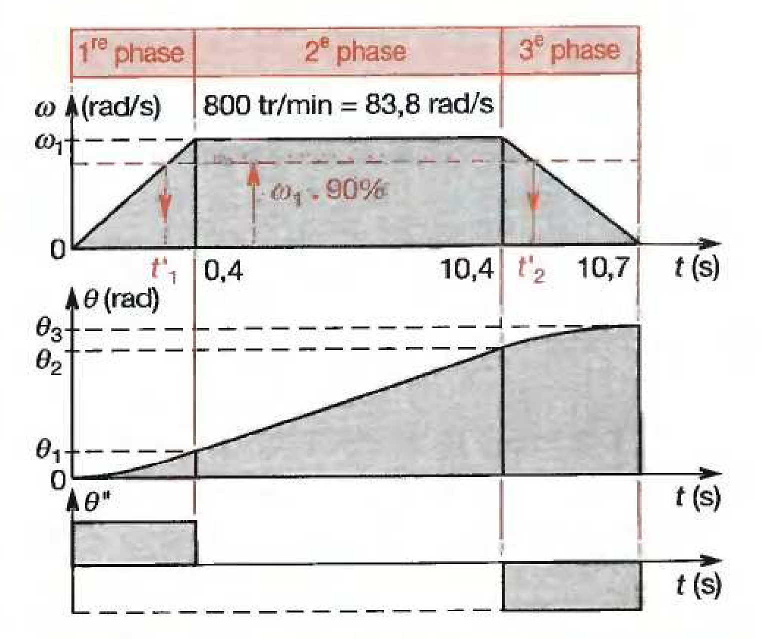
Une broche de tour atteint la vitesse de 800 tr/min en 0,4 s, d'un mouvement uniformément accéléré. L'usinage s'effectue ensuite à vitesse constante pendant 10 s. Enfin l'arrêt se produit, en 0,3 s, d'un mouvement uniformément décéléré.

On souhaite :

- tracer les diagrammes de ce mouvement ;
- écrire les lois des mouvements de chaque phase ;
- connaître les instants entre lesquels 90% au moins de la vitesse est atteinte.

EXEMPLE DE CALCUL





1re phase : $t \in (0 ; 0,4)$
$\theta''\ (= \omega' = d\omega/dt) = 83{,}8 / 0{,}4 = 209$ rad/s²
$\omega\ (= \theta' = d\theta/dt) = 209\ (t - 0) + 0 = 209\ t$
$\omega_{(90\%)} = 83{,}8 \times 0{,}9 = 75{,}4$ rad/s
Donc $75{,}4 = 209\ t'_1 \Rightarrow t'_1 = 0{,}36$ s
$\theta_{(t)} = 1/2 . 209\ (t - 0)^2 + 0\ (t - 0) + 0 = 104{,}7\ t^2$
$\theta_{(0,4)} = 16{,}76$ rad $= 2{,}67$ tr
2e phase : $t \in (0{,}4 ; 10{,}4)$
$\omega_1\ (= \theta'_1$ constante$) = 83{,}8$ rad/s
$\omega'\ (= \theta'') = 0$
$\theta_{(t)} = 83{,}8\ (t - 0{,}4) + 16{,}76$
$\theta_{(10,4)} = 83{,}8 \times 10 + 16{,}76 = 855$ rad $= 136$ tr
3e phase : $t \in (10{,}4 ; 10{,}7)$
$\theta''(= d\omega/dt = \omega') = -83{,}8/0{,}3 = -279$ rad/s²
$\theta'_{(t)}\ (= \omega) = -279\ (t - 10{,}4) + 83{,}8$
$\theta'_{(90\%)} = 75{,}4$ rad/s (voir ci-dessus)
Donc $75{,}4 = -279\ (t'_2 - 10{,}4) + 83{,}8$
D'où $t'_2 = 10{,}7$ s
$\theta_{(t)} = -1/2\ (279)\ (t - 10{,}4)^2 + 83{,}8\ (t - 10{,}4) + 855$
$\theta_{(10,7)} = -139{,}6\ t^2 \times 0{,}3^2 + 83{,}8 \times 0{,}3 + 855$
$\theta_{(10,7)} = 279$ rad $= 136$ tr

28 Mouvement plan sur plan

28.1 Définition

Deux solides (S_0) et (S_1) sont en mouvement plan sur plan lorsqu'un plan réel ou fictif de l'un reste constamment en contact avec un plan réel ou fictif de l'autre.

CONSÉQUENCES :

- L'étude se conduit dans tout plan parallèle à celui du mouvement.
- On associe un repère de référence à l'un des solides (repère ($\mathcal{R}_0$) lié à (S_0) par exemple) et l'on étudie le mouvement de (S_1) par rapport à ($\mathcal{R}_0$).

28.2 Champ des vecteurs vitesses

- Tous les points d'un même solide ont même vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$.
- À un instant donné, les vitesses linéaires $\overrightarrow{V_{A\in S1/S0}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S1/S0}}$ de deux points A et B de (S_1) sont généralement différentes en direction, sens et intensité. Toutefois, (S_1) semble tourner autour d'un point fixe I situé à l'intersection des perpendiculaires en chaque point aux vecteurs vitesses linéaires.

***I* est le centre instantané de rotation (C.I.R.)**

- À l'instant considéré – correspondant à une image photographique de l'objet (S_1) en mouvement plan – on peut utiliser les relations du mouvement circulaire (§ 26.5) :

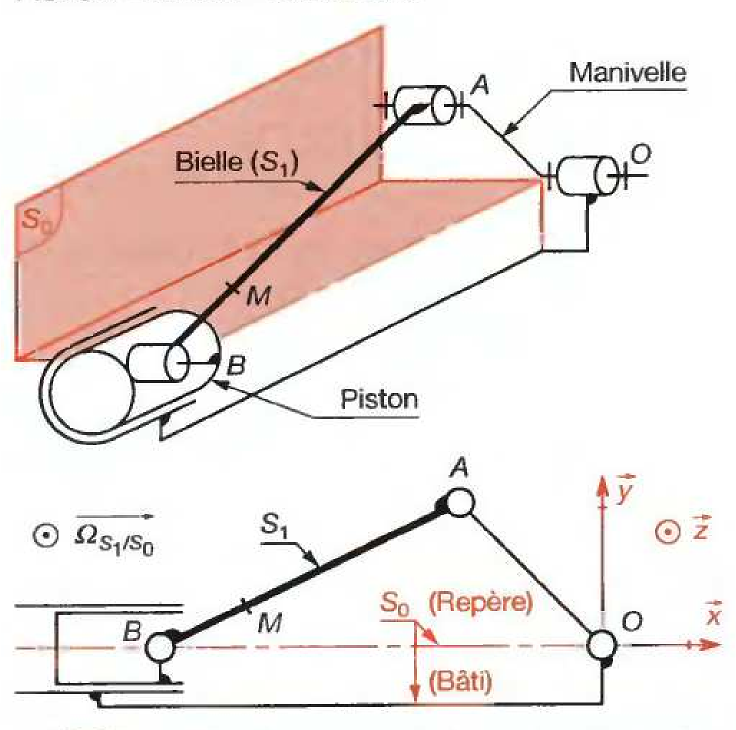
$$\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} = \omega . \vec{z_0} \qquad \overrightarrow{V_{M\in S1/S0}} = \overrightarrow{MI} \times \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$$

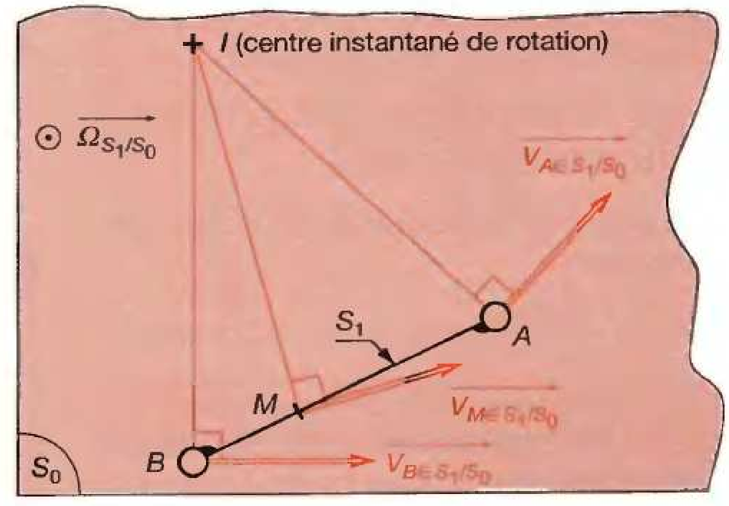
- Le champ des vitesses est représentable par un torseur cinématique exprimé en M quelconque ou au C.I.R. I :

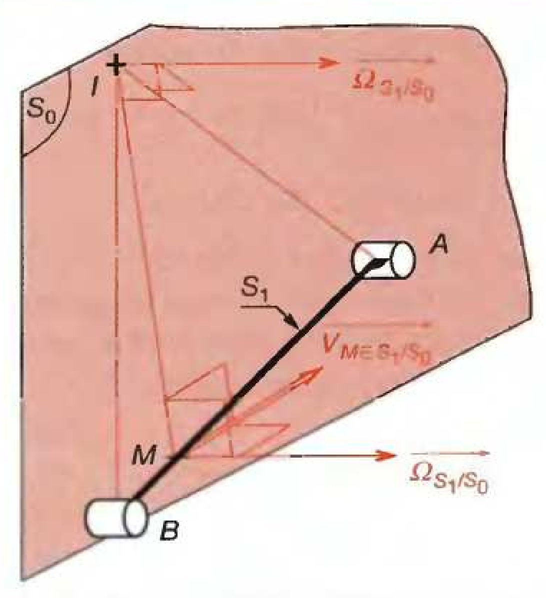
$$\{\vartheta_{S1/S0}\} = {}_M\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} \\ \overrightarrow{V_{M\in S1/S0}}\end{matrix}\right\} = {}_I\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

- Les relations entre moments d'un torseur (§ 74) permettent de retrouver tous ces résultats fondamentaux.

PISTON – BIELLE – MANIVELLE







28.3 Mouvements plan sur plan particuliers

28.31 Solide en rotation par rapport à un axe fixe

(Voir également chapitre 26.)

- Un plan du solide (S), perpendiculaire à l'axe de rotation $(O, \vec{z})$ reste constamment dans un plan fixe parallèle à $(O, \vec{x}, \vec{y}) = (\mathcal{R})$.
- En projection sur $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, tous les points décrivent des trajectoires circulaires de centre O.
- Au point O, le torseur cinématique s'écrit :

$$_O\{\vartheta_{S/\mathcal{R}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} & \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ où } \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} = \omega \cdot \vec{z}$$

EXEMPLE :

(S) tourne autour de $(O, \vec{z})$ dans le sens indiqué ci-contre, à 300 tr/min. Alors, $\omega = -300 \cdot 2\pi/60 = -31{,}4$ rad/s.

- La vitesse de tous les points s'en déduit ; par exemple :

$$\overrightarrow{V_{A \in S/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(O, \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}) = \overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} \text{ * (§ 76.1)}$$

et par conséquent : $\|\overrightarrow{V_{A \in S/\mathcal{R}}}\| = |\omega| \cdot AO$.

Pour les autres points de (S), $|\omega|$ est le même ; seule la distance AO varie.

Dans un mouvement de rotation, la vitesse linéaire des points est proportionnelle à leur distance à l'axe de rotation. Ils ont même vitesse angulaire.

28.32 Solide en translation quelconque dans un plan

L'ensemble (S), ci-contre, garde une direction constante dans le repère : il est donc en translation (chapitre 22) et sa vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}$ est nulle.

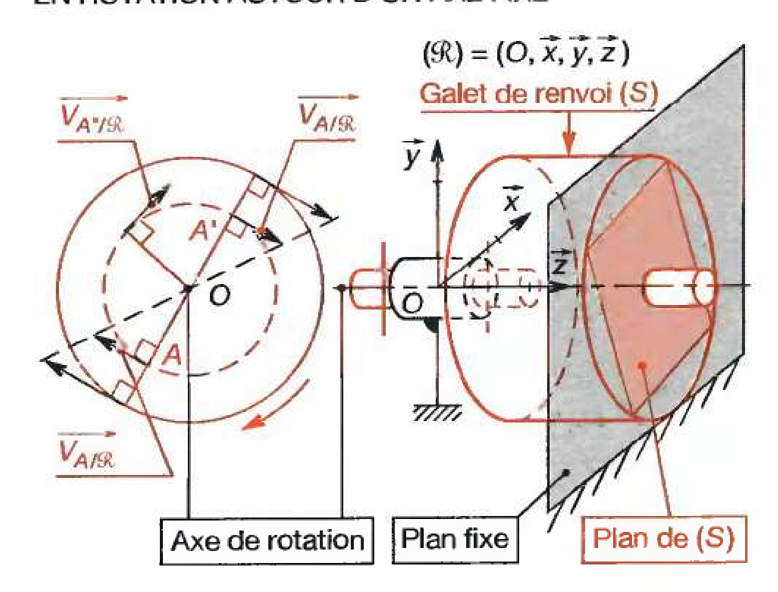
En A, le torseur cinématique s'écrit :

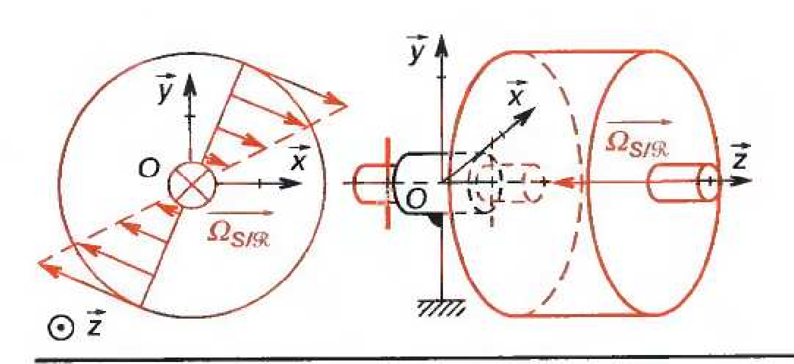
$$_A\{\vartheta_{S/\mathcal{R}}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} & \overrightarrow{V_{A \in S/\mathcal{R}}} \end{Bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{V_{B \in S/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{V_{A \in S/\mathcal{R}}}$$

Dans un mouvement de translation, tous les points ont la même vitesse linéaire et une vitesse angulaire nulle.

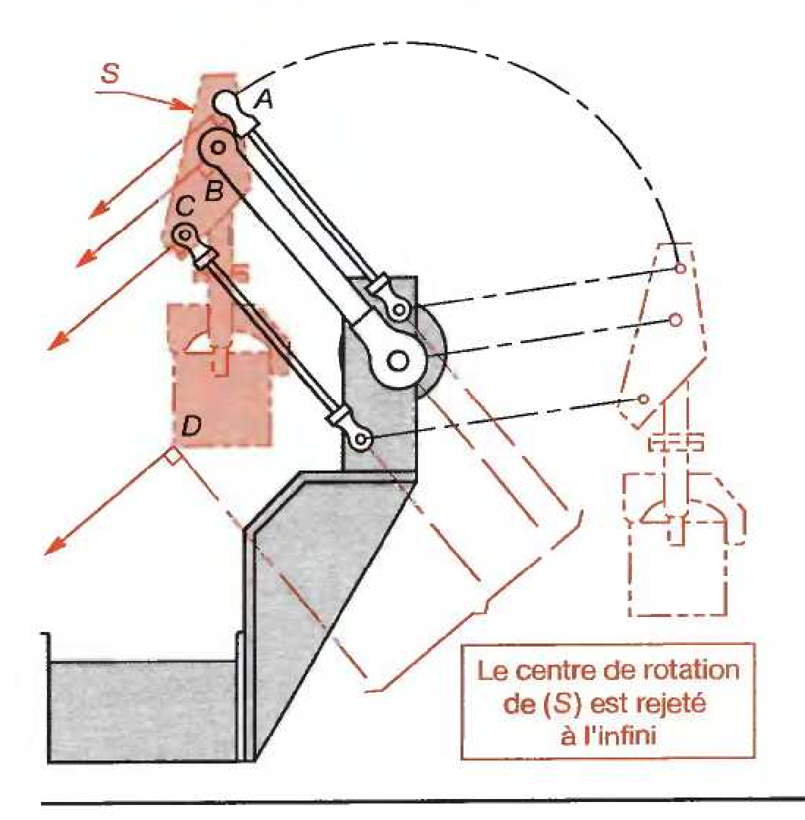
* $\times$: signe du produit vectoriel ($\wedge$ est toléré avec réserves ; voir § 70.6).

RÉPARTITION DES VITESSES POUR UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE





RÉPARTITION DES VITESSES POUR UN SOLIDE EN TRANSLATION DANS UN PLAN



28.4 Équiprojectivité des vitesses des points d'un solide

■ Les vitesses d'un point d'un solide se déduisent de son torseur cinématique (§ 28.2) :

$\{\vartheta_{S/\Re}\} = {}_B\{\overrightarrow{\Omega_{S/\Re}} \;\; \overrightarrow{V_{B\in S/\Re}}\}$ et

$$\overrightarrow{V_{A\in S/\Re}} = \overrightarrow{V_{B\in S/\Re}} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{\Omega_{S/\Re}}$$

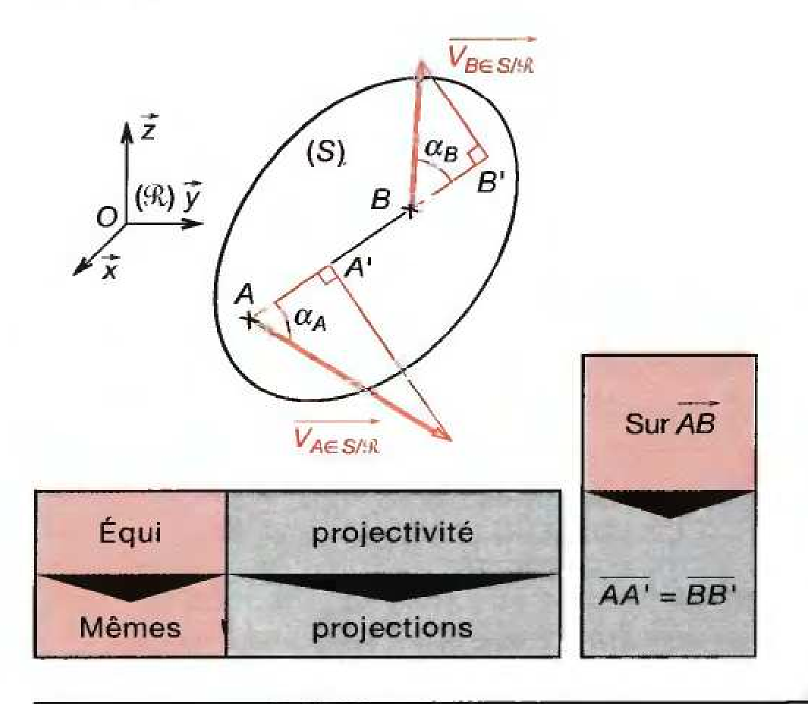
■ En multipliant scalairement chaque terme par $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{V_{A\in S/\Re}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S/\Re}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\|\overrightarrow{V_{A\in S/\Re}}\| \cdot \cos\alpha_A = \|\overrightarrow{V_{B\in S/\Re}}\| \cdot \cos\alpha_B$$

Si A et B sont deux points distincts d'un solide, la projection (algébrique) de la vitesse de A sur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la projection (algébrique) de la vitesse de B sur $\overrightarrow{AB}$.

ÉQUIPROJECTIVITÉ DES VITESSES DE DEUX POINTS D'UN SOLIDE



EXEMPLE :

En actionnant la gachette **2** du sécateur électronique ci-contre, on met la vis **1** en rotation par rapport à la poignée **0**.

Cela entraîne la translation de l'écrou **3** qui, par l'intermédiaire de la biellette **4**, actionne la rotation de la lame mobile **5** autour de l'axe C, fixe dans **0**.

Le schéma cinématique est représenté à l'instant où le point D approche du point E.

Connaissant la vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 3/0}}$ à cet instant, on détermine graphiquement $\overrightarrow{V_{D\in 5/0}}$:

■ $\overrightarrow{V_{A\in 3/0}}$ (connu) $= \overrightarrow{V_{A\in 4/0}}$ (liaison pivot en A).

■ La projection de $\overrightarrow{V_{A\in 4/0}}$ sur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la projection de $\overrightarrow{V_{B\in 4/0}}$ sur $\overrightarrow{AB}$: $\overline{AH_A} = \overline{BH_B}$.
(Attention aux sens et à l'angle droit.)

■ $\overrightarrow{V_{B\in 4/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 5/0}}$ (liaison pivot en B).

■ $\overrightarrow{V_{B\in 5/0}}$ est perpendiculaire à CB.
On en déduit alors $\overrightarrow{V_{B\in 5/0}}$.

■ $\|\overrightarrow{V_{B\in 5/0}}\| = \|\overrightarrow{V_{B'\in 5/0}}\|$ si $CB = CB'$ avec B' sur CD.
On connaît donc $\overrightarrow{V_{B'\in 5/0}}$.

■ $\overrightarrow{V_{D\in 5/0}}$ est perpendiculaire à CD
$\overrightarrow{V_{D\in 5/0}}$ est proportionnel à $\overrightarrow{V_{B'\in 5/0}}$.

En prolongeant le tracé passant par C et l'extrémité de $\overrightarrow{V_{B'\in 5/0}}$, on obtient $\overrightarrow{V_{D\in 5/0}}$.

SÉCATEUR ÉLECTRONIQUE

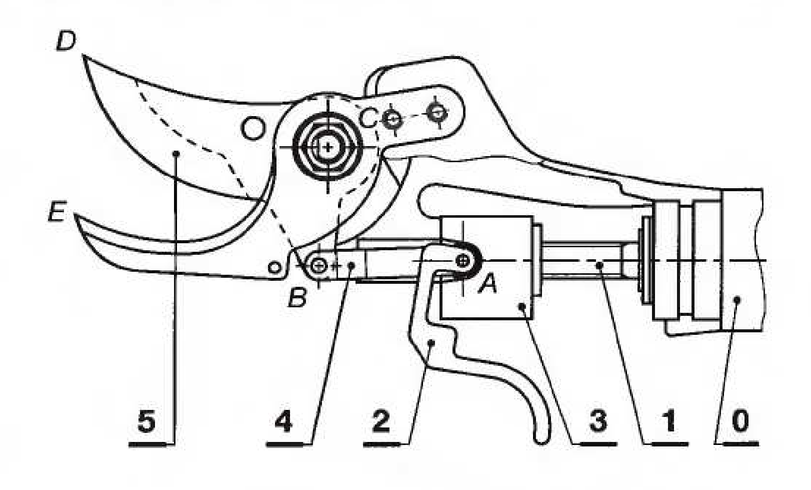
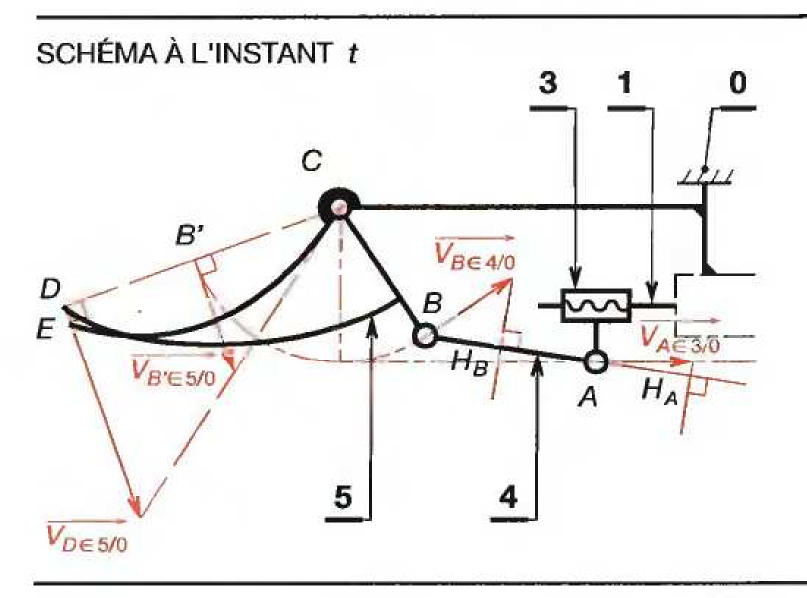


SCHÉMA À L'INSTANT t



28.5 Centre instantané de rotation (C.I.R.)

28.51 Définition du C.I.R.

Dans tout mouvement plan sur plan de solides, il existe à un instant donné un point où la vitesse relative est nulle. Ce point se nomme «centre instantané de rotation».

- Ce point est défini à un instant donné. Il peut varier au cours du temps et du mouvement.
- Ce point est rejeté à l'infini dans le cas de la translation.

28.52 Détermination du C.I.R. (I)

Les points I et A appartenant au même solide (S), il doit y avoir équiprojectivité des vitesses $\overrightarrow{V_{I\in S/\mathcal{R}}}$ et $\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}}}$ sur $\overrightarrow{IA}$, (§ 28.4).

Comme $\overrightarrow{V_{I\in S/\mathcal{R}}} = \vec{0}$, ceci ne peut être vérifié que si $\overrightarrow{IA}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}}}$.

Le C.I.R. I se situe sur une perpendiculaire à chaque vecteur-vitesse.

- On peut déterminer la vitesse d'autres points du solide, connaissant le C.I.R.

28.6 Base et roulante

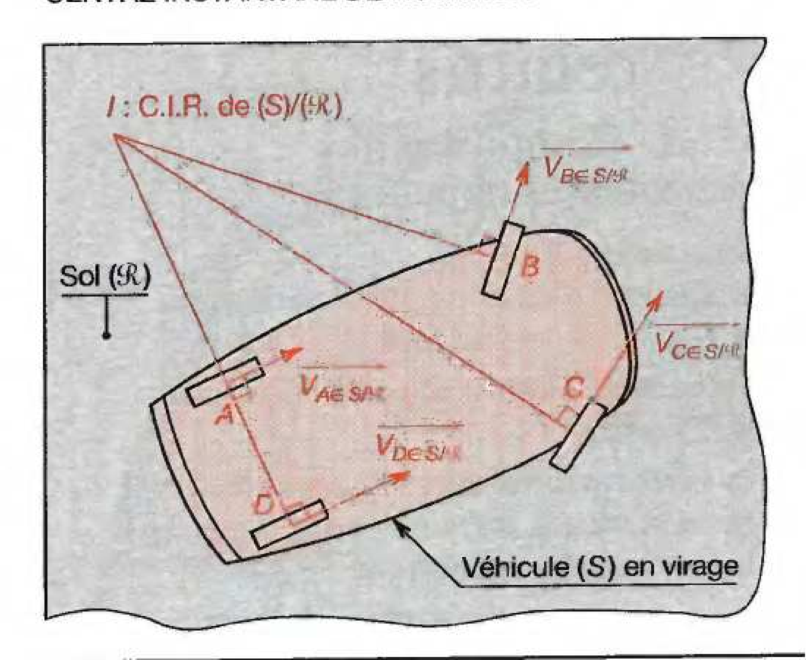
Au cours du temps, le C.I.R. se déplace généralement et décrit une trajectoire dans le solide de référence auquel on a attaché le repère ($\mathcal{R}$). Il décrit aussi une trajectoire dans le solide (S) en mouvement par rapport à ($\mathcal{R}$).

La trajectoire du C.I.R. dans le repère de référence s'appelle la «base du mouvement».

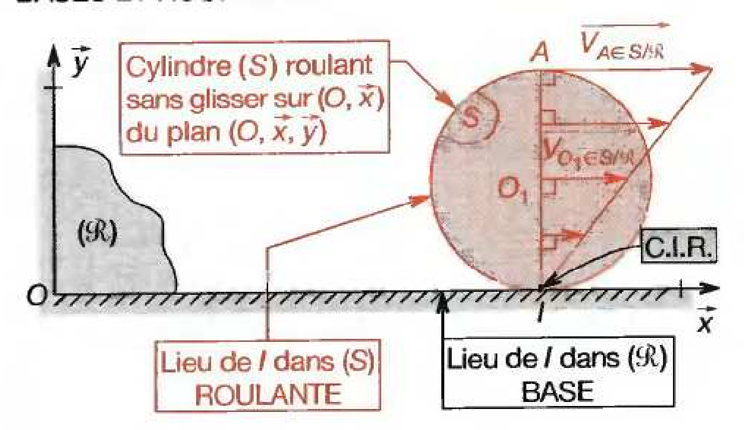
La trajectoire du C.I.R. dans le solide (S) mobile par rapport à ($\mathcal{R}$) s'appelle «roulante du mouvement».

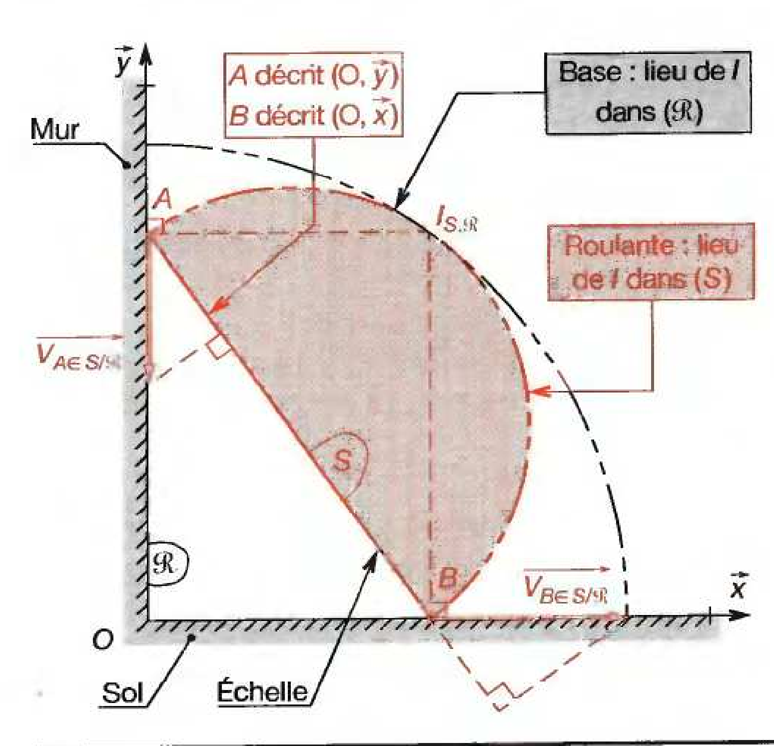
- Base et roulantes sont tangentes au C.I.R. (I).
- Tracer les configurations successives d'un mécanisme sur feuille de calque, le référentiel étant dessous sur feuille quelconque. Piquer à l'aide d'un compas : les trous de la feuille de calque appartiennent à la roulante et ceux du dessous à la base.

CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION



BASES ET ROULANTES





29 Mouvements relatifs

29 ■ 1 Composition des vitesses angulaires

Soit deux solides S_1 et S_2 :

- S_1 tourne de θ_1 rad autour de $(O, \vec{z_0})$, par rapport à S_0 ;
- S_2 tourne de θ_3 rad autour de $(O, \vec{z_0})$, par rapport à S_1.

Il en résulte que S_2 tourne alors de $\theta_2 = \theta_1 + \theta_3$ rad autour de $(O, \vec{z_0})$, par rapport à S_0.

Par dérivation sur la variable temps t, on obtient la relation entre les vitesses angulaires. Soit :

$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \theta'_{1(t)} \cdot \vec{z_0}$: vitesse angulaire de S_1/S_0 ;

$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \theta'_{2(t)} \cdot \vec{z_0}$: vitesse angulaire de S_2/S_0 ;

$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \theta'_{3(t)} \cdot \vec{z_0}$: vitesse angulaire de S_2/S_1.

($\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ se désigne «vitesse angulaire relative de S_2/S_1»).

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\theta'_{2(t)}\, \vec{z_0} = \theta'_{3(t)}\, \vec{z_0} + \theta'_{1(t)}\, \vec{z_0} = (\theta'_{3(t)} + \theta'_{1(t)})\, \vec{z_0}.$$

- En généralisant :

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/i}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{i/0}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION :

Un train d'engrenage épicycloïdal se compose :

- d'un planétaire **1** de $Z_1 = 28$ dents,
- d'une roue **2** de $Z_2 = 24$ dents,
- d'une roue **3** de $Z_3 = 34$ dents,
- d'une couronne liée au bâti, de $Z_0 = 86$ dents.

Le porte-satellite **4** tourne, par rapport à **0**, à la vitesse de 750 tr/min. Le module vaut $m = 1{,}5$ mm.

Sur une figure à l'échelle semblable à celle ci-contre, déterminer graphiquement :

a) la vitesse angulaire de **1** par rapport à **0** ;

b) la vitesse angulaire de **(2-3)** par rapport à **4**.

(La connaisance de ces vitesses est utile pour le calcul des paliers.)

- Éléments de solution :

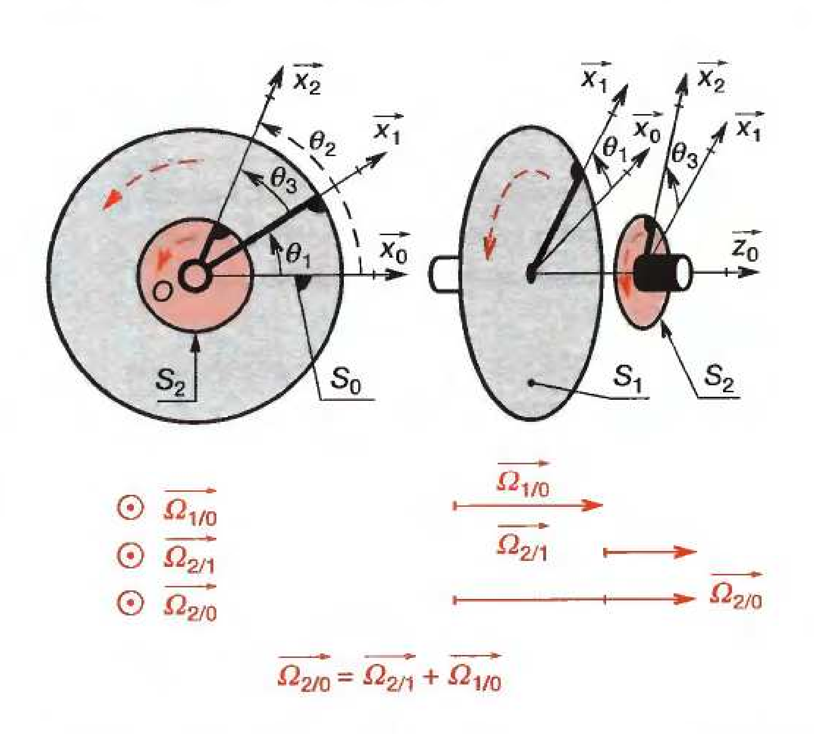
Sur la figure en plan correspondant à la vue de droite, on peut tracer $\|\overrightarrow{V_{A\in 4/0}}\| = \omega_{4/0} \cdot OA = 78{,}5 \times 39 \cdot 10^{-3} = 3{,}06$ m/s.

Le C.I.R. $I_{(2\text{-}3)-0}$ permet d'en déduire $\|\overrightarrow{V_{B\in 2\text{-}3/0}}\| \approx 5{,}2$ m/s.

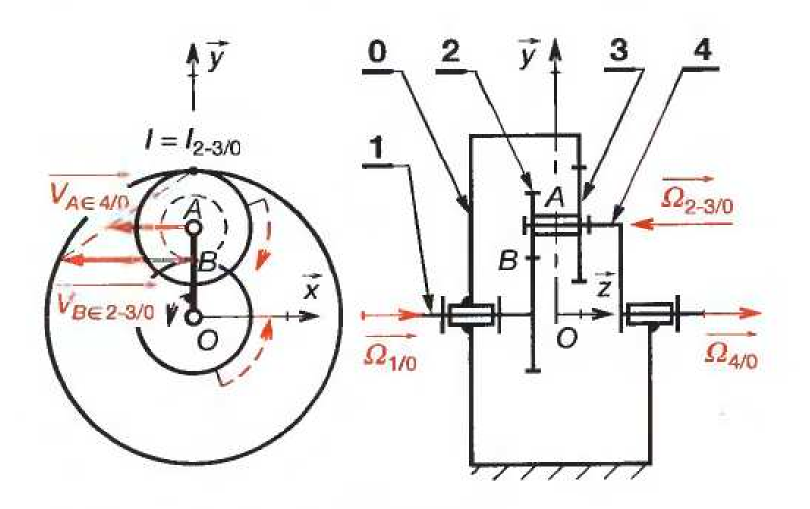
D'où $\|\overrightarrow{\Omega_{2\text{-}3/0}}\| = |\omega_{2\text{-}3/0}| = \|\overrightarrow{V_{B\,2\text{-}3/0}}\| / I_{(2\text{-}3)\text{-}0}B = 120$ rad/s.

Comme $\overrightarrow{V_{B\in 2\text{-}3/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$, il vient $\omega_{1/0} \approx 2\,380$ tr/min.

COMPOSITION DES VITESSES ANGULAIRES

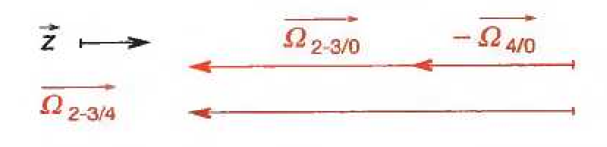


TRAIN D'ENGRENAGE ÉPICYCLOÏDAL



- $\overrightarrow{V_{B\in 2\text{-}3/0}}$ se déduit de $\overrightarrow{V_{A\in 2\text{-}3/0}}$ et $I_{(2\text{-}3)/0}$
- $\|\overrightarrow{\Omega_{2\text{-}3/0}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{V_{B\in 2\text{-}3/0}}\|}{IB} = 120$ rad/s $\approx 1\,145$ tr/min
- $\|\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{V_{B\in 2\text{-}3/0}}\|}{OB} \approx 260$ rad/s $\approx 2\,480$ tr/min
- $\overrightarrow{\Omega_{2\text{-}3/4}} = \overrightarrow{\Omega_{2\text{-}3/0}} + \overrightarrow{\Omega_{0/4}} = \overrightarrow{\Omega_{2\text{-}3/0}} - \overrightarrow{\Omega_{4/0}}$

a pour norme : $\|\overrightarrow{\Omega_{2\text{-}3/0}}\| \approx 200$ rad/s $\approx 1\,900$ tr/min



29.2 Composition des vitesses linéaires

29.21 Répères absolus et relatifs

Lorsque la charge suspendue M se déplace à hauteur constante sous l'action conjuguée du mouvement du pont roulant **1** et du chariot **2**, sa trajectoire ne semble pas simple. Pourtant, elle résulte :

a) du mouvement rectiligne selon $\vec{x_0}$ de **1** ;

b) du mouvement rectiligne selon $\vec{y_0}$ de **2**.

On appelle :

> **Repère absolu ($\mathcal{R}_0$) : le repère fixe servant de référence.**
> **Repère relatif ($\mathcal{R}_1$) : un repère mobile par rapport à ($\mathcal{R}_0$).**

29.22 Vitesses absolue, relative, d'entraînement

- **Vitesse absolue** $\vec{V_a}$: c'est la vitesse du point M de **3** dans son mouvement par rapport au repère fixe ($\mathcal{R}_0$).

$$\vec{V_a} = \overrightarrow{V_{M \in 3/\mathcal{R}0}} \text{ (que l'on peut noter } \overrightarrow{V_{M\in 3/0}})$$

Elle est tangente à la trajectoire de $M \in \mathbf{3}$ dans ($\mathcal{R}_0$).

- **Vitesse relative** $\vec{V_r}$: c'est la vitesse du point $M \in \mathbf{3}$ dans son mouvement par rapport au repère relatif ($\mathcal{R}_1$).

$$\vec{V_r} = \overrightarrow{V_{M\in 3/\mathcal{R}1}} \text{ (que l'on peut noter } \overrightarrow{V_{M\in 3/1}})$$

Elle est tangente à la trajectoire de $M \in \mathbf{3}$ dans ($\mathcal{R}_1$).

- **Vitesse d'entraînement** $\vec{V_e}$: c'est la vitesse par rapport à ($\mathcal{R}_0$) d'un point du repère mobile ($\mathcal{R}_1$) qui se trouve confondu avec M à l'instant considéré.

$$\vec{V_e} = \overrightarrow{V_{M\in\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}} \text{ (que l'on peut noter } \overrightarrow{V_{M\in 1/0}})$$

Cette vitesse ne dépend que du mouvement de ($\mathcal{R}_1$).

- Relation :

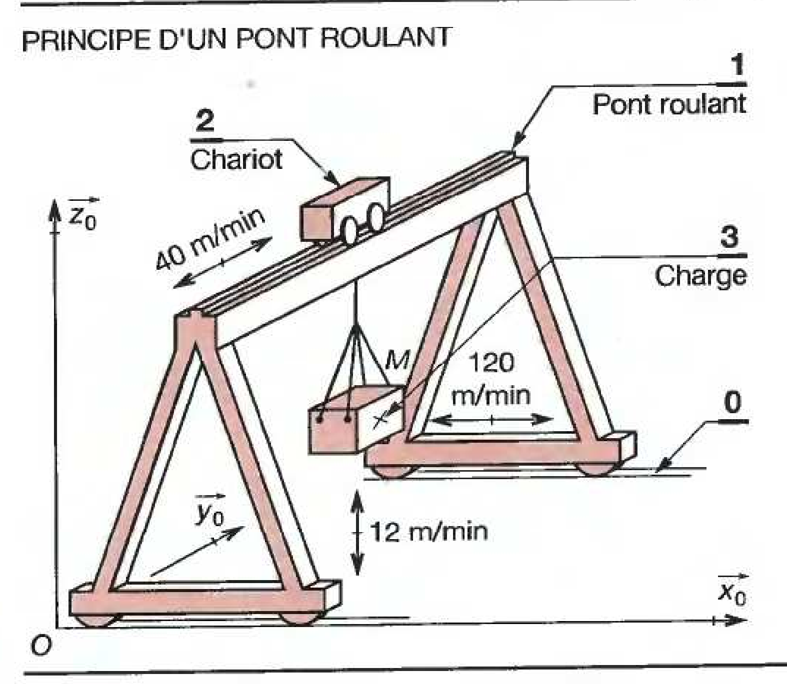
$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$
$$\overrightarrow{V_{M\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{M\in 3/1}} + \overrightarrow{V_{M\in 1/0}}$$

- Généralisation :

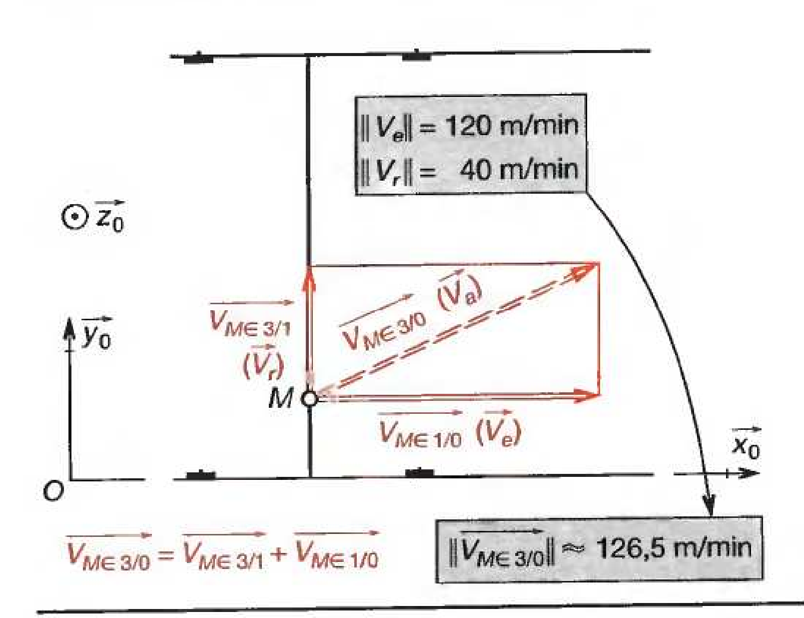
$$\overrightarrow{V_{M\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{M\in 3/1}} + \overrightarrow{V_{M\in 1/2}} + \overrightarrow{V_{M\in 2/i}} + \ldots \overrightarrow{V_{M\in i/0}}$$

Si le treuil du chariot lève de plus la charge M, on obtient la relation ci-contre.

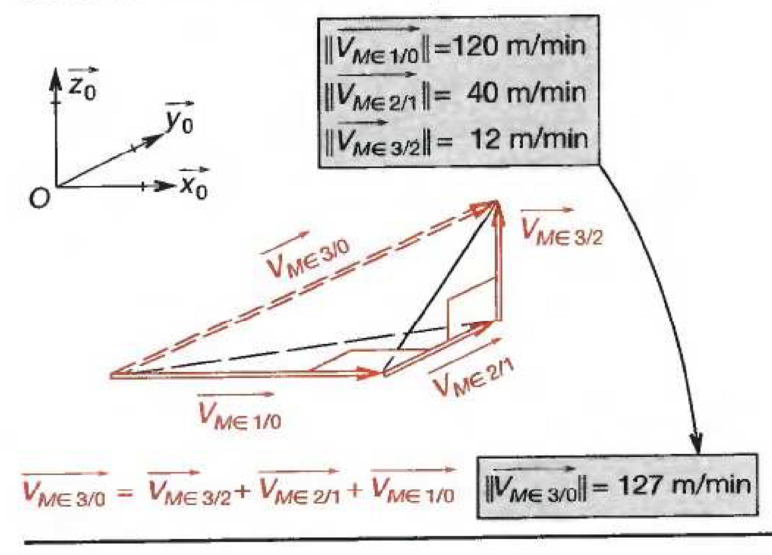
PRINCIPE D'UN PONT ROULANT



COMPOSITION DES VITESSES (SANS LEVÉE)



COMPOSITION DES VITESSES (AVEC LEVÉE)



29.23 Exemple 1

Soit une commande par excentrique. La came circulaire **1** de diamètre 62 mm tourne autour de $(O, \vec{z_0})$ à 100 tr/min. Elle est excentrée de $OO_1 = 15$ mm. Pour $\theta = 45°$ (fig. ci-contre), déterminer graphiquement la vitesse d'un point M de la tige **2**.

SOLUTION :

Les pièces **1** et **2** sont en contact au point I. Ce point I réalise la «transmission cinématique du mouvement». Définissons les vecteurs vitesses en I :

$\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$, comme tous les points de **1**, $I \in$ **1** tourne autour de $(O, \vec{z_0})$ à 100 tr/min ;

$$\|\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}\| = 100 \times \frac{2\pi}{60} \times OI \approx 450 \text{ mm/s } (OI, \text{ mesuré}).$$

$\overrightarrow{V_{I\in 1/2}}$ se situe dans le plan tangent au contact, donc selon $(I, \vec{y_0})$.

$\overrightarrow{V_{I\in 2/0}}$, comme tous les points de **2**, translate selon $(I, \vec{x_0})$.

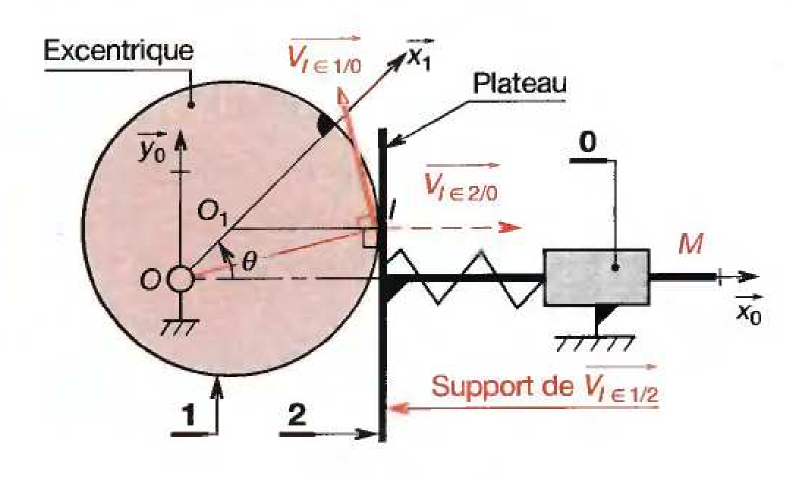
La composition des vitesses donne $\overrightarrow{V_{I\in 2/0}}$, donc $\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}$.

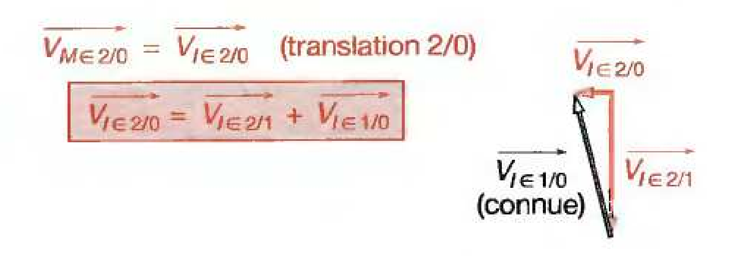
On trouve $\|\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}\| \approx 120$ mm/s.

REMARQUE :

> **Faire attention au vecteur $\overrightarrow{V_{I\in 2/0}}$ qui est somme des deux autres vecteurs $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$.**

COMMANDE PAR EXCENTRIQUE





29.24 Exemple 2

Soit une presse à décolleter. Dans la configuration ci-contre, la tige **2** du vérin sort du cylindre **1** à la vitesse de 23 cm/s.

Déterminer graphiquement, la vitesse correspondante du poinçon **5**.

SOLUTION :

On connaît les trajectoires de E et de C dans $(\mathfrak{R}_0)$; le C.I.R. I_{30} s'en déduit aisément.

La vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 3/0}}$ est perpendiculaire à $I_{30}B$.

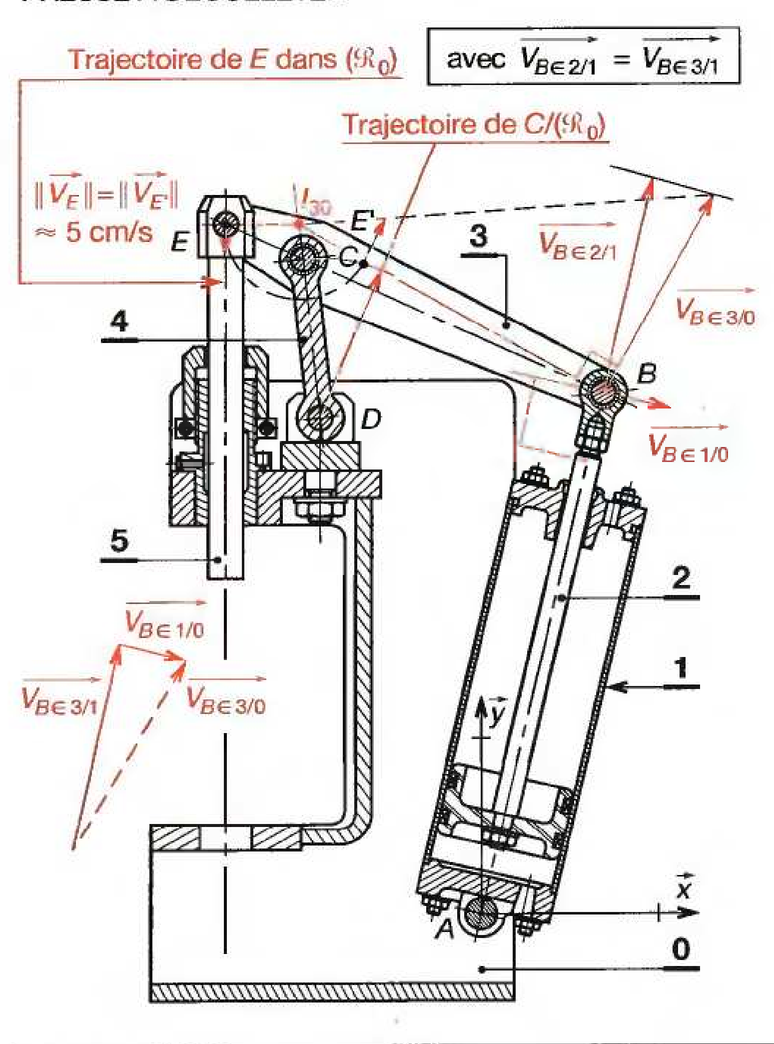
On connaît $\|\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}\| = 23$ cm/s $= \|\overrightarrow{V_{B\in 3/1}}\|$.

La composition des vitesses permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$$

On détermine alors les diverses vitesses puis $\|\overrightarrow{V_E}\| \approx$ **5 cm/s.**

PRESSE À DÉCOLLETER



29 ■ 3 Composition des accélérations

Considérons un bras manipulateur. Lorsque O est fixe et les angles α_1 et α_2 variables, le point M a un mouvement complexe.

Soit $(\mathcal{R}_1) = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ un repère lié au maillon **1** ;

Soit $(\mathcal{R}_2) = (O_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ un repère lié au maillon **2**.

29 ■ 31 Étude dans le repère relatif

Dans ce repère, M ne peut décrire qu'un arc de circonférence, de centre O_1, de rayon $O_1M = \ell$.

Il est donc soumis à une accélération relative :

Accélération relative $\vec{a_r} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}1}}$

Dans ce cas, les composantes intrinsèques donnent :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}1}} = -\ell \cdot \alpha'^2_2 \cdot \vec{x_2} + \ell \cdot \alpha''_2 \cdot \vec{y_2}$$

(voir § 21.64).

29 ■ 32 Étude du mouvement d'entraînement

L'entraînement provient du repère $(\mathcal{R}_1) = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

Le point M de ce repère, comme tous les autres qui lui sont liés, tourne autour de $(O, \vec{z})$ à la vitesse angulaire α'_1. Le point $M \in 1$ engendre une accélération d'entraînement.

Accélération d'entraînement $\vec{a_e} = \overrightarrow{a_{M\in 1/\mathcal{R}0}}$

29 ■ 33 Étude du mouvement absolu

C'est celui par rapport au repère fixe $(\mathcal{R}_0) = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$.

Accélération absolue $\vec{a_a} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}0}}$

29 ■ 34 Accélération de Corriolis

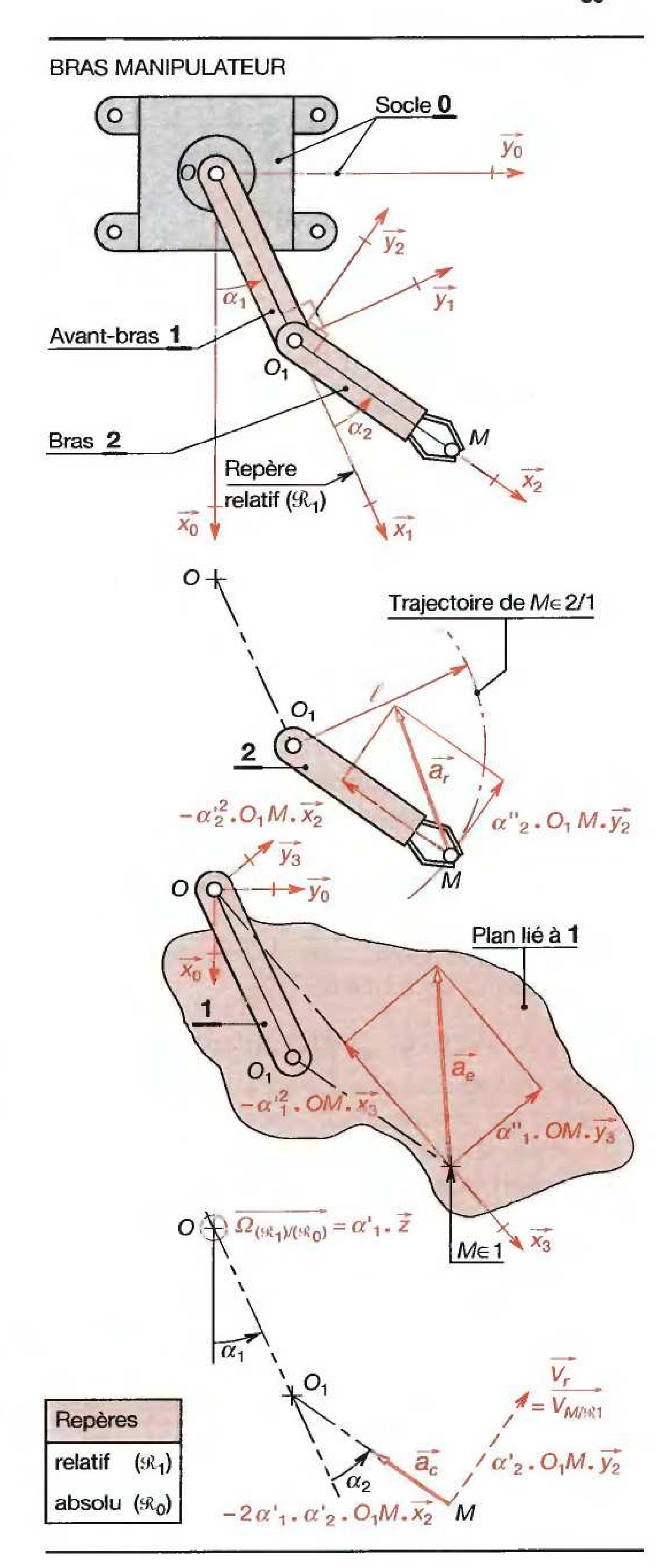
(complémentaire)

Elle se calcule à partir de $\vec{a_c} = 2\,\overrightarrow{\Omega_{(\mathcal{R}1/\mathcal{R}0)}} \times \overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}1}}$*

29 ■ 35 Relation

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}0}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}1}} + \overrightarrow{a_{M\in\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}} + 2\,\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}1/\mathcal{R}0}} \times \overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}1}}^*$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$



* Le signe × placé entre deux vecteurs est le signe normal du produit vectoriel (§ 70.6).

30 Actions mutuelles

30.1 Action ponctuelle

Si, au point A, un solide **1** exerce sur un solide **2** une force $\overrightarrow{A_{1/2}}$, réciproquement le solide **2** exerce sur **1** une force $\overrightarrow{A_{2/1}}$. C'est le **principe des actions mutuelles**.

Ces deux forces sont :

- colinéaires sur une droite passant par A,
- de même intensité,
- de sens opposés.

On dit qu'elles sont **directement opposées** et on écrit que :

$$\overrightarrow{A_{1/2}} = -\overrightarrow{A_{2/1}}$$

$\overrightarrow{A_{1/2}}$: force de point d'application A_2, exercée par le solide **1** sur le solide **2**.

$\overrightarrow{A_{2/1}}$: force de point d'application A_1, exercée par le solide **2** sur le solide **1**.

On distingue :

- **Les forces à distance entre deux corps :**

– Attraction terrestre : toujours attractive, c'est-à-dire dirigées vers l'extérieur de la matière (fig. 1) ;

– Électrostatique ou électromagnétique : attractives ou répulsives (fig. 1 ou 2).

- **Les forces de contact :** toujours répulsives, c'est-à-dire dirigées vers l'intérieur de la matière (fig. 3).

30.2 Action quelconque

L'action mécanique d'un solide **1** sur un solide **2** est modélisable en A par un torseur $_A\{A_{1/2}\}$. L'action du solide **2** sur le solide **1** s'exprime en A par le torseur $_A\{A_{1/2}\}$. Le **principe des actions mutuelles** permet d'affirmer que les deux torseurs sont égaux et opposés (fig.4).

$$_A\{A_{1/2}\} = -_A\{A_{2/1}\} \ ; \ _A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{1/2}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A1/2}}\end{matrix}\right\} = -_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{2/1}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}\end{matrix}\right\}$$

Ce qui implique :

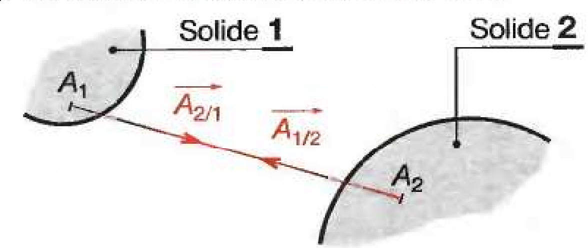
- deux résultantes directement opposées :

$$\overrightarrow{A_{1/2}} = -\overrightarrow{A_{2/1}}$$

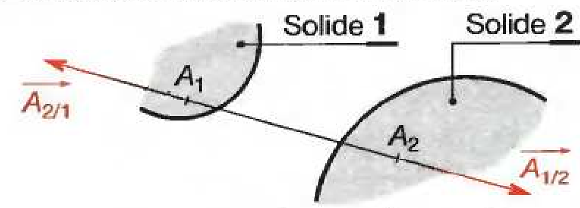
- deux moments en A directement opposés :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A1/2}} = -\overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}$$

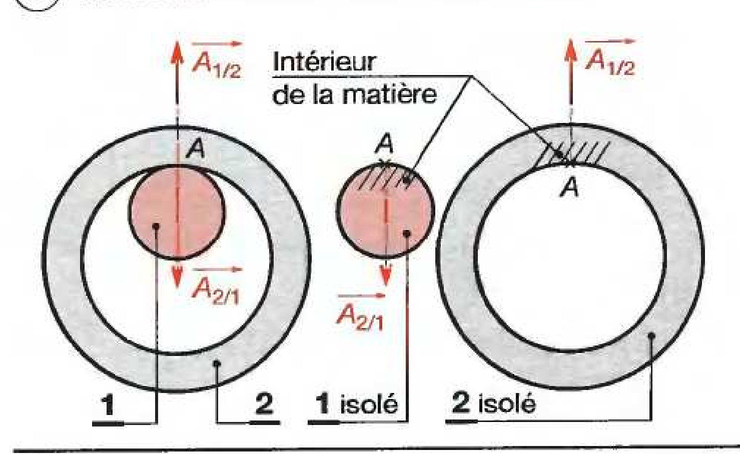
1 ACTIONS À DISTANCE ATTRACTIVES



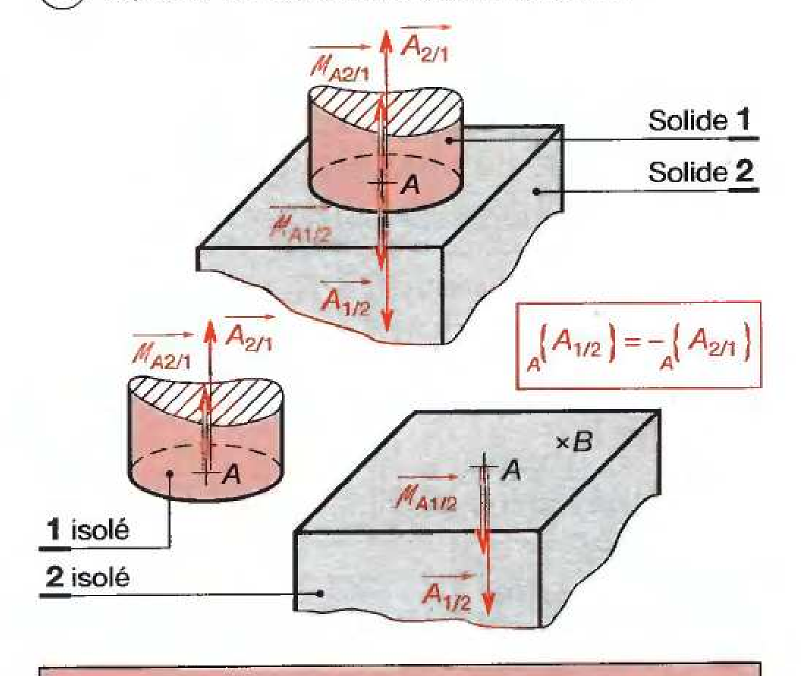
2 ACTIONS À DISTANCE RÉPULSIVES



3 ACTIONS DE CONTACTS PONCTUELS



4 ACTION DE CONTACTS SURFACIQUES



$_A\{A_{1/2}\}$ se lit : torseur des actions mécaniques de **1** sur **2**, de la zone de contact A, exprimé au point de réduction A. Ce torseur peut aussi s'exprimer au point B.

31 Principe fondamental de la statique

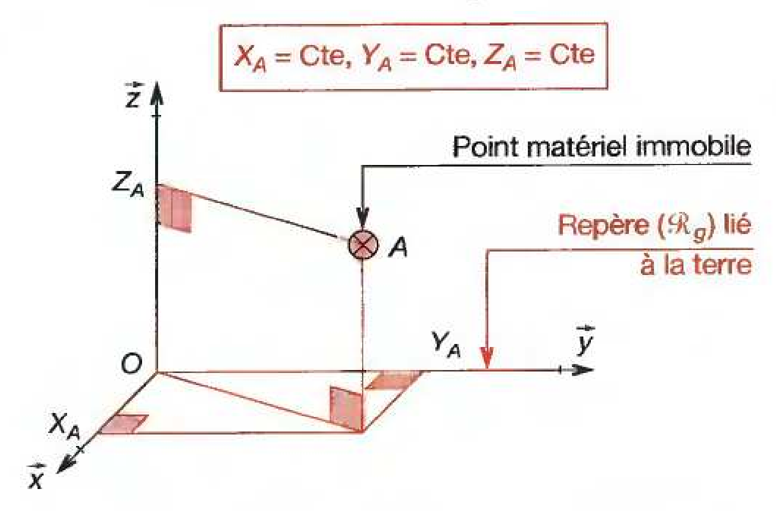
31 ■ 1 Principe de l'inertie Repère galiléen

Il existe au moins un repère privilégié ($\mathcal{R}_g$), appelé repère galiléen*, dans lequel tout point A, éloigné de tout autre corps, possède les propriétés suivantes :

- Si A est en mouvement, il est rectiligne uniforme : sa trajectoire est une droite et sa vitesse par rapport à ($\mathcal{R}_g$) est constante.
- Si A est immobile, il reste immobile dans ($\mathcal{R}_g$) : (ses coordonnées dans ($\mathcal{R}_g$) sont constantes).

REMARQUE :
Si le principe de l'inertie est valable dans un référentiel ($\mathcal{R}_g$), il l'est aussi dans tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à ($\mathcal{R}_g$).

EXEMPLE D'ÉQUILIBRE DANS ($\mathcal{R}_g$)



Pour un grand nombre de problèmes de mécanique, on prendra le repère terrestre comme repère galiléen avec une approximation suffisante.

31 ■ 2 Système matériel isolé :

Un système matériel est un ensemble de points matériels qui constituent un corps ou un ensemble de plusieurs corps, ou une portion de corps.

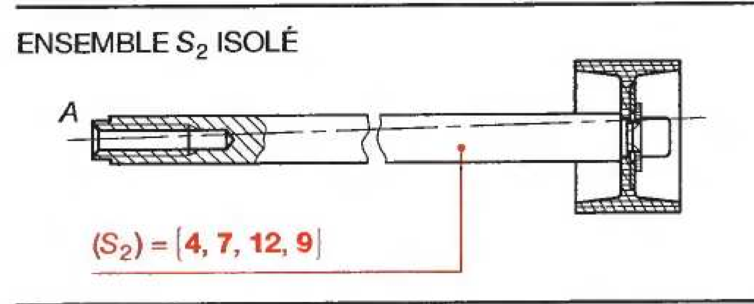
Isoler un système matériel c'est :

- considérer une partie d'un mécanisme ;
- recenser toutes les actions mécaniques qui lui sont appliquées.

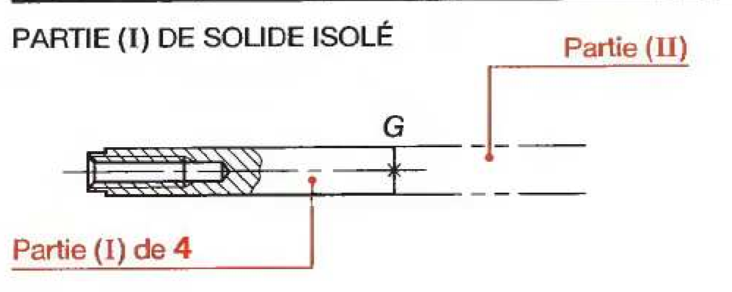
Un système matériel isolé peut-être :

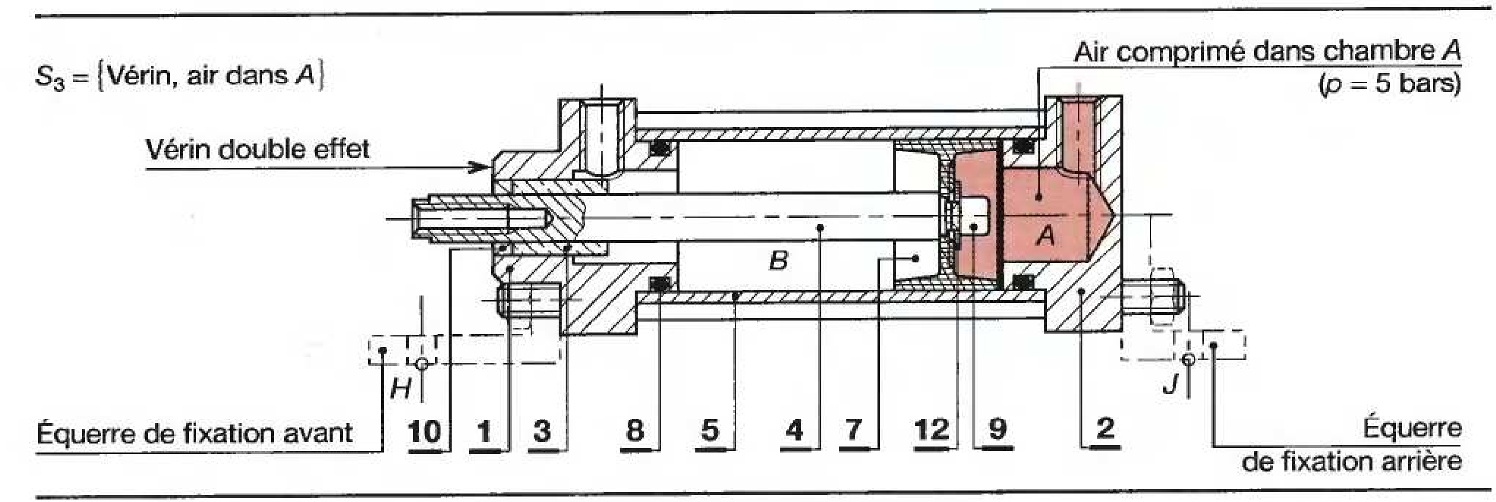
- un **solide indéformable** : la tige **4** seule : $(S_1) = \{4\}$;
- un **ensemble de solides** : l'ensemble mobile est constitué de solides : $(S_2) = \{4, 7, 12, 9\}$;
- une **portion de solide** : la partie (I) de la tige **4** ;
- un **fluide** (air comprimé) contenu dans la chambre du vérin ;
- un **fluide et les solides** qui le contiennent : $(S_3) = \{\text{vérin, air}\}$.

ENSEMBLE S_2 ISOLÉ



PARTIE (I) DE SOLIDE ISOLÉ





* Voir complément en dynamique § 56.2.

31.3 Actions extérieures Actions intérieures

$(S) = \{1, 2\}$ est isolé. Les actions mécaniques sur (S) sont :

- Les actions exercées par les solides qui n'appartiennent pas à (S) ou actions extérieures sur (S) notées : $\overrightarrow{F_{i\,\bar{S}/S}}$.

$(\bar{S})$ signifie « n'appartenant pas à (S) ».

Actions à distance : poids : $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$.

Actions de contact : $\overrightarrow{A_{3/4}}$, $\overrightarrow{B_{3/2}}$, $\overrightarrow{C_{3/1}}$.

- Les actions exercées par des solides appartenant à (S) sur des solides appartenant à (S) ou actions intérieures:

Actions à distance : nulles, ici. Actions de contact : $\overrightarrow{D_{1/2}}$, $\overrightarrow{D_{2/1}}$.

REMARQUE :

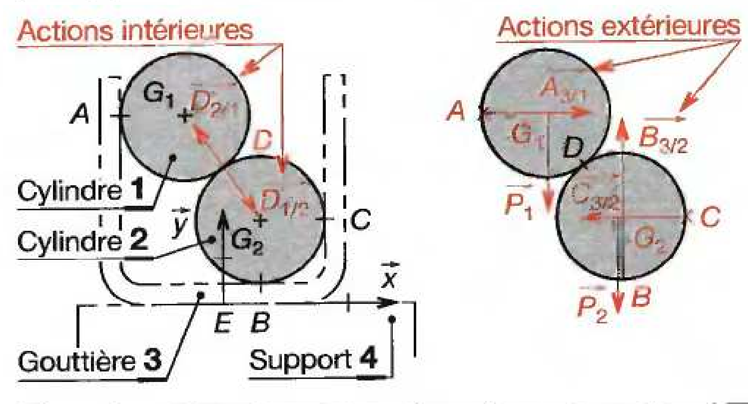
Pour toute action intérieure, l'action mutuelle directement opposée apparaît : $\overrightarrow{D_{1/2}} = -\overrightarrow{D_{2/1}}$ (voir chapitre 30).

La somme des actions intérieures est nulle car elles s'éliminent deux à deux. De même, pour leur moment en un point.

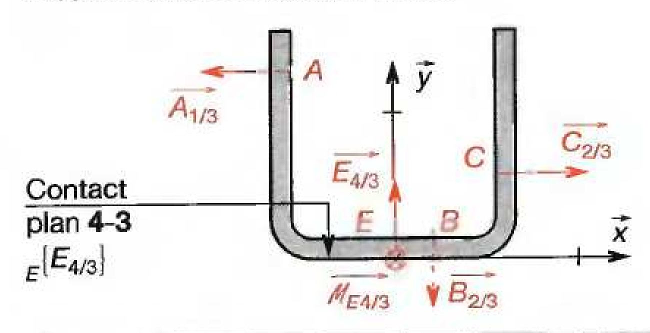
Le torseur des actions intérieures est nul.

ISOLEMENT DE $(S) = \{1, 2\}$

$(E, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie (chapitre 8)



ÉQUILIBRE DE LA GOUTTIÈRE 3



Notation : $_E\{E_{4/3}\}$ se lit : torseur associé aux actions mécaniques dans la liaison E de 4 sur 3 exprimé au point de réduction E.

31.4 Principe fondamental

Si un système matériel (S) isolé est en équilibre par rapport à un repère galiléen $(\mathcal{R}_g)$, le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur (S) est égal à un torseur nul*.

$$_A\{\mathcal{F}_{\bar{S}/S}\} = \{0\} \; ; \; _A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{S}/S}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,\bar{S}/S}} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \forall A \text{ de l'espace}$$

$_A\{\mathcal{F}_{\bar{S}/S}\}$ se lit : torseur associé aux actions mécaniques extérieures des corps n'appartenant pas à (S) sur (S) exprimé au point de réduction A.

D'où les deux théorèmes suivants :

- **Théorème de la résultante statique :**

Si (S) est en équilibre par rapport à un repère galiléen $(\mathcal{R}_g)$, la résultante des actions mécaniques extérieures à (S) est nulle : $\overrightarrow{R_{\bar{S}/S}} = \vec{0}$ (I).

- **Théorème du moment statique :**

Si (S) est en équilibre par rapport à un repère galiléen $(\mathcal{R}_g)$, le moment résultant des actions mécaniques extérieures à (S) est nul : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,\bar{S}/S}} = \vec{0}$ (II), $\forall A$ de l'espace.

REMARQUE :

Le principe fondamental s'applique aussi dans les cas suivants :

- (S) est en translation rectiligne à vitesse constante / $(\mathcal{R}_g)$;
- (S) est en rotation uniforme autour d'un axe fixe / $(\mathcal{R}_g)$ passant par le centre de masse et d'inertie.

EXEMPLE D'APPLICATION

- **3 est en équilibre dans $\mathcal{R}_g(E, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Il est soumis aux actions mécaniques extérieures :**

$$_A\{A_{1/3}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{1/3}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ; \quad _B\{B_{2/3}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{2/3}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_C\{C_{2/3}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{2/3}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ; \quad _E\{E_{4/3}\} = {}_E\begin{Bmatrix} \overrightarrow{E_{4/3}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{E4/3}} \end{Bmatrix}.$$

- **L'équilibre de $3/(\mathcal{R}_g)$ se traduit par :**

$$_E\{A_{1/3}\} + {}_E\{B_{2/3}\} + {}_E\{C_{2/3}\} + {}_E\{E_{4/3}\} = \{0\}.$$

- **Théorème de la résultante statique :**

$$\overrightarrow{A_{1/3}} + \overrightarrow{B_{2/3}} + \overrightarrow{C_{2/3}} + \overrightarrow{E_{4/3}} = \vec{0}. \qquad \text{(I)}$$

- **Théorème du moment statique en E :**

$$\overrightarrow{EA} \times \overrightarrow{A_{1/3}} + \overrightarrow{EC} \times \overrightarrow{C_{2/3}} + \overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{B_{2/3}} + \left(\overrightarrow{\mathcal{M}_{E4/3}} + \vec{0}\right) = \vec{0}. \text{(II)}$$

Ces équations vont se traduire soit :

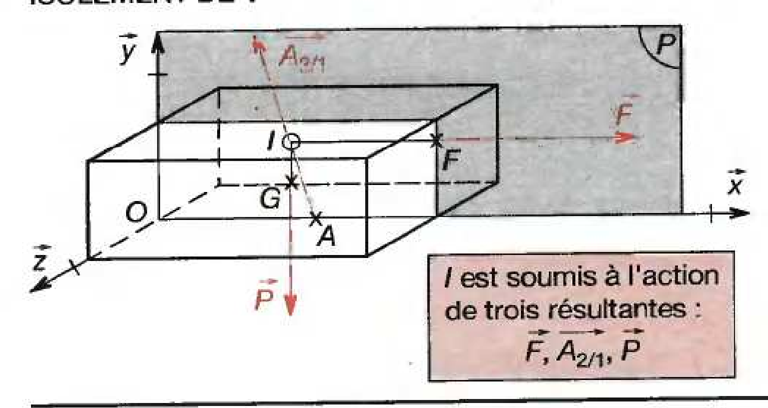
- **En projection dans un repère $(\mathcal{R}_g)$ par six ou trois équations d'équilibre**.**
- **Par des conditions graphiques d'équilibre***.**

* Attention : la réciproque n'est pas toujours vraie. ** Voir chapitres 40 et 41. *** Voir chapitres 42, 43, 44.

32 Adhérence Frottement

Les lois sur le frottement découlent de l'expérimentation de Colomb et Morin. On exerce sur un parallélépipède **1** de poids $\vec{P}$, en appui plan horizontal sur **2**, une force $\vec{F}$ située dans le plan de symétrie géométrique de **1**. En un point particulier A, le torseur de liaison **1-2** peut s'écrire sous la forme d'un glisseur (§ 9.7).

$${}_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ ; (Dans } O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \ {}_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

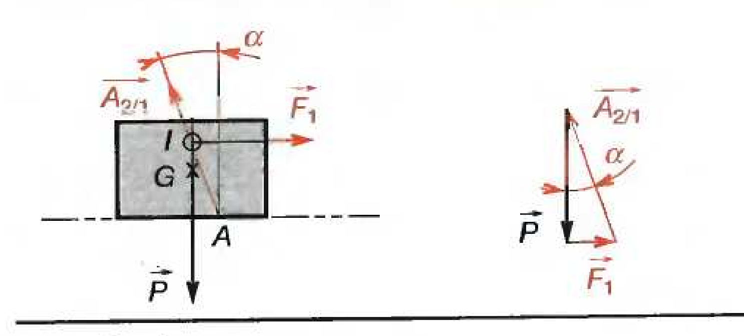


32 ▪ 1 Constatations

■ **1er cas : 1 est en équilibre** $(\vec{F_1} \neq \vec{0})$

$$\overrightarrow{A_{2/1}} + \vec{P} + \vec{F_1} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{A_{2/1}}$ **est incliné d'un angle** α par rapport à la normale au plan de contact **1-2**, du côté opposé à la tendance au déplacement de **1** par rapport à **2**.



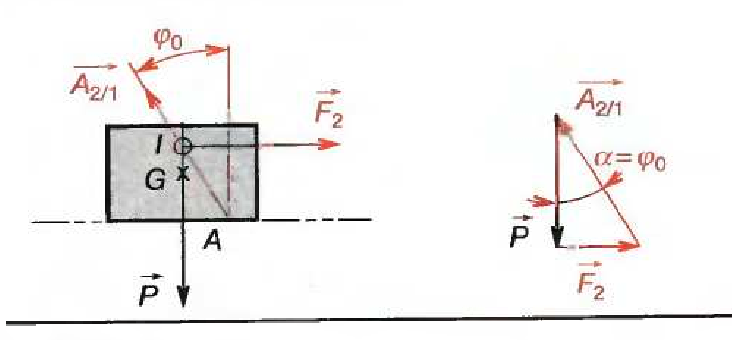
REMARQUE :
Si $\vec{F_1}$ augmente, l'angle d'inclinaison α de $\overrightarrow{A_{2/1}}$ augmente.

■ **2e cas : 1 est à la limite du glissement (équilibre strict) :** $\overrightarrow{A_{2/1}} + \vec{P} + \vec{F_2} = \vec{0}$

$\overrightarrow{A_{2/1}}$ **est incliné d'un angle** φ_0 (angle d'adhérence) ;

φ_0 est la limite supérieure d'inclinaison de $\overrightarrow{A_{2/1}}$ par rapport à la normale au plan de contact **1-2** :

tan $\varphi_0 = \mu_0$: facteur d'adhérence

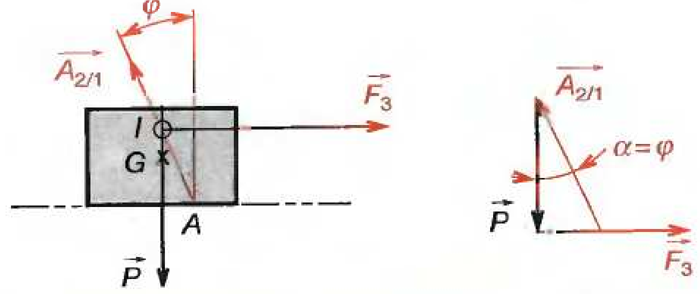


■ **3e cas : 1 n'est plus en équilibre statique** (mouvement par rapport à **2**) : $\overrightarrow{A_{2/1}} + \vec{P} + \vec{F_3} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{A_{2/1}}$ **est incliné d'un angle** φ (angle de frottement). φ reste constant lorsque $\vec{F_3}$ augmente encore.

φ est légèrement inférieur à φ_0, mais dans de très nombreux cas pratiques, on pose $\varphi = \varphi_0$.

tan $\varphi = \mu$: facteur de frottement *



LOIS DE COULOMB	
φ_0 et φ dépendent :	**φ_0 et φ sont indépendants :**
■ **de la nature des surfaces de contact (matériaux) ;** ■ **de la rugosité des surfaces de contact ;** ■ **de l'état des surfaces de contact (sèches, lubrifiées).**	■ **de la pression de contact ;** ■ **de la forme des surfaces de contact ;** ■ **de l'aire des surfaces de contact ;** ■ **de la vitesse de glissement.**
Ces constatations sont approchées. En réalité φ_0 et φ croissent avec la pression de contact ; φ varie avec la vitesse (régime hydrodynamique) ; φ varie avec la température (embrayages, freins).	

* On dit souvent improprement : *f* coefficient de frottement.

32 ■ 2 Conditions d'équilibre

Le solide **1** étant isolé :

$$\overrightarrow{A_{2/1}} = \sum_{(S)} \mathrm{d}\,\overrightarrow{f_{i2/1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\,\overrightarrow{f_{i2/1}} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{N_{2/1}} + \mathrm{d}\,\overrightarrow{T_{2/1}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{A_{2/1}} = \overrightarrow{N_{2/1}} + \overrightarrow{T_{2/1}}}$$

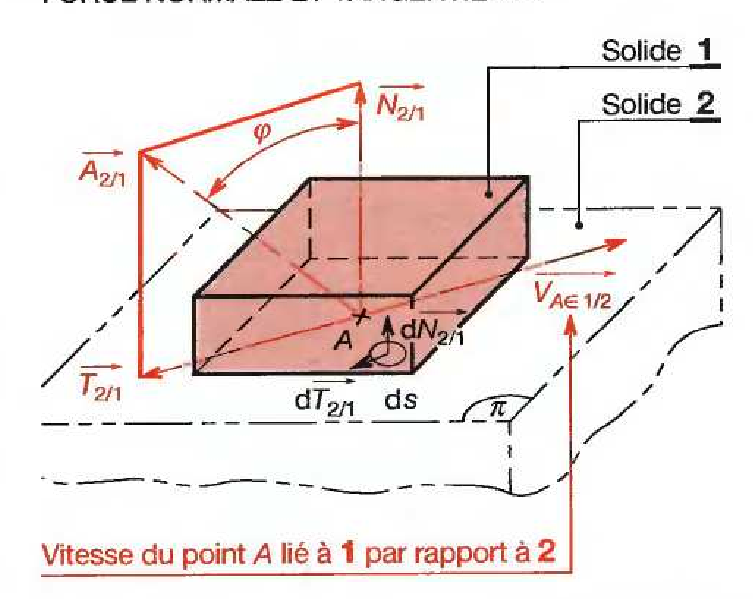
$\overrightarrow{A_{2/1}}$: résultante des forces élémentaires $\mathrm{d}\overrightarrow{f_i}$ de **2** sur **1**.

$\overrightarrow{N_{2/1}}$: résultante des forces normales d $\overrightarrow{N_{2/1}}$ (perpendiculaires à π).

$\overrightarrow{T_{2/1}}$: résultante des forces tangentielles d $\overrightarrow{T_{2/1}}$ (dans le plan π).

Le facteur de frottement μ est défini à la limite du glissement par :

$$\tan\varphi = \mu \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\|\overrightarrow{T_{2/1}}\|}{\|\overrightarrow{N_{2/1}}\|}$$



CÔNE DE FROTTEMENT - INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS	
Le **cône de frottement** est défini par : ■ **son sommet** : au point d'application de la résultante des actions de contact ou au point de contact ; ■ **son axe** $(A, \vec{n})$ normal au plan tangent π, du côté de la matière du système isolé ; ■ **son demi-angle au sommet** : égal à φ.	$\vec{n}$, φ, π, A
1er cas : si des équations d'équilibre on déduit que : ■ $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est **dans le cône** ($\alpha < \varphi$) ; ■ $\|\overrightarrow{T_{2/1}}\| = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \cdot \tan\alpha$; ■ $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est incliné à gauche (par exemple) dans (P). Alors : **il y a adhérence** et tendance au déplacement vers la droite.	Plan contenant (D) et $\vec{n}$; $A_{2/1}$; Direction de la tendance au glissement ; α ; P ; (D) ; A
2e cas : si des équations d'équilibre on déduit que : ■ $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est **sur le cône** ($\alpha = \varphi$). ■ $\|\overrightarrow{T_{2/1}}\| = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \cdot \tan\varphi$; ■ $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est incliné à gauche (par exemple) dans (P). Alors : **il y a équilibre strict** et tendance au déplacement vers la droite.	Plan contenant (D) et $\vec{n}$; $A_{2/1}$; Direction de la tendance au glissement ; $\alpha = \varphi$; P ; (D) ; A
3e cas : si des équations d'équilibre on déduit que : ■ $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est **hors du cône** ($\alpha > \varphi$), ce qui est **impossible**. ■ $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est incliné à gauche (par exemple) dans (P). Alors : **l'équilibre est impossible, il y a glissement** vers la droite et $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est sur le cône.	Plan contenant (D) et $\vec{n}$; $A_{2/1}$; Direction de $\overrightarrow{V_{A\in 1/2}}$; φ ; P ; (D) ; $V_{A\in 1/2}$; A

REMARQUE :

Il est impossible de négliger le frottement lorsqu'il est lié aux nécessités fonctionnelles du système (arc-boutement d'un serre-joint, freins, courroies...). Sinon, selon les cas :

■ $\varphi = 0$; $\mu = 0$; $\overrightarrow{T_{2/1}} = \vec{0}$. **L'action $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est normale au plan tangent à la surface de contact 1-2. Son support est $(A, \vec{n})$.**

32 ■ 3 VALEURS DU FACTEUR DE FROTTEMENT μ*

32 ■ 31 MATÉRIAUX EN CONTACT

Désignation des matériaux	Lubrification - Température - Pression	μ
Acier / Fonte Acier / Bronze	Surfaces sèches Surfaces grasses Surfaces graissées	0,19 0,16 0,10
Fonte / Bronze Fonte / Fonte	Surfaces sèches Surfaces grasses Surfaces bien graissées	0,21 0,15 0,05 - 0,10
Acier trempé / Bronze	Graissage moyen Graissage sous pression	0,10 0,05
Acier trempé / Acier trempé	Graissage moyen Graissage abondant Graissage sous pression Faible pression de contact et bain d'huile	0,10 0,07 0,05 0,04
Garniture amiantée pour freins d'automobile / Fonte Garniture métallique frittée / Acier	Sèches - Température max 140° C Pression de contact 0,2 à 0,6 MPa Sèches - Température max 300° C Pression de contact 0,2 à 1 MPa	0,35 - 0,40 0,10 - 0,20
Coussinet fritté (bronze + acier) / Acier Caoutchouc / Fonte	Lubrifiées à l'huile Lubrifiées à la graisse Surface polie	0,01 0,05 0,20
Matières plastiques (toutes natures)	Surfaces lubrifiées	0,02 - 0,08
Polyamide 6 ; 6-6 ; 6-10 / Acier Polyamide 11 / Acier Polycarbonate / Acier Polyéthylène - téréphtalate / Acier Polystyrène / Acier Polytétrafluoroéthylène / Acier	Surfaces sèches Surfaces sèches Surfaces sèches Surfaces sèches Surfaces sèches Surfaces sèches	0,38 - 0,42 0,32 - 0,38 0,52 - 0,58 0,24 - 0,28 0,35 - 0,5 0,22
Pneus / route goudronnée	Route sèche Route mouillée Route verglacée	0,60 - 0,70 0,35 - 0,60 0,10

32 ■ 32 TAPIS ROULANTS - CHAÎNES DE MANUTENTION : VALEURS DE μ **

Chaîne / produit transporté	Lubrification	Chaîne standard	Chaîne à friction
Chaîne / Acier	À sec lubrifié	0,15 - 0,25 0,10 - 0,15	0,60 - 0,70
Chaîne / Verre	À sec lubrifié	0,15 - 0,20 0,10 - 0,15	0,50 - 0,60
Chaîne / Aluminium, bois, papier		0,10 - 0,25 - 0,35	0,60 - 0,70
Chaîne / Résine acétal, polyamide		0,15 - 0,25	0,60 - 0,70

32 ■ 33 PALIERS LISSES - PALIERS À ROULEMENTS : VALEURS DE μ

Paliers à roulement	Toute lubrification	0,0015 à 0,0050
Paliers lisses	Graissage onctueux	0,01 à 0,1
Paliers lisses	Film discontinu	0,01 à 0,04
Paliers lisses	Régime hydrodynamique	0,001 à 0,08

* Pour états de surface et pressions de contact moyens. ** D'après catalogue constructeur.

32 ▪ 4 Application

32 ▪ 41 Détermination d'une action de contact avec frottement

Dans le mécanisme de commande de soupape (fig. 1) (voir présentation complète au § 37.2), le culbuteur {**4**, **5**} supporte en F de la part de la soupape **6** une force $\overrightarrow{F_{6/\{4,5\}}}$. Cette force est dûe à l'effort des ressorts de rappel **7** et **8**, dirigée selon l'axe de la soupape, d'intensité $\|\overrightarrow{R_{\{7,8\}/6}}\| = 1\,034$ N. Le contact **5/6** est ponctuel avec frottement tel que $\tan\varphi = \mu = 0{,}15$.

Déterminer les composantes de $\overrightarrow{F_{6\{5,4\}}}$ dans le repère local $(F, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lors de l'ouverture de la soupape, (rotation du culbuteur dans le sens trigonométrique) à la limite du glissement (équilibre strict).

SOLUTION :

▪ **Isoler {4-5}** : voir l'isolement complet au § 37.2.

$\overrightarrow{F_{6/\{5,4\}}}$ est une action extérieure.

▪ **Le contact {4-5} /6 est-il ponctuel ?**

Oui : le sommet du cône est en F, (**sinon,** il faut le placer au **centre de la laison**, ou au point où le torseur est réductible à un glisseur).

▪ **Tracer le plan tangent π commun à 6 et 5 en F.**

▪ **Tracer l'axe du cône normal à π** (fig. 2).

▪ **Construire les génératrices du cône**, du côté de la matière du système **{4-5}** isolé.

La tangente du demi-angle au sommet φ du cône est : $\tan\varphi = \mu = \frac{HK}{FH}$ (fig.3).

▪ **Rechercher le sens du déplacement de {4-5} par rapport à 6** (fig. 4).

Quand **{4-5}** tourne dans le sens trigonométrique, le point F lié à **5** se déplace vers la droite. $\overrightarrow{F_{6/\{4,5\}}}$ peut se trouver dans la zone hachurée.

▪ **L'équilibre est-il strict ?**

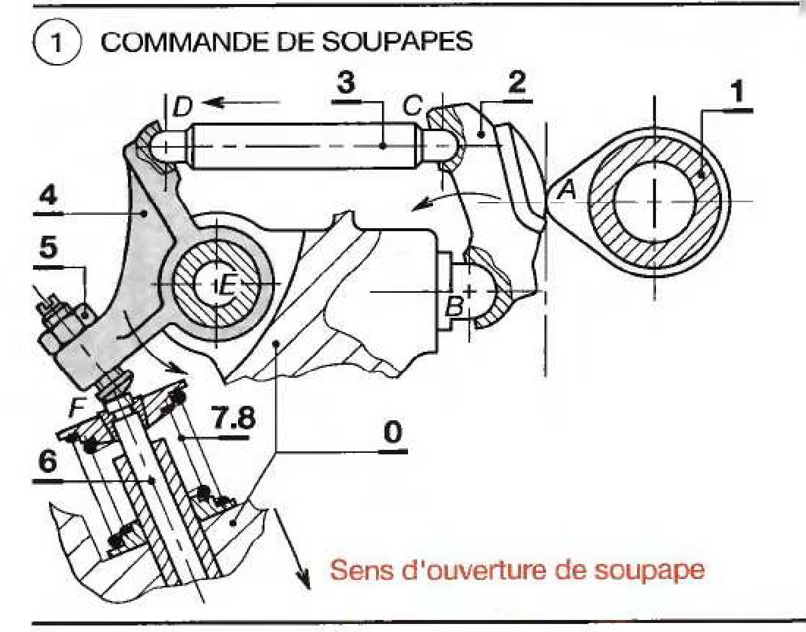
Oui : $\overrightarrow{F_{6/\{4+5\}}}$ est **sur** le cône, inclinée vers la gauche (**sinon** $\overrightarrow{F_{6/\{4+5\}}}$ est **dans** le demi-cône hachuré).

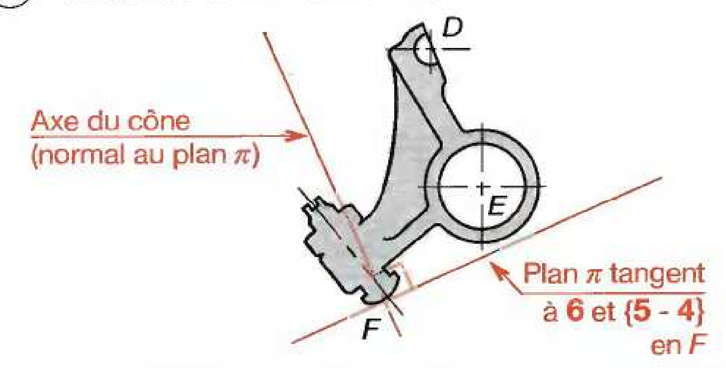
▪ **Rechercher les composantes de $\overrightarrow{F_{6/\{4+5\}}}$** dans $(F, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

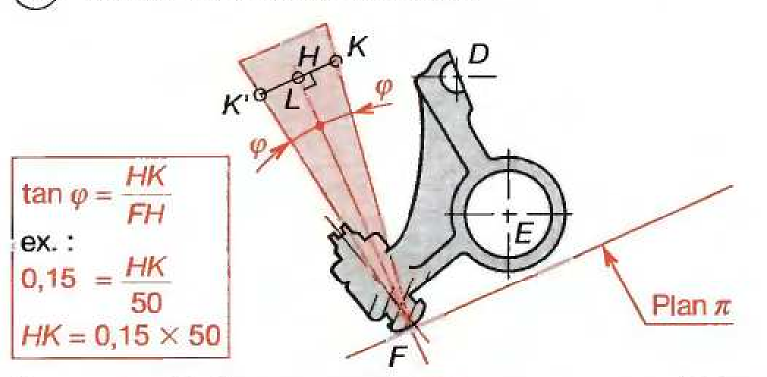
$$\mu = \tan\varphi = \frac{\|\overrightarrow{T_{6/\{5,4\}}}\|}{\|\overrightarrow{N_{6/\{5,4\}}}\|} \; ; \; 0{,}15 = \frac{\|\overrightarrow{T_{6/\{4,5\}}}\|}{1\,034}$$

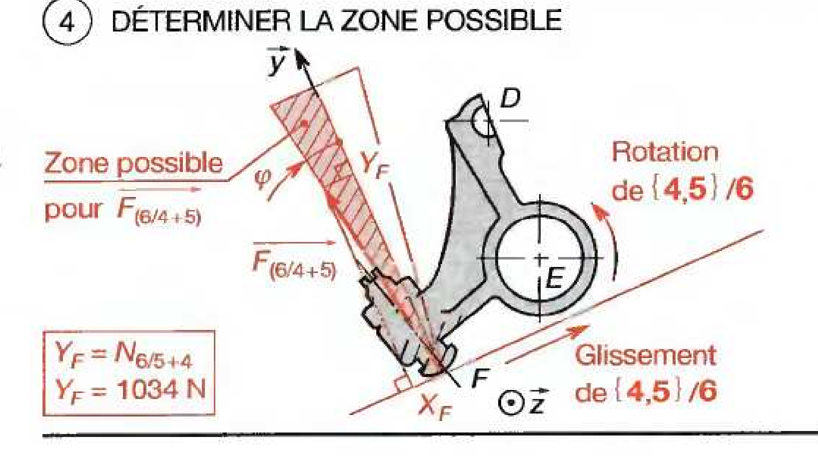
$$\|\overrightarrow{T_{6/\{5,4\}}}\| = 0{,}15 \times 1\,034 = 155 \text{ N} \; ; \; \overrightarrow{F_{6/\{5,4\}}} : \begin{pmatrix} -155 \\ 1\,034 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{F_{6/\{5,4\}}}\| = \sqrt{155^2 + 1\,034^2} = \mathbf{1\,045\ N}.$$









32■42 Tapis roulant incliné

Un tapis roulant en chloroprène **2**, incliné d'un angle $\alpha = 10°$, déplace à vitesse constante des pièces **1** de forme parallélépipédique de 200 × 100 × 100 mm, de poids $\|\vec{P}\| = 152$ N. Le facteur de frottement acier/chloroprène est : $\mu = 0{,}3$.

1° Calculer les composantes de la résultante des actions de contact $\overrightarrow{A_{2/1}}$ dans $\mathcal{R}_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$. Représenter cette action en A, point où le torseur associé aux actions de contact de **2/1** est réductible à un glisseur : $_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

2° Vérifier graphiquement que l'entrainement des pièces se fait sans glissement **1/2**.

3° Calculer l'angle maximal d'inclinaison du tapis pour avoir un entraînement à la limite du glissement (équilibre strict).

SOLUTION :

1° Calculer les composantes de $\overrightarrow{A_{2/1}}$ dans $\mathcal{R}_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$

■ **Isoler le solide 1 :** Il est en équilibre.

(translation à vitesse constante) par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_g\ (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$.

■ **Faire le bilan des actions extérieures :**

Actions à distance $\{\text{Terre}/_1\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

Action de contact : liaison appui-plan **1/2**. En A, le torseur de liaison est réductible à un glisseur : $_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

■ **Écrire le théorème de l'équilibre statique :**

1 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs directement opposés (voir chapitre 42).

$\vec{P} + \overrightarrow{A_{2/1}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{A_{2/1}} = -\vec{P}$.

Le point A est à la verticale de G.

■ **Projeter $\overrightarrow{A_{2/1}}$ dans $\mathcal{R}(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide 1 :**

$\overrightarrow{T_{A2/1}} = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot \sin\alpha \cdot \vec{x}$; $\overrightarrow{N_{A2/1}} = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot \cos\alpha \cdot \vec{y}$

$T_{A2/1} = 152 \times \sin 10°$; $\boldsymbol{T_{A2/1} = 26{,}4}$ **N**

$N_{A2/1} = 152 \times \cos 10°$; $\boldsymbol{N_{A2/1} = 149{,}7}$ **N**

2° Vérifier le non-glissement de 1/2

$\overrightarrow{A_{2/1}}$ est dans le cône de frottement construit en A*. On constate que la condition $\alpha < \varphi$ est vérifiée. Il y a adhérence.

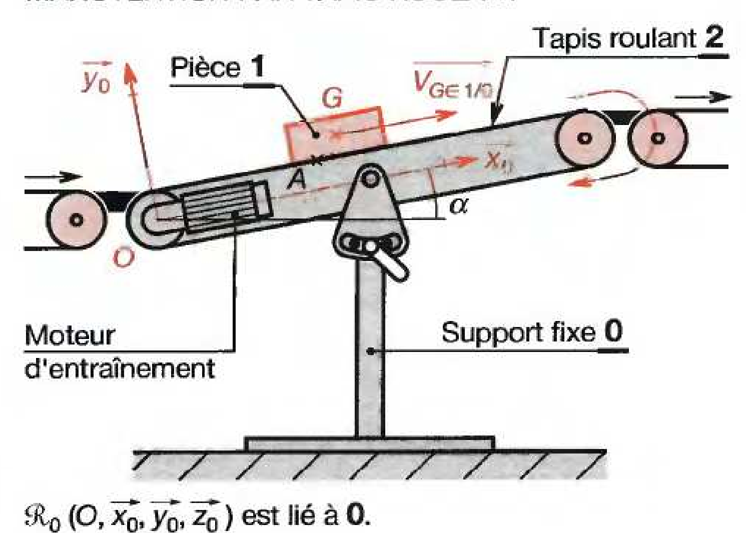
3° Calculer l'angle limite d'inclinaison

À l'équilibre strict, $\overrightarrow{A_{2/1}}$ est sur le cône : $\alpha = \varphi$.

Donc : $\tan\alpha = \tan\varphi$; $\tan\alpha = 0{,}3$; $\alpha = \mathbf{16{,}69°}$.

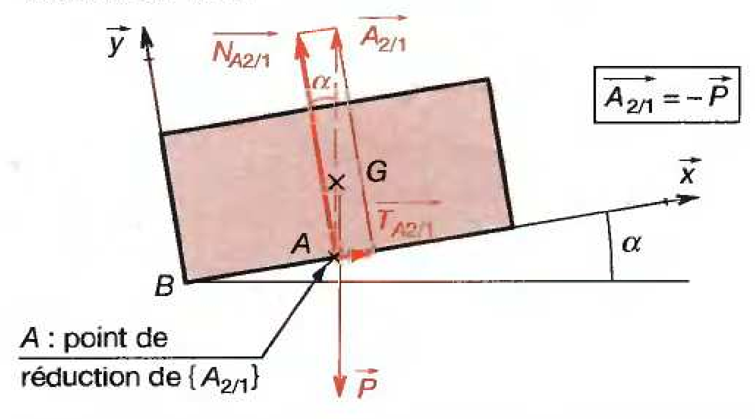
* Voir méthode de construction d'un cône, page précédente.

MANUTENTION PAR TAPIS ROULANT

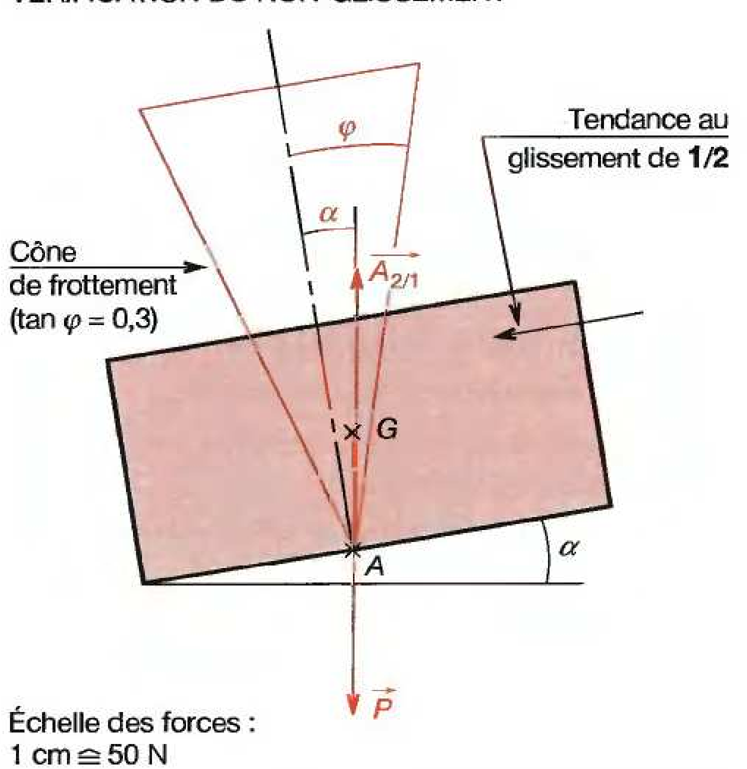


$\mathcal{R}_0\ (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ est lié à **0**.

ISOLEMENT DE **1**



VÉRIFICATION DU NON-GLISSEMENT

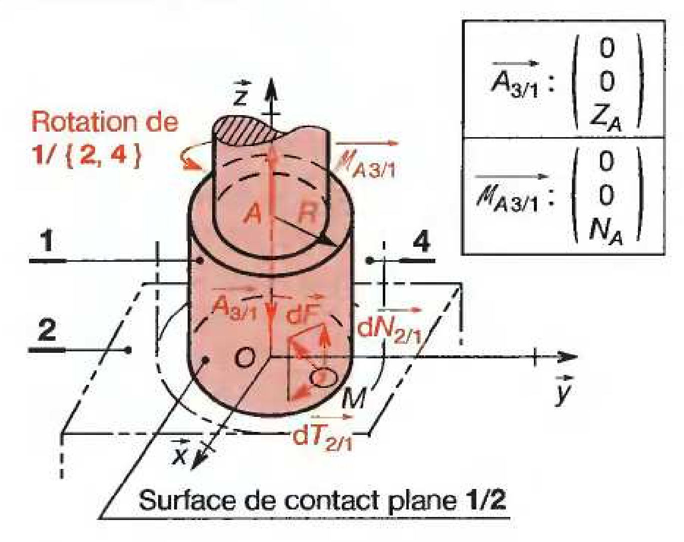


33 Résistance au pivotement

Un solide **1** pivote par rapport à {**2**, **4**} s'il est en **rotation autour d'un axe fixe** $(O, \vec{z})$. L'axe $(O, \vec{z})$ est généralement :

- perpendiculaire au plan de contact **1/2** (frottement axial si le facteur de frottement $\mu \neq 0$) (fig. 1 et 2) ;
- confondu avec l'axe du cylindre de liaison **1/4** (frottement radial, si $\mu \neq 0$) (fig. 2).

Chaque point de contact appartenant à **1** se déplace par rapport à {**2**, **4**}. Les forces tangentielles dues au frottement de **1**/{**2**, **4**} s'opposent à la rotation et provoquent une résistance au pivotement.



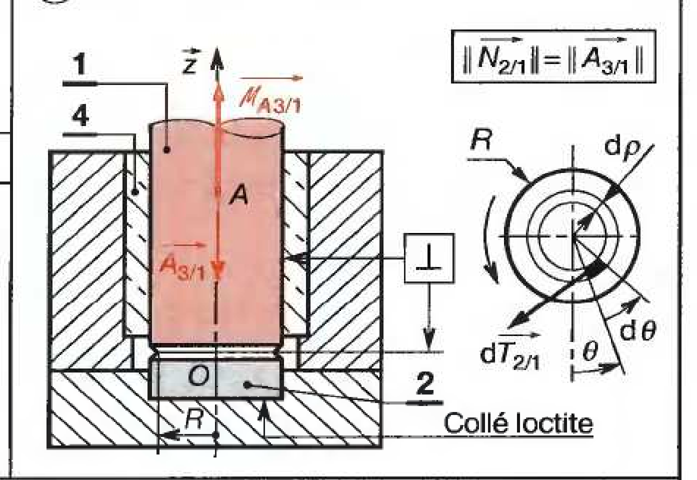
33.1 FROTTEMENT AXIAL

Si 1 est soumis de la part de 3 à $_A\{A_{3/1}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{3/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,3/1}}\end{matrix}\right\}$ **(3 non représenté).**

- $\overrightarrow{A_{3/1}}$ **: résultante axiale selon** $(O, \vec{z})$.
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A3/1}}$ **: moment axial selon** $(O, \vec{z})$.

1 est soumis de la part de 2 à $\{O_{2/1}\} = {}_O\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O\,2/1}}\end{matrix}\right\}$.

- $\overrightarrow{R_{2/1}} = -\overrightarrow{A_{3/1}}$ **: résultante des actions de contact 2/1.**
  $\overrightarrow{R_{2/1}} = -Z_A . \vec{z}$ **: effort normal au plan 2 - 1 :** $N_{2/1}$.
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O\,2/1}} = -\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,3/1}}$ **: moment en O des actions de contact de 2/1.**
  $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O\,2/1}} = -N_A . \vec{z}$* **: moment normal au plan 2 - 1.**



33.2 FROTTEMENT RADIAL

Si 1 est soumis à des efforts de la part de 4 situés dans le plan de symétrie $(A, \vec{x}, \vec{y})$ **de la liaison 4-1, plan perpendiculaire à l'axe de rotation** $(A, \vec{z})$.

Les actions de contact 4/1 se réduisent à une résultante dont :

- **le point d'application est le contact théorique** $A'_{1/4}$;
- **le support est sur le cône de frottement d'axe** $(A', \vec{n})$ **et de demi-angle au sommet** φ $(\tan \varphi = \mu)$;
  La génératrice retenue est celle qui est inclinée «en arrière» de la normale $(A', \vec{n})$ **par rapport au sens du mouvement ;**
- **le module est** $\|\overrightarrow{A'_{4/1}}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{N_{4/1}}\|^2 + \|\overrightarrow{T_{4/1}}\|^2}$.

3 EXEMPLE

$\overrightarrow{T_{4/1}}$ opposée au déplacement 1/4

1

4

$\vec{y}$

$\overrightarrow{A_{4/1}}$

$\vec{n}$

$\overrightarrow{N_{4/1}}$

φ

A

$\vec{x}$

$\overrightarrow{T_{4/1}}$

H

A'

Cercle de rayon $r = R \sin \varphi$

π : plan tangent 4/1

Sens de rotation de 1/4

REMARQUE :

Dans le triangle A'AH, rectangle en H, on peut écrire :

$$\sin \varphi = \frac{AH}{A'A} = \frac{AH}{R} \;;\; AH = R . \sin\varphi \;;\; AH = \text{Cte}.$$

Le support de $\overrightarrow{A_{4/1}}$, **quel que soit le point d'application A' sur le cercle de rayon R, est tangent au cercle de centre A et de rayon** $r = R . \sin \varphi$.

* Voir expression de N_A en fonction de R, μ au § 12.2 (liaison pivot réelle).

33■3 Application

Un chariot motorisé est composé d'un sous-ensemble **(1)** = {**1**, **2**, **3**}, de deux roues motrices **4**, et deux roues porteuses **5**.

HYPOTHÈSES :

- Toutes les actions mécaniques sont ramenées dans le plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
- Les liaisons **(1)-4** et **(1)-5** sont des liaisons pivot avec frottement.

$\mu_1 = \tan \varphi_1 = 0{,}1$; diamètre axe : ∅ 20 .

- Les liaisons **0-4** et **0-5** sont ponctuelles avec frottement.

$\mu_2 = \tan \varphi_2 = 0{,}2$.

ON DEMANDE :

1° D'isoler la roue **5** et de vérifier que la roue tourne (méthode graphique).

2° D'isoler la roue **4** et de calculer le couple moteur maxi, à la limite du glissement en A. (Négliger la résistance au pivotement en B.) On donne : $Y_A = 1\,000$ N , $R = 50$ mm .

SOLUTION :

Question 1 : Isoler la roue **5**.

1° **Recenser** les actions mécaniques :

- $\overrightarrow{D_{3/5}}$ est tangent au cercle de rayon r_1 .

$r_1 = r . \sin \varphi$ (§ 33.2) ; $r_1 = 10 \times 0{,}1 = 1$.

Tracer le cercle de rayon 1 mm.

- $\overrightarrow{C_{0/5}}$ est incliné vers la gauche (opposé au glissement éventuel). **Construire** le cône de frottement.

2° **Appliquer** le P.F.S. :

5 est soumis à deux glisseurs $\overrightarrow{D_{3/5}}$ et $\overrightarrow{C_{0/5}}$ directement opposés. **Tracer** leur support passant par C et tangent au cercle de rayon : r_1 .

3° **Vérifier** que le support est dans le cône. Si oui, alors non-glissement en C.

Question 2 : Isoler la roue motrice **4**.

1° **Recenser** les actions mécaniques :

- $\overrightarrow{A_{0/4}}$: sur le cône, inclinée à droite.
- $\overrightarrow{B_{3/4}}$: inclinée, passant par B.
- $\overrightarrow{C_m}$: couple moteur dirigé selon $(O, \vec{z})$.

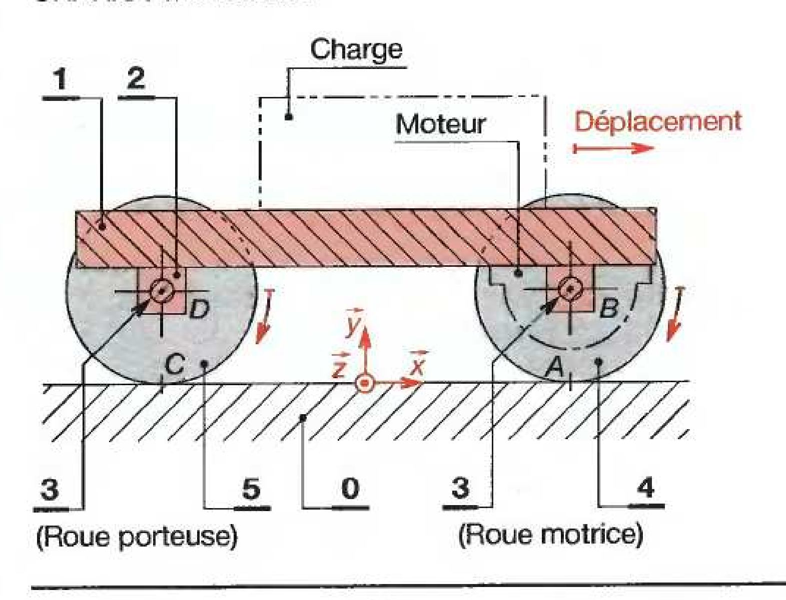
2° **Écrire** le théorème du moment statique en B :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_B(\overrightarrow{A_{0/4}})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_B(\overrightarrow{B_{3/4}})} + \overrightarrow{C_m} = 0$$

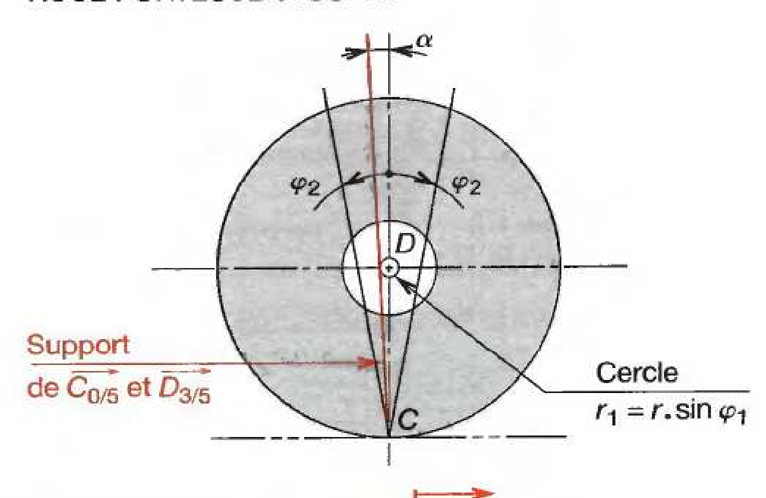
$$Y_A . \mu_2 . R + \quad 0 \quad + \overline{C_m} = 0$$

$$1\,000 \times 0{,}2 \times 0{,}05 \quad + \overline{C_m} = 0 \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C_m}} = \mathbf{-\ 10\ N.m}\ .$$

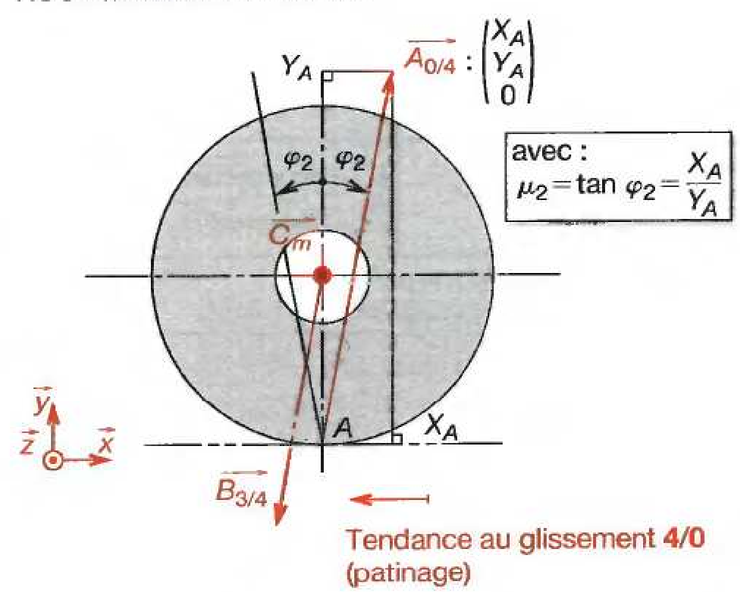
CHARIOT MOTORISÉ



ROUE PORTEUSE **5** ISOLÉE



ROUE MOTRICE **4** ISOLÉE



34 Résistance au basculement

Le basculement a lieu lorsque le solide **1** pivote autour de $(C, \vec{z})$ sans glisser par rapport à **2*** (fig. 1).

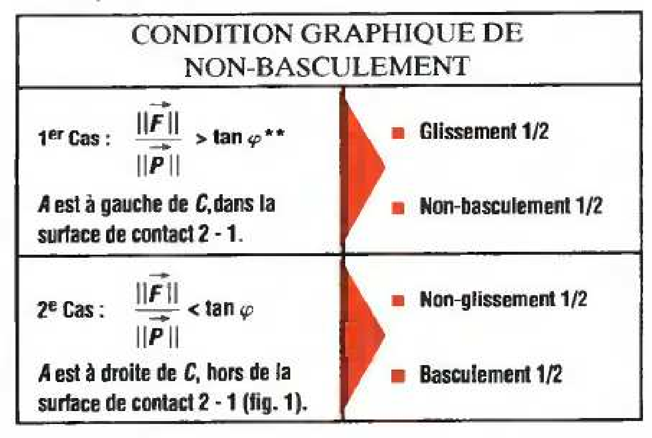
Modélisons l'action de contact de **2/1** par un glisseur appliqué en A : $_A\{A_{2/1}\} = {}_A\{\overrightarrow{A_{2/1}}, \vec{0}\}$.

MÉTHODE :

1° Le système est soumis à l'action de trois glisseurs concourants. Construire le point I, intersection de $\vec{F}$ et $\vec{P}$.

2° Se placer à l'équilibre strict et construire $\overrightarrow{A_{2/1}}$ passant par I, incliné d'un angle φ opposé au déplacement.

3° Interpréter les résultats :



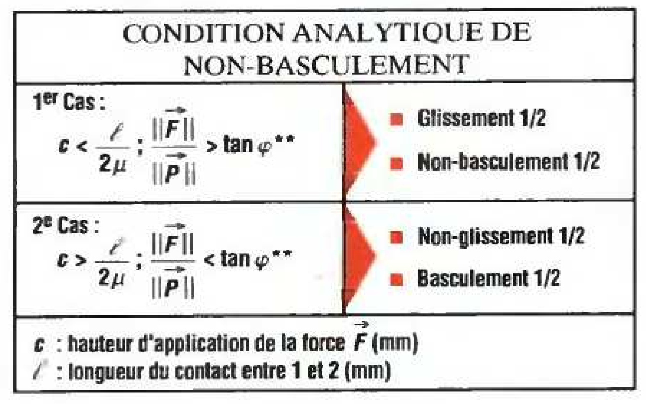
CONDITION GRAPHIQUE DE NON-BASCULEMENT	
1er Cas : $\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert}{\lVert\vec{P}\rVert} > \tan\varphi$** A est à gauche de C, dans la surface de contact 2 - 1.	■ Glissement 1/2 ■ Non-basculement 1/2
2e Cas : $\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert}{\lVert\vec{P}\rVert} < \tan\varphi$ A est à droite de C, hors de la surface de contact 2 - 1 (fig. 1).	■ Non-glissement 1/2 ■ Basculement 1/2

En écrivant le théorème du moment statique au point C :

$$-\lVert\vec{F}\rVert.c - \lVert\vec{N}\rVert.d + \lVert\vec{P}\rVert.\frac{\ell}{2} = 0;\quad d = \frac{\lVert\vec{P}\rVert.\ell/2 - \lVert\vec{F}\rVert.c}{\lVert\vec{N}\rVert}$$

Comme $\lVert\vec{N}\rVert = \lVert\vec{P}\rVert$ et $\lVert\vec{F}\rVert = \lVert\vec{T}\rVert = \lVert\vec{N}\rVert\,\mu$.

On a : $d = \dfrac{\ell}{2} - \mu.c\,;\ d > 0 \Rightarrow c < \dfrac{\ell}{2\mu}$ (fig. 2).



CONDITION ANALYTIQUE DE NON-BASCULEMENT	
1er Cas : $c < \dfrac{\ell}{2\mu}$; $\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert}{\lVert\vec{P}\rVert} > \tan\varphi$**	■ Glissement 1/2 ■ Non-basculement 1/2
2e Cas : $c > \dfrac{\ell}{2\mu}$; $\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert}{\lVert\vec{P}\rVert} < \tan\varphi$**	■ Non-glissement 1/2 ■ Basculement 1/2
c : hauteur d'application de la force $\vec{F}$ (mm) ℓ : longueur du contact entre 1 et 2 (mm)	

MÉTHODE POUR DEUX GLISSEURS : (fig.3)

1° Prolonger la force connue $\vec{P}$ jusqu'à (π) : point A.

2° Construire le cône A, axe perpendiculaire à (π).

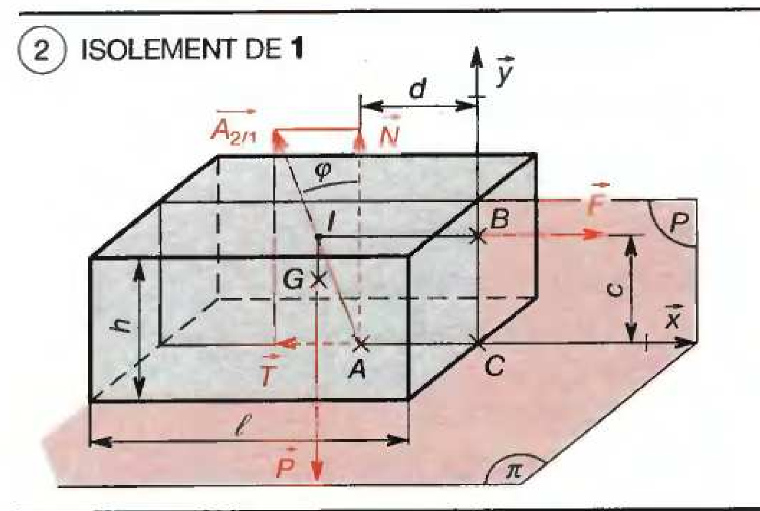
3° Si $\vec{P}$ est dans le cône : non-glissement 1/2.
Si A est hors de la surface de liaison : basculement.

4° Si $\vec{P}$ est hors du cône : glissement 1/2.
Si A est dans la surface de liaison : non basculement.

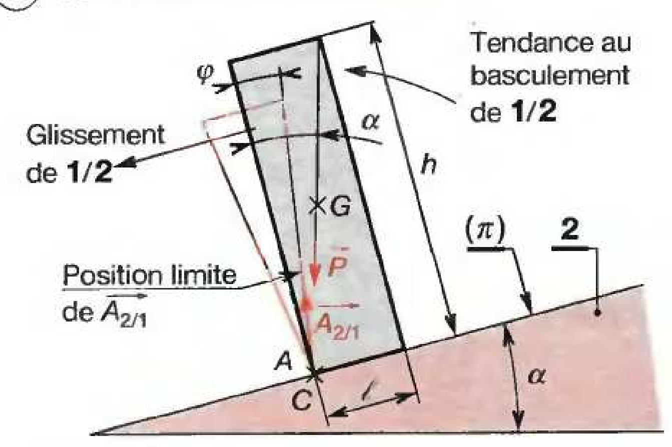
* Voir autre application en dynamique § 56.8. ** $\tan\varphi = \mu$: facteur de frottement.

① CONDITION GRAPHIQUE

② ISOLEMENT DE **1**



③ SOLIDE SUR PLAN INCLINÉ



1. Si $\alpha < \varphi$: adhérence de 1/2.
2. Si $\alpha > \varphi$: glissement de 1/2.

■ Limite du basculement de 1/2 : $\tan\alpha = \dfrac{\ell}{h}$

■ Condition de non-basculement : $\dfrac{\ell}{h} > \tan\alpha$

① Non glissement non-basculement	② Glissement non-basculement	③ Non-glissement basculement
$\alpha_1 < \varphi$	$\alpha_2 > \varphi$	$\alpha_3 < \varphi$
φ ; φ ; α_1 ; $\overrightarrow{A_{0/1}}$; 1 ; 0 ; G ; A ; α_1 ; $\vec{P}$	φ ; φ ; $\overrightarrow{A_{0/1}}$; 1 ; 0 ; G ; A ; α_2 ; $\vec{P}$	φ ; φ ; 1 ; $\overrightarrow{A_{0/1}}$; G ; 0 ; A ; α_3 ; $\vec{P}$
■ $\vec{P}$ **dans le cône de frottement.** $\vec{P} + \overrightarrow{A_{0/1}} = \vec{0}$. ■ **A dans la surface de contact 0-1 .**	■ $\vec{P}$ **hors du cône de frottement.** $\vec{P} + \overrightarrow{A_{0/1}} \neq \vec{0}$. ■ **A dans la surface de contact 0-1 .**	■ $\vec{P}$ **dans le cône de frottement.** $\vec{P} + \overrightarrow{A_{0/1}} = \vec{0}$. ■ **A hors de la surface de contact 0-1 .**

APPLICATION :

Lors d'une phase de manutention, la pièce **1**, de poids $\vec{P} = -100\,\vec{y}$ (en N), est poussée par un vérin **2**.

HYPOTHÈSES :

- Le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie.
- **2-1 :** liaison sphère-plan (ou ponctuelle) sans frottement.
- **0-1 :** liaison appui-plan avec frottement ($\mu = 0{,}2$).

ON DEMANDE :

1° De **vérifier** la condition de non-basculement **1/0**.

2° De **déterminer**, à l'équilibre strict, l'effort de poussée $\overrightarrow{B_{2/1}}$.

RÉPONSE :

1° Isoler la pièce **1**.

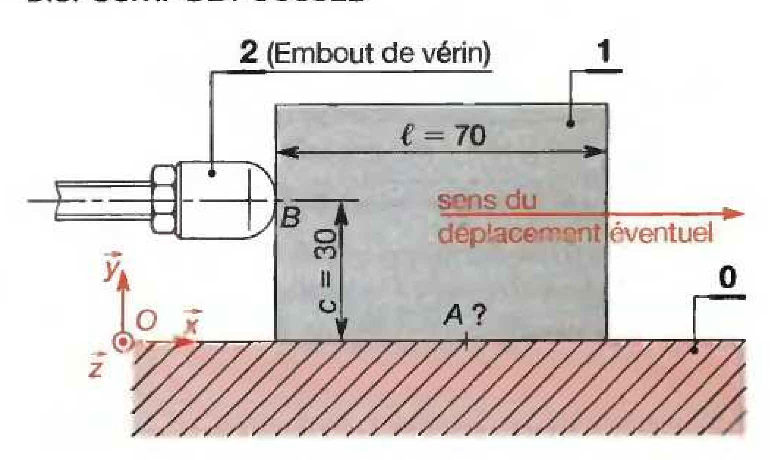
1 est soumise à l'action de trois glisseurs : $\vec{P}$, $\overrightarrow{A_{0/1}}$, $\overrightarrow{B_{2/1}}$. La condition de non glissement est :

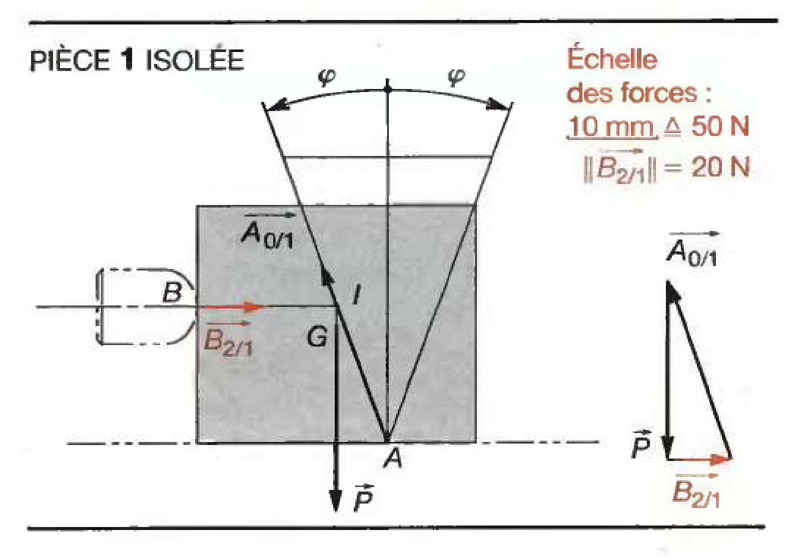
$$C < \frac{\ell}{2\mu} \quad ; \quad 30 < \frac{70}{2 \times 0{,}2} \quad ; \quad \mathbf{30 < 175}.$$

Non basculement.

2° Déterminer $\overrightarrow{B_{2/1}}$: voir figure.

DISPOSITIF DE POUSSÉE





35 Résistance au roulement

Le cylindre **1**, soumis à une force $\vec{F}$ horizontale, reste en équilibre. Les actions de contact de **2/1 s'opposent à la rotation de 1, et provoquent une résistance au roulement** (fig.1).

ACTIONS DE CONTACT :

Le contact linéaire s'est transformé en contact surfacique, les actions de contact sont modélisables (fig.2).

En A par un torseur : En I par un glisseur :

$$_A\{A_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} \end{Bmatrix}_A \text{ (avec } \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,2/1}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_t}\text{)} ; \quad _I\{A_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

$\overrightarrow{R_{2/1}} = \vec{N} + \vec{T}$ avec $\lVert\vec{F}\rVert = \lVert\vec{P}\rVert.\tan\alpha$ et $\lVert\vec{F}\rVert = \lVert\vec{T}\rVert ; \lVert\vec{P}\rVert = \lVert\vec{N}\rVert ; \lVert\vec{T}\rVert = \lVert\vec{N}\rVert.\tan\alpha$

$\lVert\overrightarrow{R_{2/1}}\rVert$: résultante des actions de **2/1** (N).

α : angle d'inclinaison de la résultante / à la normale.

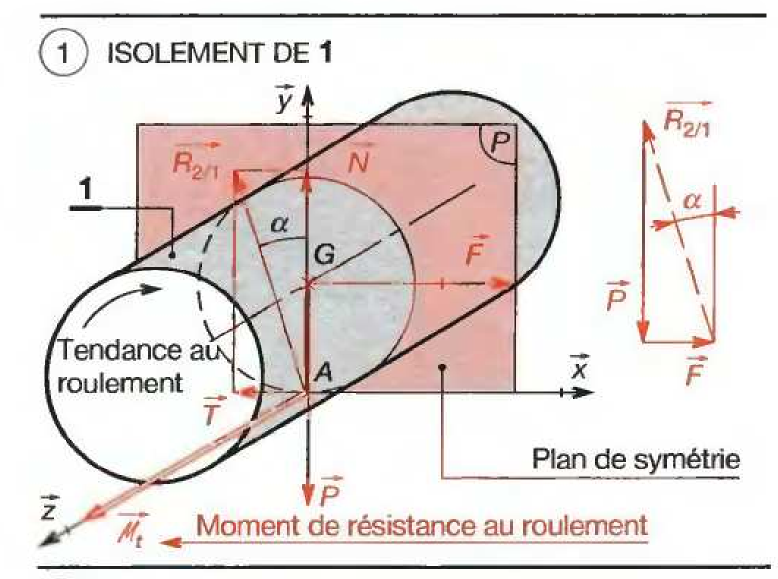
$\lVert\overrightarrow{\mathcal{M}_t}\rVert = R.\lVert\vec{F}\rVert$ avec $\lVert\overrightarrow{\mathcal{M}_t}\rVert = \delta.\lVert\vec{N}\rVert$

$\lVert\overrightarrow{\mathcal{M}_t}\rVert$: moment tangentiel de résistance au roulement (N.mm).

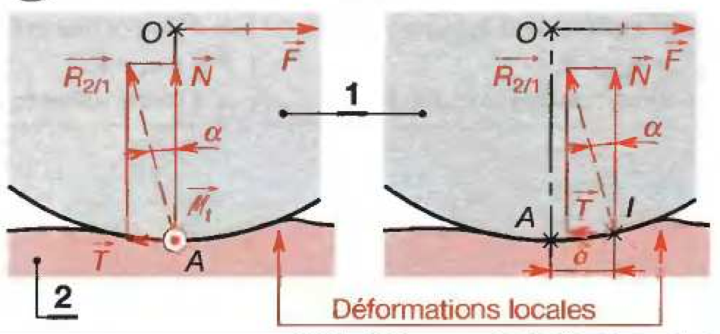
R : rayon du cylindre (mm).

$\lVert\vec{F}\rVert$: force horizontale exercée sur le cylindre (N).

δ : coefficient de résistance au roulement (mm).







35 ■ 1 CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

1er cas : non-glissement et non-roulement.

- **$\overrightarrow{R_{2/1}}$ dans le cône de frottement : $\alpha < \varphi$; $\vec{F} \leqslant \vec{F_G}$**
  avec : $\vec{F_G}$ force correspondant à la limite du glissement :
- **$\delta < \delta_{lim}$ avec $\delta_{lim} = AI'$: coefficient limite de résistance au roulement (mm) (voir 3e cas).**

2e cas : glissement sans roulement.

- **$\overrightarrow{R_{2/1}}$ sur le cône de frottement, incliné d'un angle α tel que : $\alpha = \varphi$;**
- **Condition de glissement : $\vec{F} > \vec{F_G}$;**
  $\vec{F_G}$ force limite avant l'apparition du glissement.
- **Condition de non-roulement : $\delta < \delta_{lim}$ ($AI' = \delta_{lim}$).**

3e cas : roulement sans glissement.

- **$\overrightarrow{R_{2/1}}$ est dans le cône de frottement : $\alpha_R < \varphi$;**
- **Condition de roulement : $\vec{F} > \vec{F_R}$ et : $\delta = \delta_{lim}$.**
  $\vec{F_R}$ force limite avant l'apparition du roulement.

$$\lVert\vec{F_R}\rVert = \frac{\delta_{lim}.\lVert\vec{P}\rVert}{R} \quad \text{et} \quad \tan\alpha_R = \frac{\delta_{lim}}{R}.$$

Figures : 1, R, 2, α, φ, $\alpha = \varphi$, α_R, O, A, I, I', δ, δ_{lim}, $\overrightarrow{R_{2/1}}$, $\vec{F}$, $\vec{F_G}$, $\vec{F_R}$, $AI' = \delta_{lim}$ *

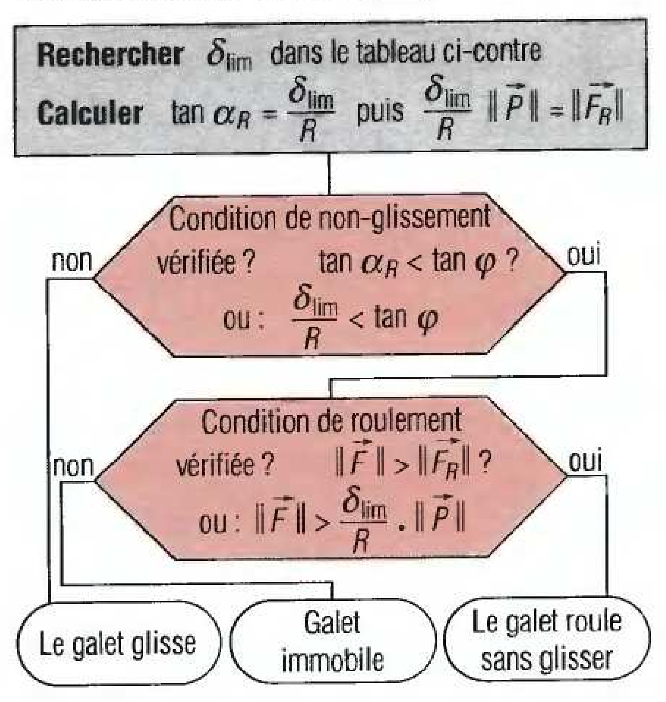
Discussion :

- **Si $\lVert\vec{F_G}\rVert < \lVert\vec{F_R}\rVert$: le mouvement débute par un glissement sans roulement.**
- **Si $\lVert\vec{F_R}\rVert < \lVert\vec{F_G}\rVert$: le mouvement débute par un roulement sans glissement.**
- **Si $\lVert\vec{F_R}\rVert = \lVert\vec{F_G}\rVert$: le mouvement débute par un roulement et un glissement (rare).**

* Pour des raisons de clarté, la déformation n'est pas représentée.

35.2 Méthode de recherche

La force $\|\vec{P}\|$, la force de tirage $\|\vec{F}\|$ sont déterminées par l'étude de l'équilibre statique d'un galet. Le rayon R de la roue, les matériaux en contact sont connus. Pour vérifier que le galet roule sans glisser, on peut suivre les étapes suivantes :



35.3 Exemple de calcul

Un monorail **1** supporte une charge de 10 kN également répartie sur les deux galets **3** et **4** en acier. Ils roulent sur un profilé **2** en acier. Leur rayon est $R = 100$ mm. Le coefficient de roulement acier sur acier est $\delta := 4 \times 10^{-4}$ m. Calculer l'effort horizontal $\vec{F_{min}}$ nécessaire pour déplacer le monorail.

Hypothèses

- Le poids des galets est négligé.
- Le facteur de frottement en C et D est négligé.
- Le système présente un plan de symétrie vertical.

Isoler le galet 3

Il est en équilibre sous l'action de deux glisseurs directement opposés ;

d'où : $\vec{A_{2/3}} + \vec{C_{1/3}} = \vec{0}$ ($\vec{A_{2/3}}$ et $\vec{C_{1/3}}$ sont inclinés d'un angle α).

On a : $\tan \alpha = \frac{\delta}{R}$; $\tan \alpha = \frac{4 \times 10^{-4}}{100 \times 10^{-2}}$; $\tan \alpha = 0{,}004$.

En projection dans $\mathcal{R}(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut écrire :

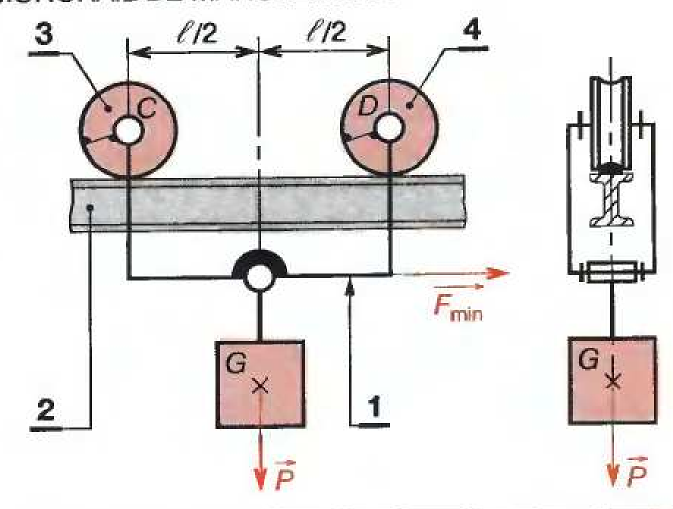
$$\vec{C_{1/3}} = \frac{\|\vec{F_{min}}\|}{2} . \vec{x} - \frac{\|\vec{P}\|}{2} . \vec{y} \text{ ; d'où } \tan \alpha = \frac{\|\vec{F_{min}}\|}{\|\vec{P}\|} \text{ ;}$$

$\|\vec{F_{min}}\| = \|\vec{P}\| . \tan \alpha$;

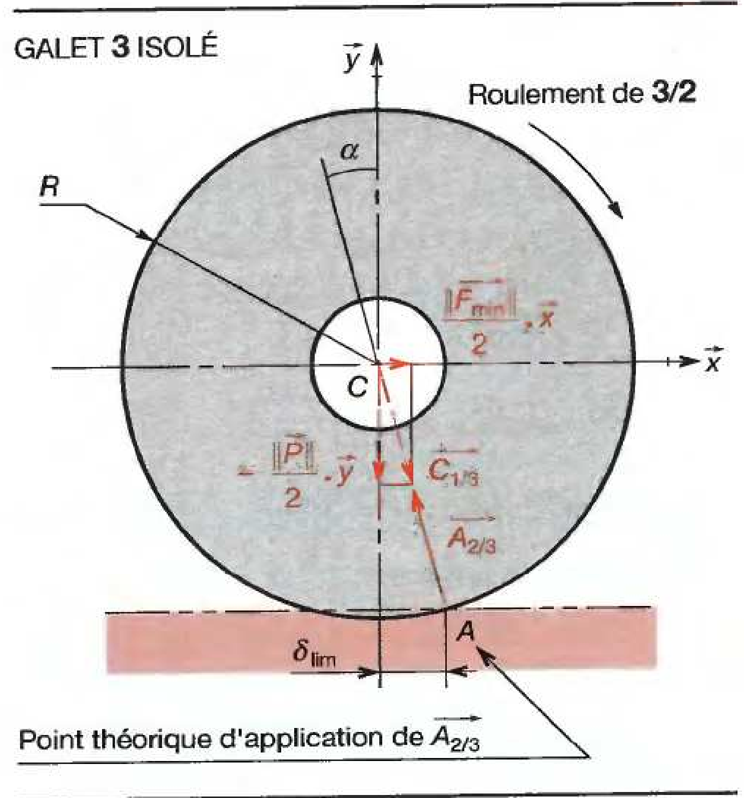
$\|\vec{F_{min}}\| = 10\,000 \times 0{,}004$; $\|\vec{F_{min}}\| = \mathbf{40\ N.}$

VALEURS DU COEFFICIENT DE RÉSISTANCE AU ROULEMENT : δ_{lim}	
Matières en contact	**δ_{lim} (en m)**
Fonte sur acier	5×10^{-4}
Acier sur acier	4×10^{-4}
Roue de wagon/rail sec	5×10^{-4} à 10^{-3}
Fonte sur bitume	8×10^{-3}
Fonte sur sol en ciment	15×10^{-3}
Acier sur sol en ciment	15×10^{-3}
Roue métallique/ciment	2×10^{-2}
Caoutchouc sur bitume	3 à 15×10^{-3}
Roue d'automobile/bitume	3×10^{-2}

MONORAIL DE MANUTENTION

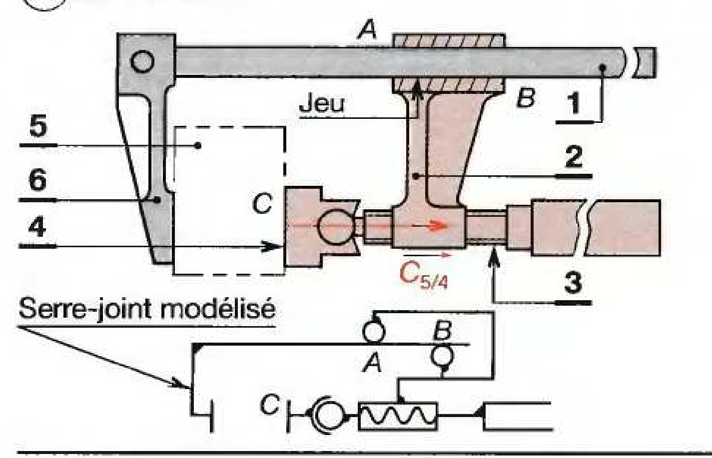


GALET 3 ISOLÉ



36 Arc-boutement

Soit le serre-joint ci-contre. Il y a **arc-boutement** de **2** par rapport à **1** si, quelle que soit l'intensité de la force $\overrightarrow{C_{5/4}}$ qui tend à déplacer **2**, ce dernier reste immobile par rapport à **1** grâce au seul **phénomène de l'adhérence.**

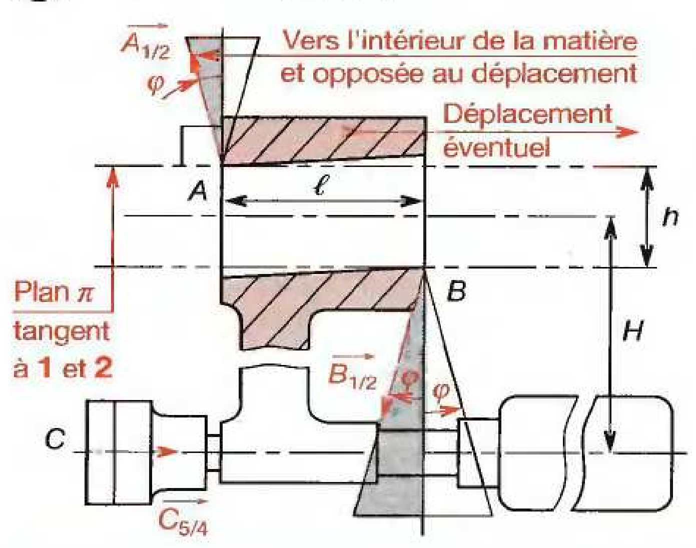


PREMIER EXEMPLE :

Dans le serre-joint ci-contre, **on donne** $\|\overrightarrow{C_{5/4}}\|$, h, H, $\mu = \tan\varphi$ en A et B. **Déterminer** la condition de non-glissement de **2/1**.

HYPOTHÈSES :

- Jeu important entre **1** et **2**. Solides indéformables, contacts ponctuels en A et B.
- Liaison appui-plan **5-4**. Torseur réductible à un glisseur horizontal en C (patin **4** monté sur rotule). Poids de **2** négligé.



SOLUTION :

1° Isoler l'ensemble {2, 3, 4} à l'équilibre strict (fig. 2) ;
2° Recenser les actions mécaniques extérieures (fig. 3) ;
3° Écrire le principe fondamental de la statique :

$$_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{1/2}}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} + {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{B_{1/2}}\\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{B_{1/2}}\end{matrix}\right\} + {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{C_{5/4}}\\ \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{C_{5/4}}\end{matrix}\right\} = \{0\}.$$

- Théorème de la résultante statique :

$$\overrightarrow{A_{1/2}} + \overrightarrow{B_{1/2}} + \overrightarrow{C_{5/4}} = \vec{0} \qquad \text{(I)}$$

sur $(O,\vec{x})$: $-\mu\|\overrightarrow{N_A}\| - \mu\|\overrightarrow{N_B}\| + \|\overrightarrow{C_{5/4}}\| = 0$, (1)

sur $(O,\vec{y})$: $\|\overrightarrow{N_A}\| - \|\overrightarrow{N_B}\| = 0$. (2)

- Théorème du moment statique en A :

$$\vec{0} + \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{B_{1/2}} + \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{C_{5/4}} = \vec{0} \qquad \text{(II)}$$

$$\|\overrightarrow{C_{5/4}}\|(H+h/2) - \mu\|\overrightarrow{N_B}\|.h - \|\overrightarrow{N_B}\|.\ell = 0 \quad (3)$$

de (2) on tire : $\|\overrightarrow{N_A}\| = \|\overrightarrow{N_B}\| = \|\vec{N}\|$

(1) devient : $-2\mu\|\vec{N}\| + \|\overrightarrow{C_{5/4}}\| = 0$, $\|\overrightarrow{C_{5/4}}\| = 2\mu\|\vec{N}\|$ (2'),

de (3) on tire : $\|\overrightarrow{C_{5/4}}\| = \dfrac{\|\vec{N}\|.\ell + \mu\|\vec{N}\|.h}{H+h/2}$ (3')

(2') = (3') : $2\mu\|\vec{N}\| = \dfrac{\|\vec{N}\|.\ell + \mu\|\vec{N}\|.h}{H+h/2}$.

- **À l'équilibre strict :** $\boxed{H = \ell/(2\mu)}$.
- **Condition de glissement :** $\|\overrightarrow{C_{5/4}}\| > 2\mu\|\vec{N}\|$

$$\frac{\|\vec{N}\|.\ell + \mu\|\vec{N}\|.h}{H+h/2} > 2\mu\|\vec{N}\| \,;\ \boxed{H < \ell/(2\mu)}.$$

- **Condition d'arc-boutement :**

$$\|\overrightarrow{C_{5/4}}\| > 2\mu\|\vec{N}\| \,;\ \boxed{H > \ell/(2\mu)}.$$

③ Liaisons	Représentation géométrique	Torseur transmissible
Liaison ponctuelle 1 - {2,3,4} Centre A normale : $(A,\vec{y})$; $\mu \neq 0$	$\vec{y}$, $\overrightarrow{A_{1/2}}$, $\overrightarrow{N_A}$, φ, φ, $\vec{x}$, $\overrightarrow{T_A}$, A	$_A\{\mathcal{A}_{1/2}\} = {}_A\left\{\overrightarrow{A_{1/2}}\ \ \vec{0}\right\}$ Dans $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ $\overrightarrow{A_{1/2}}\begin{pmatrix}-\mu\|\overrightarrow{N_A}\|\\ \|\overrightarrow{N_A}\|\\ 0\end{pmatrix}$
Liaison ponctuelle 1 - {2,3,4} Centre B normale : $(B,\vec{y})$; $\mu \neq 0$	$\overrightarrow{T_B}$, $\vec{y}$, B, $\vec{x}$, φ, φ, $\overrightarrow{B_{1/2}}$, $\overrightarrow{N_B}$	$_B\{\mathcal{B}_{1/2}\} = {}_B\left\{\overrightarrow{B_{1/2}}\ \ \vec{0}\right\}$ Dans $(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ $\overrightarrow{B_{1/2}}\begin{pmatrix}-\mu\|\overrightarrow{N_B}\|\\ -\|\overrightarrow{N_B}\|\\ 0\end{pmatrix}$
Liaison appui-plan 5 - {2,3,4}*	$\overrightarrow{C_{5/4}}$, C	$_C\{\mathcal{C}_{5/4}\} = {}_C\left\{\overrightarrow{C_{5/4}}\ \ \vec{0}\right\}$ $\overrightarrow{C_{5/4}}\begin{pmatrix}\|\vec{C}\|\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

* La liaison rotule **4-3** entraîne une répartition sensiblement uniforme des actions de contact **5 - {2,3,4}**.

DEUXIÈME EXEMPLE :

Le dispositif anti-dérapant ci-dessous* est composé de six bras tirés radialement de façon concentrique par un mécanisme contenu dans le boitier central **9**. Lorsque le bras **3**, par exemple, passe à la verticale, le pneu s'écrase, le bras coulisse dans une rainure de guidage du boitier **9** et la force de serrage s'annulle. Le dispositif donc centré et équilibré au cours de la rotation de la roue.

On donne : $h = 140$, $\mu = \tan\varphi = 0{,}4$ en B et C de **3** sur **9**.

Rechercher graphiquement la condition de non arc-boutement entre **3** et **9** et **trouver** la valeur de ℓ donnant la position limite par rapport à $(O, \vec{x})$ de la force de $\overrightarrow{A_{6/3}}$ du crampon **6** sur **3**.

Hypothèses :

- Le poids des bras et des crampons est négligeable devant la force de serrage $\|\vec{F}\| = 220$ N.
- Il existe un plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$ dans le plan médian des bras pour les efforts et la géométrie.
- Sous l'action de la force $\overrightarrow{A_{6/3}}$ le bras remonte, bascule, et vient en contact ponctuel en B et C sur **9**.

SOLUTION :

1° **Isoler 3** à l'équilibre strict.

2° **Recenser les actions mécaniques extérieures** :

$$_B\{B_{9/3}\} = {}_B\begin{Bmatrix}\overrightarrow{B_{9/3}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix}-\|\overrightarrow{B_{9/3}}\|\sin\varphi & 0\\ -\|\overrightarrow{B_{9/3}}\|\cos\varphi & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$_C\{C_{9/3}\} = {}_C\begin{Bmatrix}\overrightarrow{C_{9/3}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_C\begin{Bmatrix}-\|\overrightarrow{C_{9/3}}\|\sin\varphi & 0\\ +\|\overrightarrow{C_{9/3}}\|\cos\varphi & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$_A\{A_{6/3}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{A_{6/3}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}+\|\overrightarrow{A_{6/3}}\|.\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

3° **Écrire le principe fondamental de la statique** :

$$_B\{B_{9/3}\} + {}_B\{C_{9/3}\} + {}_B\{A_{6/3}\} = \{0\}.$$

4° **Résoudre graphiquement** :

Le système est en équilibre sous l'action de trois glisseurs coplanaires** :

- $\vec{M}_I = \vec{0} \Leftrightarrow$ les trois résultantes sont concourantes en I.
- $\vec{S} = \vec{0} \Leftrightarrow$ le dynamique est fermé.

Les constructions sont expliquées ci-dessous.

On trouve que si $\ell_1 < 175$, il y a glissement de **3** sur **9**.

DISPOSITIF ANTI-DÉRAPANT (POUR NEIGE)

MÉTHODE DE CONSTRUCTION ET DE RECHERCHE

1° **Prolonger les supports connus $(\overrightarrow{C_{9/3}}, \overrightarrow{B_{9/3}})$ jusqu'à leur point de concours I. Hachurer les zones dans lesquelles peuvent se trouver $\overrightarrow{C_{9/3}}$ et $\overrightarrow{B_{9/3}}$ pour l'équilibre.**

2° **Tracer une verticale passant par I. Si :**

- **Le support de $\overrightarrow{A_{6/3}}$ est à gauche de I : arc-boutement.**
- **Le support de $\overrightarrow{A_{6/3}}$ est à droite de I : l'équilibre de 3 est impossible, il y a glissement de 9 sur 3.**

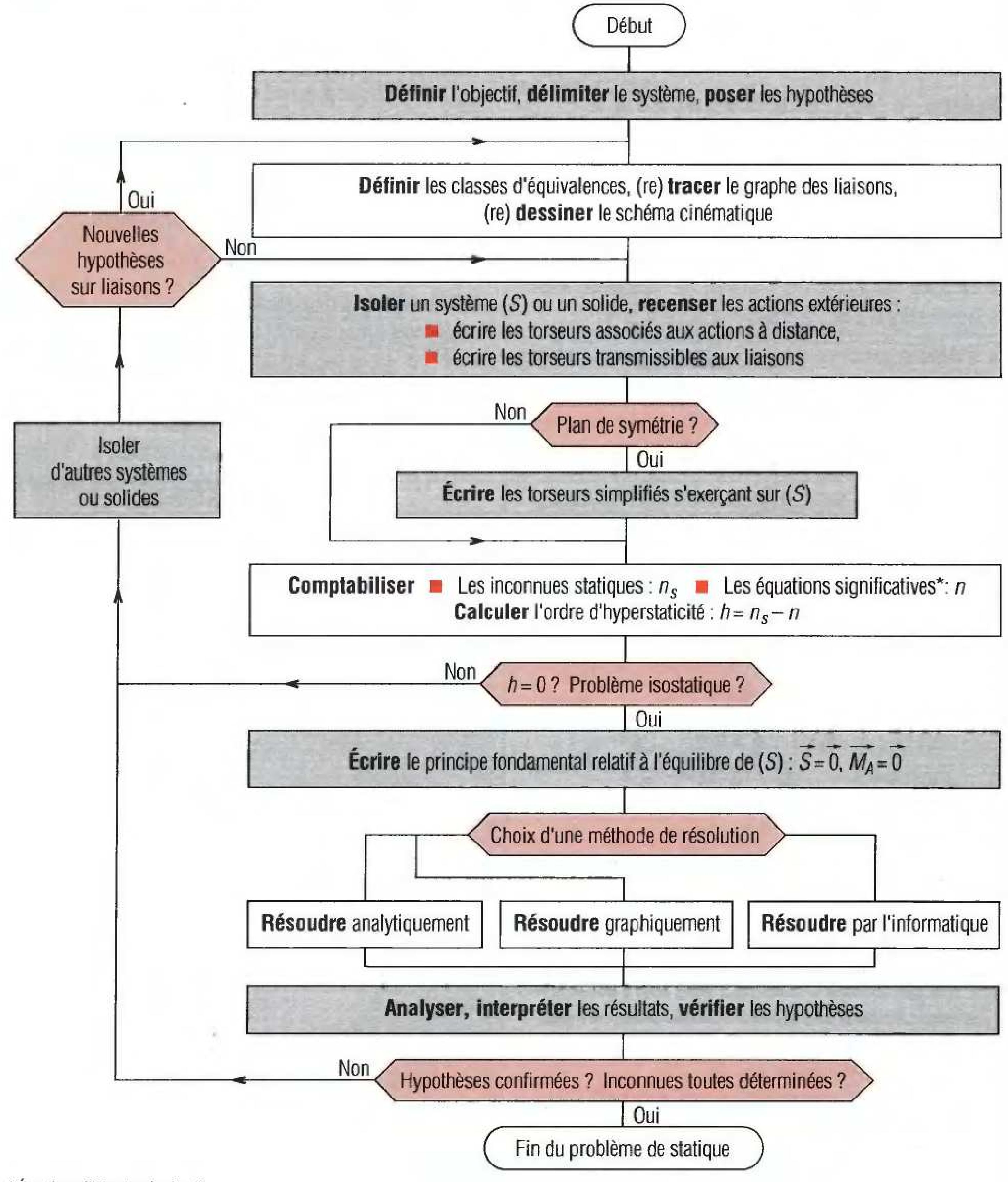
ÉQUILIBRE DE 3 ISOLÉ

$\overrightarrow{A_{6/3}}$ effort de l'axe de fixation du crampon **6** sur le bras **3**

* Brevet déposé par l'un des auteurs de l'ouvrage. ** Voir théorème chapitre 42.

37 Principales étapes d'un problème de statique

37 ▪ 1 Méthode générale



* Équations différentes de : 0 = 0.

37 ■ 2 Exemple d'application

Un mécanisme de commande de quatre soupapes d'un même cylindre de moteur à explosion comprend (fig. 1) :

- 2 linguets d'admission **10**, 2 linguets d'échappement **2**,
- 2 tiges de culbuteurs **3**,
- 2 culbuteurs d'échappement **4**,
- 4 poussoirs hydrauliques à rotule **12**, permettant l'articulation des linguets et le rattrapage automatique des jeux de dilatation de la commande.

1re ÉTAPE : cerner l'objectif

Connaissant l'effort exercé par la soupape **6** sur **5** $\|\overrightarrow{F_{6/5}}\| = 1\,045$N, calculer l'effort $\overrightarrow{A_{2/1}}$ dans le but de vérifier la condition de non-matage en A (fig. 2).

■ Analyser le fonctionnement Caractériser les mobilités

L'arbre à cames **1** est entraîné par le vilebrequin à l'aide d'une courroie crantée. Les cames d'admission agissent directement sur les soupapes d'admission **11** par l'intermédiaire des linguets **10**.

Les cames d'échappement actionnent les soupapes **6** de même nom, par l'intermédiaire des linguets **2** (fig. 1 et 2), des tiges **3**, des culbuteurs **4**, articulés autour d'un axe solidaire de la culasse **0**.

Les soupapes **6** sont guidées dans des bagues de bronze. Elles sont appliquées contre **5** par deux ressorts **7** et **8**.

■ Poser les hypothèses simplificatrices

Les liaisons pivot d'axe $(E, \vec{z})$ et rotules (de centres B, C, D) sont parfaites (sans jeu, sans frottement). Le centre B de la rotule du poussoir hydraulique est considéré comme fixe par rapport à la culasse **0**. Le contact entre **5** et **6** est avec frottement, tel que : $\tan\varphi = \mu = 0{,}15$.

Les poids propres des pièces sont négligés devant l'intensité des actions mécaniques aux liaisons.

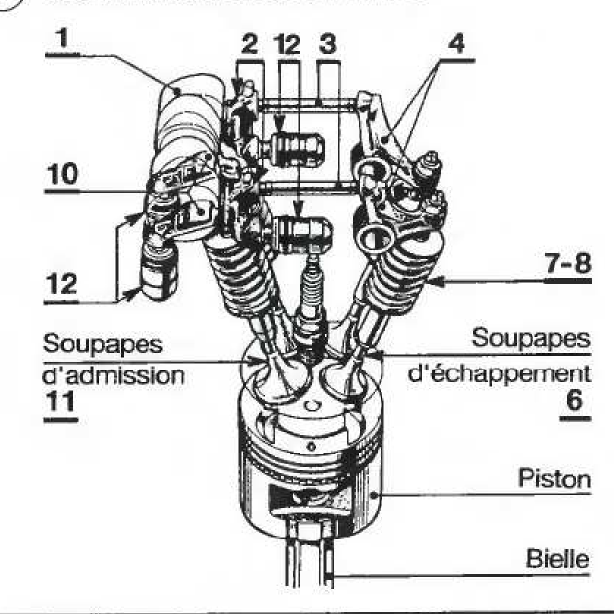
Il existe un plan de symétrie pour la géométrie et les actions mécaniques.

2e ÉTAPE : tracer le graphe des liaisons

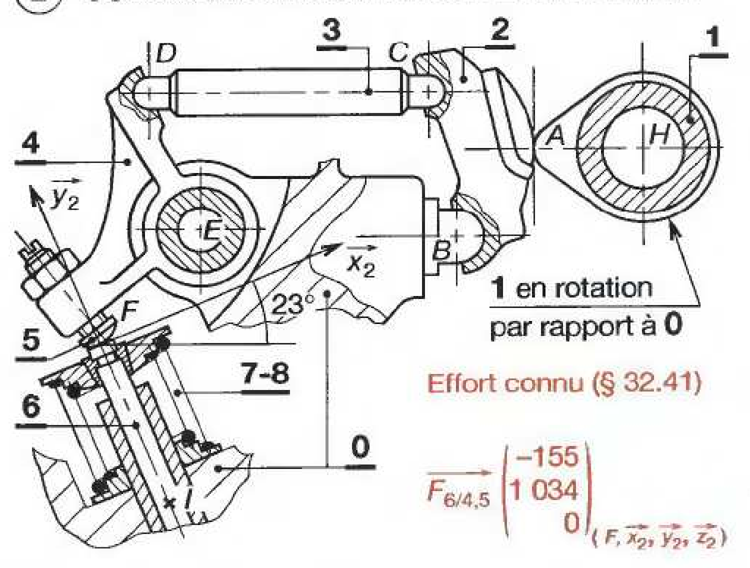
Au préalable (méthode développée au chapitre 5),

- définir les classes d'équivalence (groupe de pièces sans mouvement relatif entre elles),
- rechercher et identifier les liaisons entre ces classes.

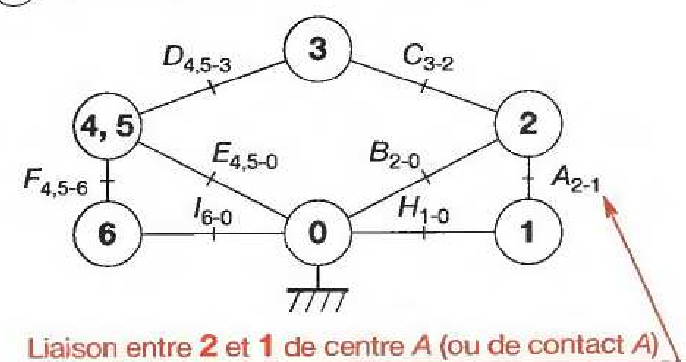
(1) COMMANDE DE SOUPAPES



(2) COMMANDE DE SOUPAPES D'ÉCHAPPEMENT



(3) GRAPHE DE LIAISON



Liaison entre **2** et **1** de centre A (ou de contact A)

$D_{4,5\text{-}3}$: rotule	$B_{2\text{-}0}$: rotule
$E_{4,5\text{-}0}$: pivot	$I_{6\text{-}0}$: pivot glissant
$F_{4,5\text{-}6}$: sphère-plan	$A_{2\text{-}1}$: sphère-plan
$C_{3\text{-}2}$: rotule	$H_{1\text{-}0}$: pivot

■ **Représenter le schéma cinématique**

Le mécanisme présente un plan de symétie pour la géométrie et les actions mécaniques. Nous optons pour le schéma plan représenté figure 4.

3e ÉTAPE : isoler le(s) système(s)

■ **Système soumis à deux résultantes**

3 est en équilibre sous l'action de deux résultantes directement opposées* : $\overrightarrow{C_{2/3}}$ et $\overrightarrow{D_{4,5/3}}$, portées par la droite DC. Leur intensité reste inconnue.

■ **Système soumis à trois résultantes**

Isoler le culbuteur **{4, 5}** :

■ Écrire les torseurs transmissibles aux liaisons dans le repère galiléen $(E, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la culasse **0** :

Liaison rotule **3** - **{4, 5}** : $${}_D\{D_{3/4,5}\} = {}_D\begin{Bmatrix} X_D & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

(Le support de $\overrightarrow{D_{3/4,5}}$ est selon DC : voir l'isolement précédent.)

Liaison pivot **0** - **{4, 5}** : $${}_E\{E_{0/4,5}\} = {}_E\begin{Bmatrix} X_E & 0 \\ Y_E & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

(Le mécanisme possède un plan de symétrie $(E, \vec{x}, \vec{y})$.)

Liaison sphère-plan **6** - **{4, 5}** :

$${}_F\{F_{6/4,5}\} = {}_F\begin{Bmatrix} -1\,045 \sin(\alpha + \varphi) & 0 \\ 1\,045 \cos(\alpha + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

■ Écrire les torseurs associés aux actions à distance :

Aucun (poids négligés, pas d'actions électromagnétiques).

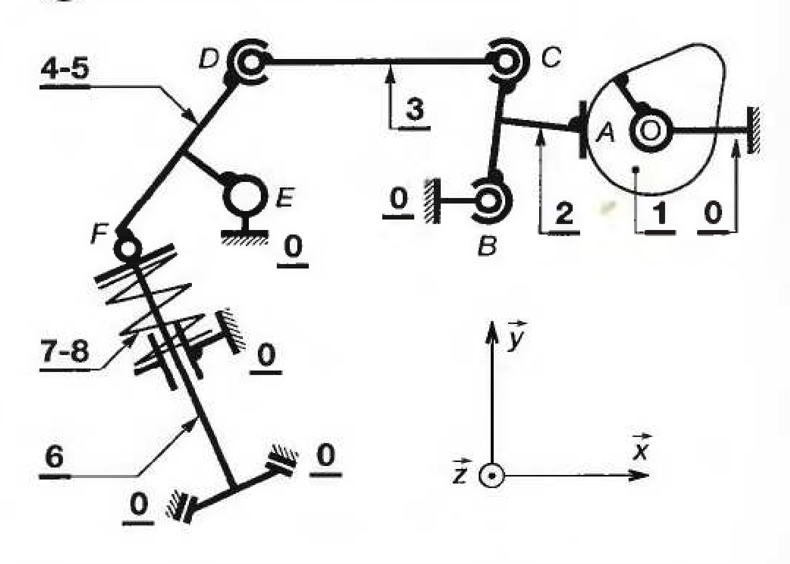
4e ÉTAPE : calculer l'ordre d'hyperstaticité de {4, 5}

■ Nombre d'inconnues : $n_s = 3 : X_D, X_E, Y_E$.

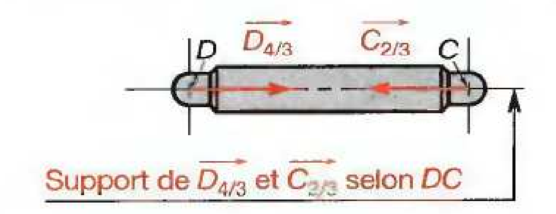
■ Nombre d'équations : $n = 3$ (problème plan).

■ $h = 3 - 3$; $h = 0$. Problème résolvable.

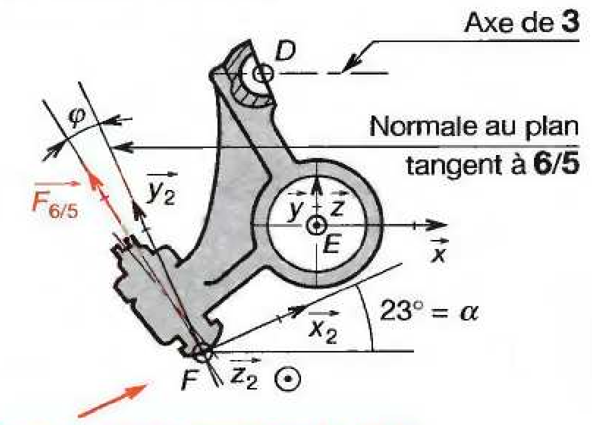
④ SCHÉMA CINÉMATIQUE PLAN

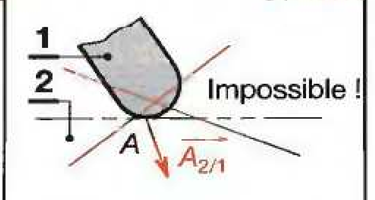
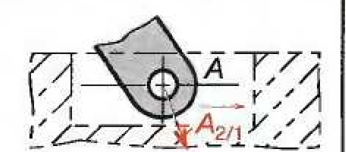


⑤ ISOLEMENT DE LA BIELLETTE 3



⑥ ISOLEMENT DE {4, 5}



Guide élémentaire pour interpréter les résultats	**Cas 1**	Possibilité de modification pour certains mécanismes
Tout résultat doit être analysé et jugé : ■ **L'action de contact est-elle dirigée vers la matière ? Oui.** **Sinon : erreur ou modifier la nature de la liaison (cas 1).** ■ **Le linguet supporte une force $\|\overrightarrow{A_{1/2}}\| = 1\,900$ N sur un contact ponctuel.** **Ce contact résiste-t-il au matage ?** **Calculer la pression de matage par la formule de Hertz (voir § 47.23).**	 **Force dirigée vers l'extérieur de la matière du système isolé : impossible !**	 **Remplacer le contact ponctuel par une liaison pivot. (Reconception)**

* Voir théorème chapitre 42.

5e ÉTAPE : écrire le principe fondamental de la statique

- Le système {**4**, **5**} est en équilibre.
- **Rechercher le point où il y a le plus d'inconnues.** (Le changement de point de réduction des torseurs y est simple). Ici : *E*.
- Écrire que la somme des torseurs d'actions mécaniques extérieures sur {**4**, **5**} au point *E* est égale à un torseur nul :

$_E\{D_{3/4,5}\} + {}_E\{E_{0/4,5}\} + {}_E\{F_{6/4,5}\} = \{0\}$ (voir § 31.5).

6e ÉTAPE : choisir une méthode de résolution

- Le système {**4**, **5**} est en équilibre sous l'action de trois glisseurs. C'est un problème simple.
- Les **hypothèses simplificatrices sont nombreuses** : facteur de frottement et jeu négligés en *E* et *D*. Effets dynamiques négligés…
- Les fichiers C.A.O. – D.A.O. définissant la géométrie des pièces, la nature des liaisons, les efforts appliqués n'existent pas.
- Dans ce cas, **privilégier la rapidité et la simplicité : la méthode graphique convient.**

7e ÉTAPE : résoudre par la méthode graphique

- Le théorème de la résultante statique s'écrit :

$\overrightarrow{D_{3/4,5}} + \overrightarrow{E_{0/4,5}} + \overrightarrow{F_{6/4,5}} = \vec{0} \Leftrightarrow$ dynamique fermé.

- Le théorème du moment statique s'écrit :

$\overrightarrow{\mathcal{M}_E(\overrightarrow{D_{3/4,5}})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_E(\overrightarrow{E_{0/4,5}})} + \overrightarrow{\mathcal{M}_E(\overrightarrow{F_{6/4,5}})} = \vec{0} \Leftrightarrow$ trois résultantes concourantes en *I*.

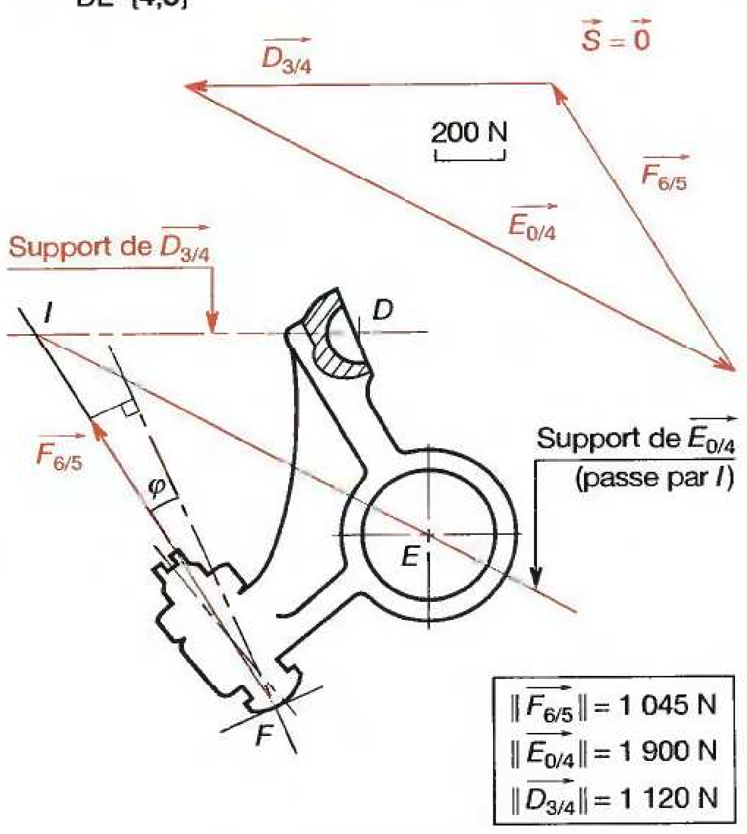
8e ÉTAPE : isoler le linguet 2

- Le linguet est soumis à l'action de trois résultantes parallèles. $\overrightarrow{C_{3/2}}$ est connue par l'isolement précédent.

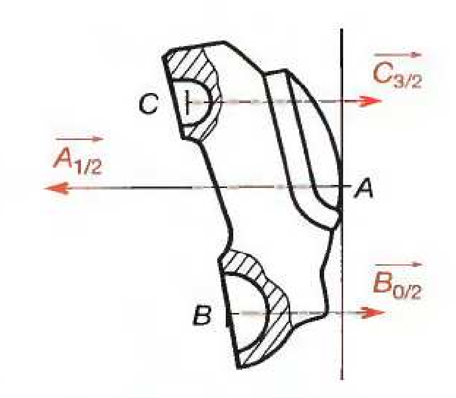
La méthode graphique du dynamique et du funiculaire s'applique. On trouve $\|\overrightarrow{A_{1/2}}\| = 1\,900$ N (voir § 44.2).

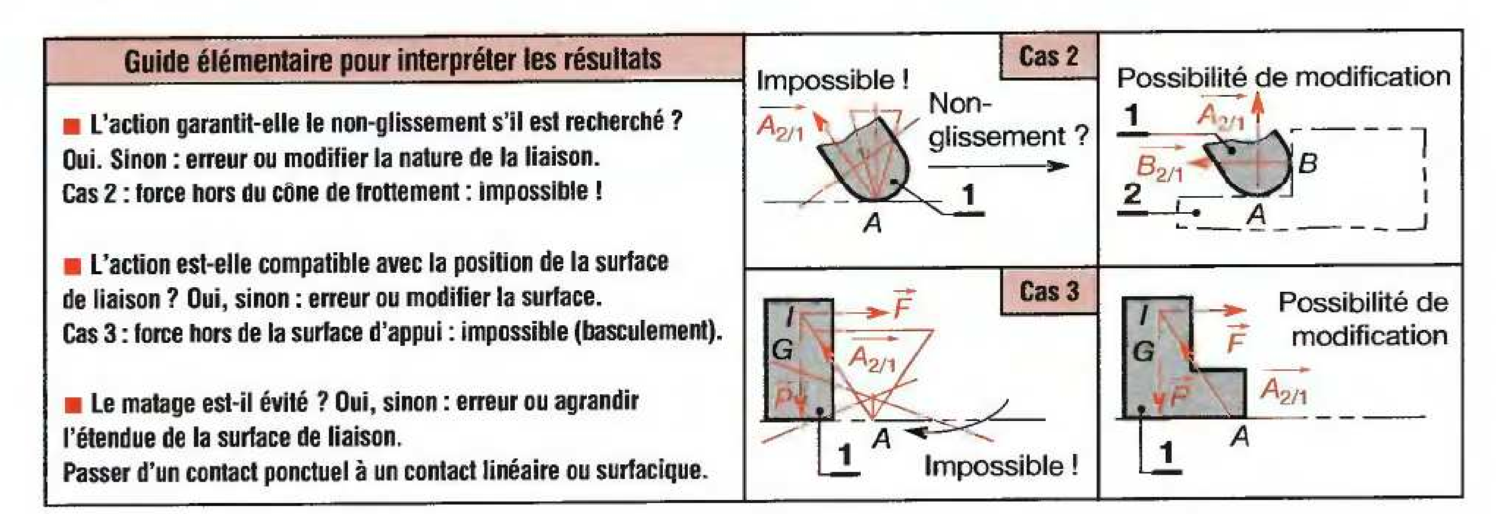
9e ÉTAPE : interpréter les résultats

(7) RÉSOLUTION GRAPHIQUE DE L'ÉQUILIBRE DE {4,5}



(8) ÉQUILIBRE DU LINGUET **2**





Guide élémentaire pour interpréter les résultats

- **L'action garantit-elle le non-glissement s'il est recherché ? Oui. Sinon : erreur ou modifier la nature de la liaison.**
Cas 2 : force hors du cône de frottement : impossible !

- **L'action est-elle compatible avec la position de la surface de liaison ? Oui, sinon : erreur ou modifier la surface.**
Cas 3 : force hors de la surface d'appui : impossible (basculement).

- **Le matage est-il évité ? Oui, sinon : erreur ou agrandir l'étendue de la surface de liaison.**
Passer d'un contact ponctuel à un contact linéaire ou surfacique.

38 Ordonnancement des isolements

Une suspension arrière de moto est représentée sur la figure 1.

À l'arrêt, l'effort de la roue **1** sur **2** est $\overrightarrow{D_{1/2}} = 2\,000\,\vec{y}$ (en N).

Tous les efforts sont ramenés dans le plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

On demande de trouver l'**ordre des isolements** afin de déterminer les actions mécaniques aux articulations A, B, C, en utilisant le graphe de liaison.

1° Reporter sur le graphe de liaison (fig. 2) le nombre d'inconnues statiques (n_s).

2° Isoler le système le plus global (S) reliant le solide sur lequel s'exerce la force connue aux actions recherchées $(S) = \{2, 3\}$ $n_s = 2 + 2 = 4$ (fig. 2).

Nombre d'équations : $n = 3$ (problème plan).

$h = 4 - 3 = 1$. Résolution impossible.

3° Rechercher d'autres isolements.

$(S_2) = \{2\}$ $n_s = 4$; $(S_3) = \{3\}$ $n_s = 4$.

Aucun isolement ne permet de résoudre à lui seul un équilibre (fig. 2).

4° Isoler le(s) système(s) de **deux glisseurs** $(S_3) = \{3\}$ $n_s = 4$; deux glisseurs directement opposés ⇒ support selon AB (fig. 3). En A et B, il reste une inconnue (la norme). Reporter cette donnée sur le graphe (fig. 4).

5° Isoler le(s) système(s) de **trois glisseurs** sur lequel s'exerce la force connue. $(S_2) = \{2\}$ $n_s = 3$, $n = 3$. Résolution possible (fig. 4).

$\overrightarrow{M_I} = \vec{0}$ ⇔ Trois glisseurs concourants.

$\vec{R} = \vec{0}$ ⇔ Dynamique fermé.

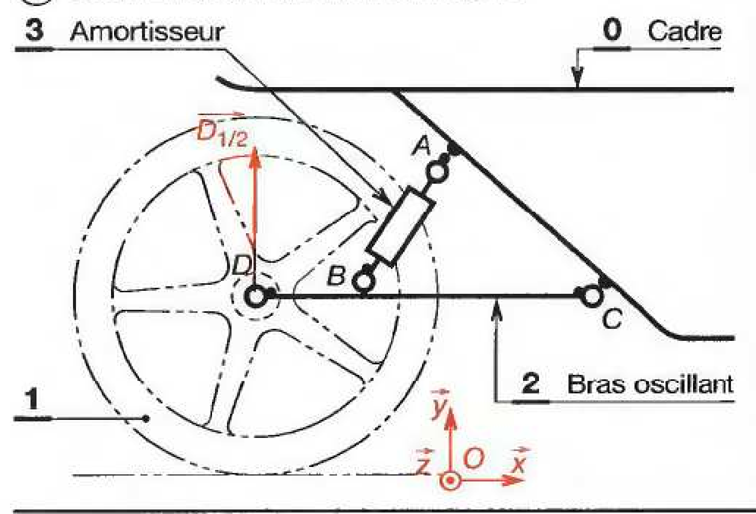
$\|\overrightarrow{B_{3/2}}\| = 3\,400$ N $\|\overrightarrow{C_{0/2}}\| = 2\,000$ N.

6° Isoler à nouveau **3**. $\overrightarrow{B_{2/3}}$ est connue (actions mutuelles).

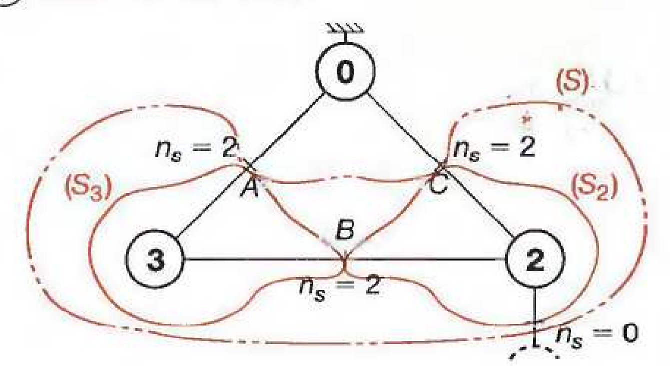
On trouve $\overrightarrow{A_{0/3}} = -\overrightarrow{B_{2/3}}$; $\|\overrightarrow{A_{0/3}}\| = 3\,400$ N.

Le problème de statique est résolu.

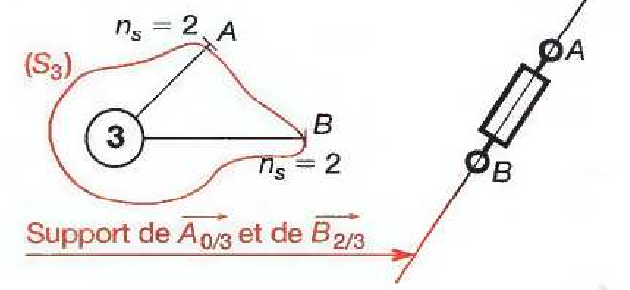
① SUSPENSION ARRIÈRE DE MOTO



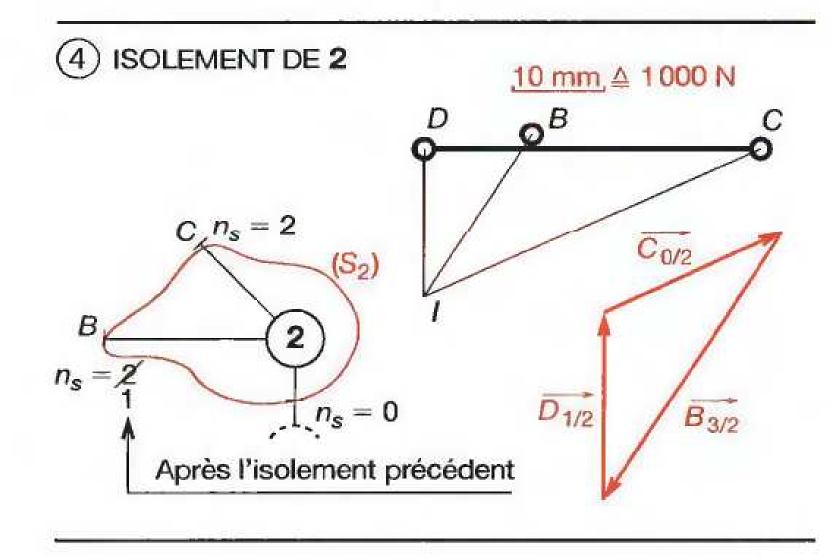
② GRAPHE DE LIAISON



③ ISOLEMENT DE 3



④ ISOLEMENT DE 2



39 Choix d'une méthode de résolution

Il est important de connaître les caractéristiques d'une méthode pour faire un choix judicieux.

39.1 Méthode analytique

Elle permet de résoudre des équilibres de systèmes :

- Soumis à des **torseurs quelconques dans l'espace** (exemple 1 : poutre encastrée).
- Soumis à des glisseurs non coplanaires (exemple 2 : arbre de boîte de vitesses ; chapitre 41).
- Soumis à des résultantes dans le plan et des moments non nuls (exemple 3 : montage automatisé ; chapitre 40).
- Occupant plusieurs positions dans le plan ou l'espace (robots) nécessitant un **paramétrage des actions**. Les calculs sont parfois complexes et **lents, mais précis**.

39.2 Méthode graphique

Elle permet de résoudre les équilibres de systèmes :

- Soumis à des **glisseurs coplanaires** : contacts ponctuels dont les normales sont dans un même plan (voir chapitre 37 commande de soupapes).
- Soumis à des actions de contacts concourantes en un même point (exemple 4 : commande de godet ; § 42.2).
- Soumis à des torseurs dont les invariants scalaires sont nuls : ($\vec{S}.\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{S}.\vec{\mathcal{M}}_B = ... = 0$). Ils sont donc réductibles à des résultantes aux points appartenant aux axes centraux (exemple 5).

Cette méthode nécessite :

- des tracés soignés, aux instruments, à partir de plans précis,
- des hypothèses simplificatrices justifiant la **précision moyenne**, mais **rapide**, de la méthode.

39.3 Méthode informatique

Elle permet de résoudre des équilibres de systèmes :

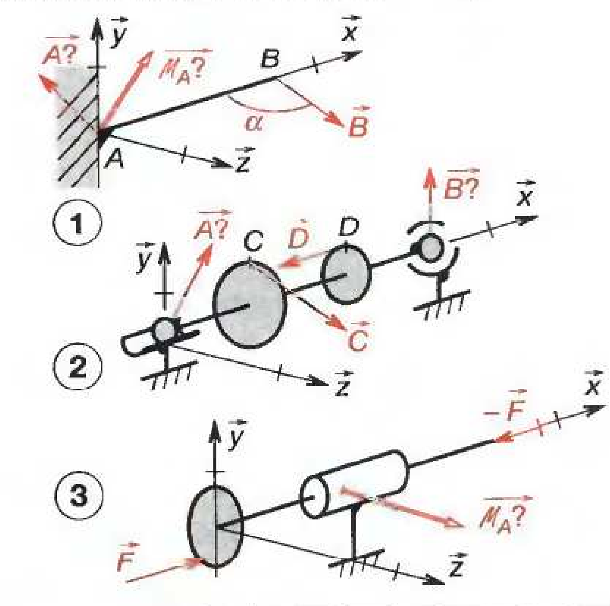
- soumis à des **torseurs quelconques**, **complexes**, composés de nombreux solides (exemple 6 : charpentes métalliques, systèmes triangulés),
- **hyperstatiques** (exemple 7 : poutre sur trois appuis),
- occupant différentes positions dans l'espace (presses...).

Cette méthode **nécessite la création de fichiers dessins** mémorisants les données numériques de la géométrie des solides (démarche D.A.O.* - C.A.O **).

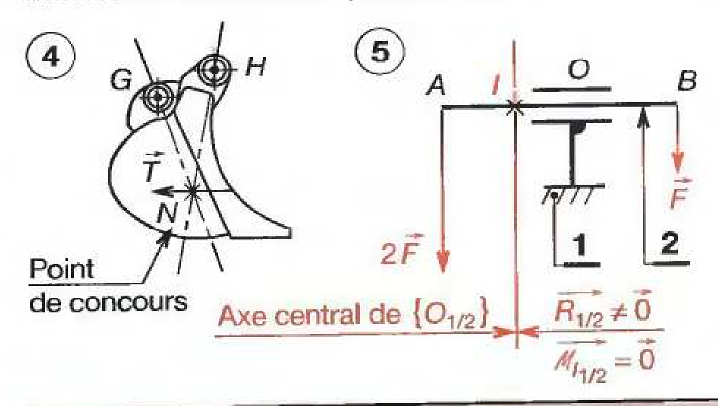
- Lorsque les fichiers dessins existent, **les calculs sont rapides et précis**.

* D.A.O. : dessin assisté par ordinateur. ** C.A.O. : conception assistée par ordinateur.

MÉTHODE ANALYTIQUE (EXEMPLES)



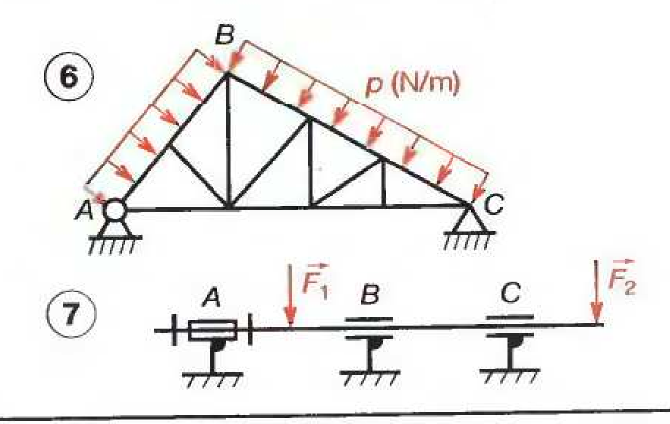
MÉTHODE GRAPHIQUE (EXEMPLES)



Conseil pour la résolution

Pour résoudre un problème, ne pas hésiter à utiliser conjointement les méthodes analytiques et graphiques, en choisissant à chaque stade celle qui est la mieux adaptée.

MÉTHODE INFORMATIQUE (EXEMPLES)



40 Résolution analytique dans le plan

Un problème est considéré comme **plan** si la branche **2**, par exemple, est en équilibre dans le repère $\mathcal{R}_g(B, \vec{x}, \vec{y})$ sous l'action d'actions mécaniques dont les **résultantes sont dans le plan de symétrie (*P*) et les moments éventuels perpendiculaires à (*P*)**.

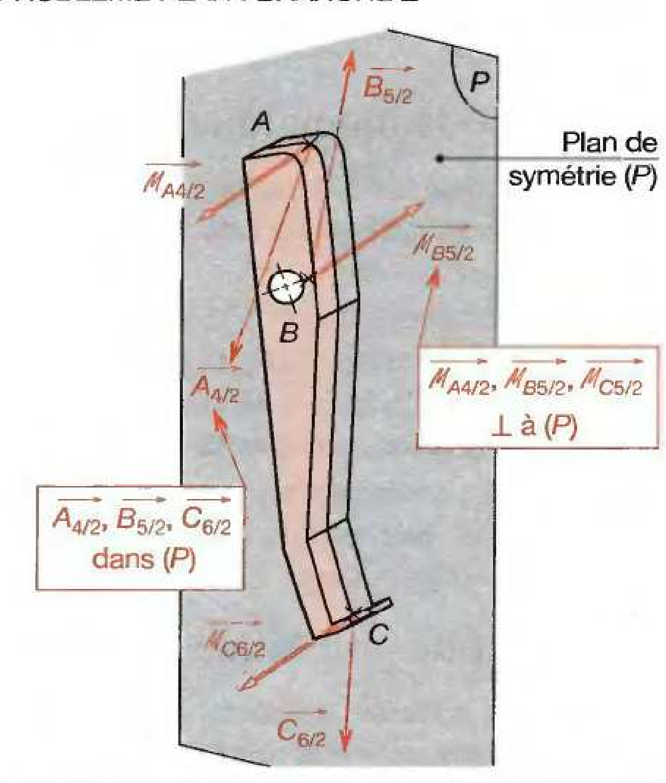
Le principe fondamental de la statique appliqué à **2** s'écrit :

$$_B\{\mathcal{F}_{\bar{2}/2}\} = \{0\} \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0} \end{cases} \quad \text{(notation § 31.5).}$$

La méthode de résolution analytique consiste à :

- **projeter $\vec{R}$ et $\vec{\mathcal{M}}_B$ dans $\mathcal{R}_g$: $(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:**
  - $\vec{R} = \vec{0}$ • **En projection sur $(B, \vec{x})$: $X = 0$ (1)**
  - • **En projection sur $(B, \vec{y})$: $Y = 0$ (2)**
  - $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$ • **Par rapport à $(B, \vec{z})$: $N_B = 0$ (3)**
- **résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues.**

PROBLÈME PLAN : BRANCHE **2**



Hypothèses : liaisons *A*, *B*, *C* réelles avec frottement (voir § 12.6 et § 12.10)

EXEMPLE DE CALCUL 1 :

L'arrache moyeu sert à désolidariser la bague **6** montée à la presse sur l'arbre **7**.

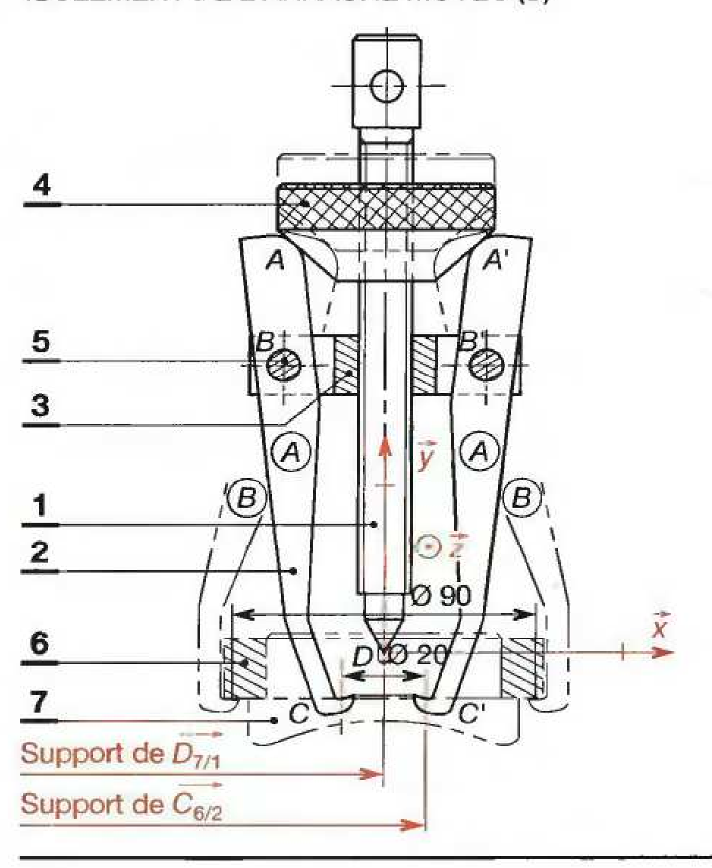
À l'aide de l'écrou **4**, l'utilisateur règle l'écartement des branches **2** en fonction du diamètre de la pièce **6**. Lorsqu'il tourne la vis **1** en appui sur l'extrémité de l'arbre **7**, l'écrou à chape **3** remonte et entraîne les deux branches **2** et la bague **6**.

HYPOTHÈSES :

- Poids des pièces négligé devant les efforts aux liaisons.
- Contacts ponctuels parfaits entre **2-4** en *A*, **2-6** en *C*.
- Frottement négligé en *A*, *B*, *C*.
- Il existe deux plans de symétrie : $(D, \vec{x}, \vec{y})$, $(D, \vec{z}, \vec{y})$

On donne $\vec{D}_{7/1} = 10\,000\,\vec{y}$. Calculer $\vec{C}_{6/2}$, $\vec{B}_{5/2}$, $\vec{A}_{4/2}$ dans la position *A* (extrémités *C* et *C'* rapprochées).

ISOLEMENT DE L'ARRACHE MOYEU (*S*)



SOLUTION :

1° Isoler l'arrache moyeu (*S*) = {1, 2, 3, 4, 5} :

- **Recenser les actions mécaniques sur (*S*).**

Liaison 7-1 Sphère-plan $(D, \vec{y})$	Liaison 6-2 Sphère-plan $(C, \vec{y})$	Liaison 6-2 Sphère-plan $(C', \vec{y})$
$_D\{\mathcal{D}_{7/1}\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 10\,000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_C\{\mathcal{C}_{6/2}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$_{C'}\{\mathcal{C}_{6/2}\} = {}_{C'}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y'_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

- **Rechercher les symétries** : le plan $(D, \vec{y}, \vec{z})$ est un plan de symétrie d'où $Y_C = Y'_C$.
- **Écrire le théorème de la résultante statique / $(D, \vec{y})$:**

$2\,Y_C + 10\,000 = 0$; d'où $Y_C = -5\,000$ N.

2° Isoler une branche 2 :

- **Recenser les actions mécaniques sur 2, (dans $B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$).**

Liaison 6-2 Sphère-plan $(C, \vec{y})$	Liaison 4-2 Sphère-plan $(A, \vec{n})$	Liaison 5-2 Pivot $(B, \vec{z})$
$\{C_{6/2}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -5000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{A_{4/2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert \sin 50° & 0 \\ -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert \sin 50° & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{B_{5/2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$

- **Rechercher les symétries et simplifier les torseurs :**

Le plan $(B, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie ; le torseur ${}_B\{B_{5/2}\}$ se simplifie : $Z_B = 0$; $L_B = M_B = 0$ (voir chapitre 8).

$$\{B_{5/2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

- **Rechercher l'ordre d'hyperstatisme :**

Nombre d'inconnues : $n_s = 3$ $(\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert, X_B, Y_B)$
Nombre d'équations : $n = 3$ (problème plan)
$h = n_s - n$.

$h = 3 - 3$; problème isostatique donc résolvable.

- **Écrire le principe fondamental de la statique :**

$${}_B\{C_{6/2}\} + {}_B\{A_{4/2}\} + {}_B\{B_{5/2}\} = \{0\}.$$

> **Le point B est choisi comme point de réduction car c'est en B qu'il y a le plus d'inconnues.**

- **Écrire le théorème de la résultante statique :**

$$\vec{C_{6/2}} + \vec{A_{4/2}} + \vec{B_{5/2}} = \vec{0} \qquad \text{(I)}$$

$$0 - \lVert\vec{A_{4/2}}\rVert \cos 50° + X_B = 0 \qquad (1)$$

$$-5\,000 - \lVert\vec{A_{4/2}}\rVert \sin 50° + Y_B = 0 \qquad (2)$$

- **Écrire le théorème du moment statique :**

$$\vec{BC} \times \vec{C_{6/2}} + \vec{BA} \times \vec{A_{4/2}} + \vec{0} = \vec{0} \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5\,000 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 37 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\cos 50° \\ -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\sin 50° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-10^5 - \lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\sin 50° \times 2 + \lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\cos 50° \times 37 = 0 \qquad (3)$$

De (3) on tire : $\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert = \dfrac{10^5}{22{,}251}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert \approx 4\,490}$ **N**

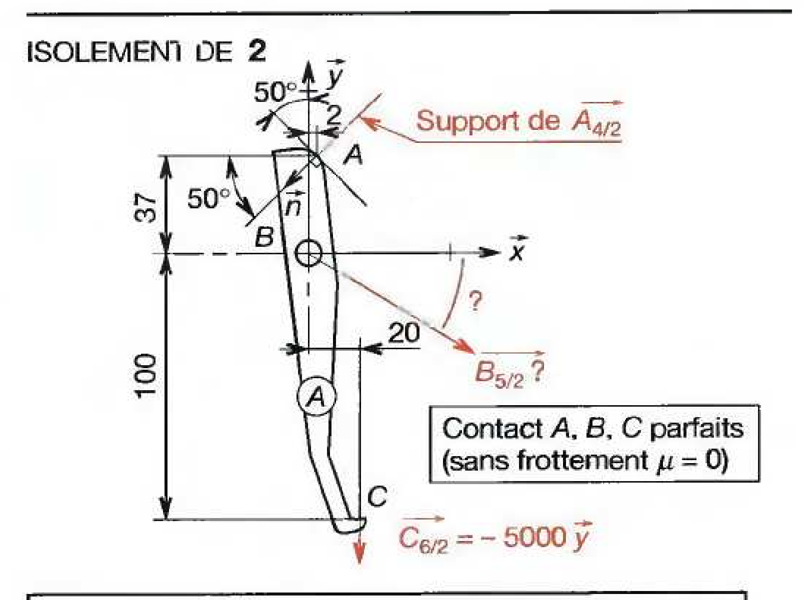
(1) devient : $-4\,494 \times \cos 50° + X_B = 0$; $\qquad$ $\boldsymbol{X_B \approx 2\,890}$ **N**

(2) devient : $-5000 - 4494 \times \sin 50° + Y_B = 0$; $\qquad$ $\boldsymbol{Y_B \approx 8\,440}$ **N**

Calculer $\lVert\vec{B_{5/2}}\rVert = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$:

$\lVert\vec{B_{5/2}}\rVert = \sqrt{2\,888{,}7^2 + 8\,442{,}6^2}$; $\boldsymbol{\lVert\vec{B_{5/2}}\rVert \approx 8\,920}$ **N .**

* $\times$ est le signe du produit vectoriel.



Contact A, B, C parfaits (sans frottement $\mu = 0$)

> **Notations** : ${}_B\{C_{6/2}\}$ se lit : torseur associé aux actions mécaniques de **6** sur **2** de la liaison C, exprimé au point de réduction B.

Changement du point de réduction d'un torseur

$${}_C\{C_{6/2}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{C_{6/2}} \\ \vec{\mathcal{M}_{C6/2}} \end{Bmatrix} \qquad \text{(cas général)}$$

Relation fondamentale (voir chapitre 76).

$${}_B\{C_{6/2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{C_{6/2}} \\ \vec{\mathcal{M}_{C6/2}} + \vec{BC} \times \vec{C_{6/2}} \end{Bmatrix}$$

Ici : $\vec{\mathcal{M}_{C6/2}} = \vec{0}$ (liaison sphère-plan parfaite), il suffit de calculer $\vec{BC} \times \vec{C_{6/2}}$:

$$\vec{BC} \times \vec{C_{6/2}} : \begin{pmatrix} 20 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① ② ③

$$\begin{matrix} 20 & & 0 \\ -100 & & -5\,000 \end{matrix}$$

$$\vec{BC} \times \vec{C_{6/2}} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \times 5\,000 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\vec{BA} \times \vec{A_{4/2}} : \begin{pmatrix} 2 \\ 37 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\cos 50° \\ -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\sin 50° \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \times \vec{A_{4/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\sin 50° \times 2 + \lVert\vec{A_{4/2}}\rVert.\cos 50° \times 37 \end{pmatrix}$$

41 Résolution analytique dans l'espace

Un problème est considéré comme **spatial** si le solide **1**, par exemple, est en équilibre dans le repère $\mathcal{R}_g(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sous l'action de **résultantes non coplanaires** et **de moments quelconques**.

Le théorème fondamental de la statique appliquée à **1** s'écrit :

$$_A\{\mathcal{F}_{\bar{1}/1}\} = \{0\} \quad \begin{cases} \overrightarrow{R_{\bar{1}/1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,\bar{1}/1}} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{notation § 31.5).}$$

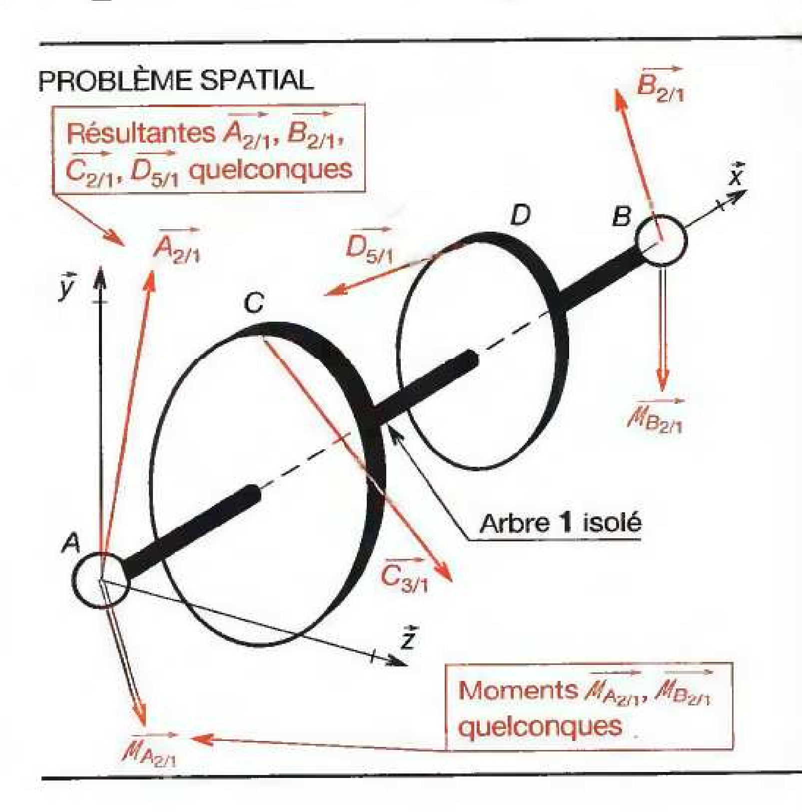
La méthode de résolution analytique consiste à :

- **Projeter $\vec{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$ dans $\mathcal{R}_g : (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:**

$$\overrightarrow{R_{\bar{1}/1}} = \vec{0} \begin{cases} \bullet \text{ en projection sur } (A, \vec{x}) : X = 0 & (1) \\ \bullet \text{ en projection sur } (A, \vec{y}) : Y = 0 & (2) \\ \bullet \text{ en projection sur } (A, \vec{z}) : Z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\,\bar{1}/1}} = \vec{0} \begin{cases} \bullet \text{ en projection sur } (A, \vec{x}) : L_A = 0 & (4) \\ \bullet \text{ en projection sur } (A, \vec{y}) : M_A = 0 & (5) \\ \bullet \text{ en projection sur } (A, \vec{z}) : N_A = 0 & (6) \end{cases}$$

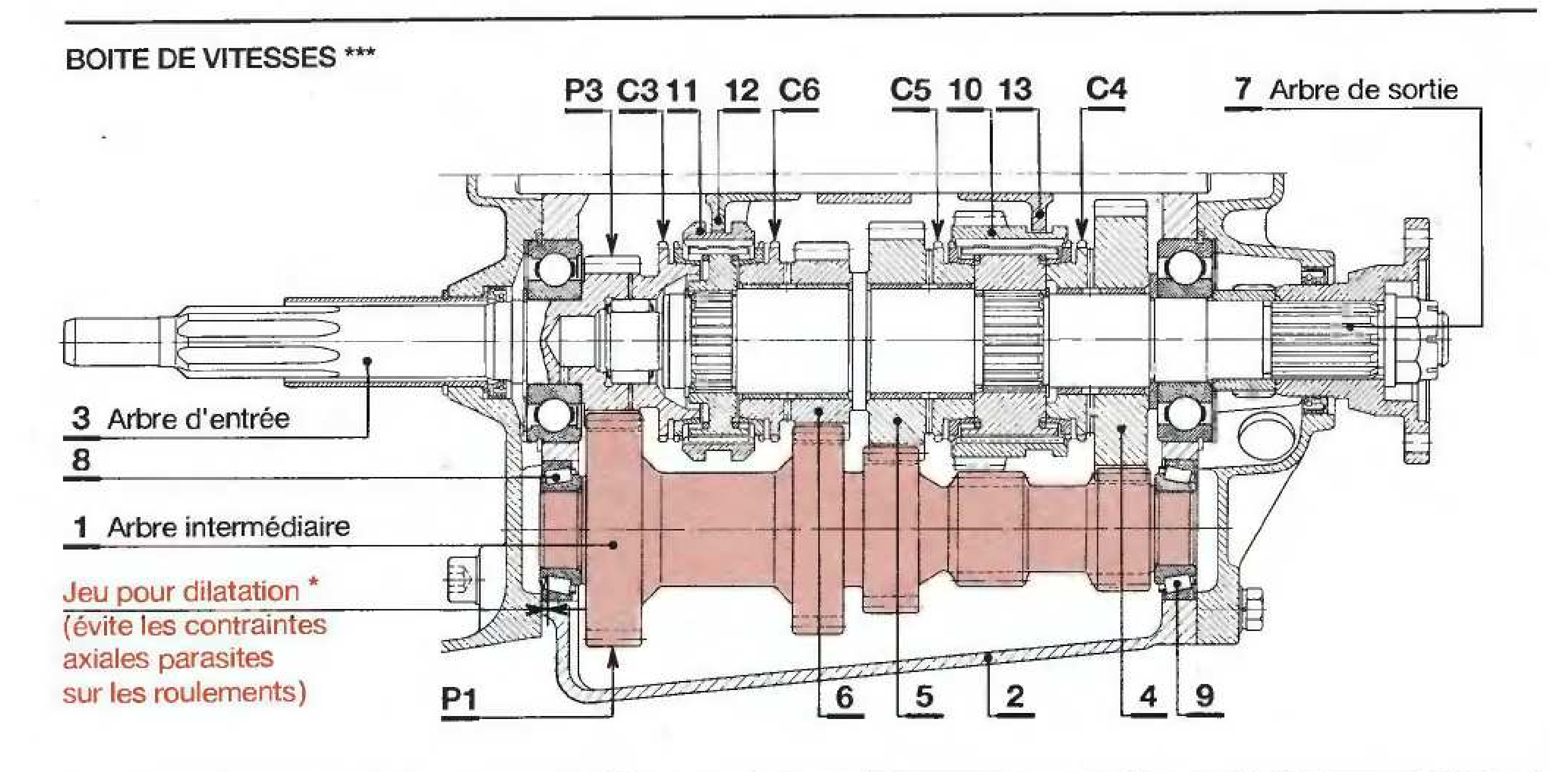
- **Résoudre le système de 6 équations à 6 inconnues.**



41 ■ 1 Calcul d'un arbre secondaire

Une boîte de vitesses d'automobile au « point mort » est représentée ci-dessous. Le couple moteur s'exerce sur l'arbre d'entrée **3**. Il est transmis à l'arbre intermédiaire **1** par le pignon P_3 en prise avec P_1. L'arbre **1** entraîne en permanence les pignons **4**, **5**, **6** en liaison pivot avec l'arbre **7**. L'utilisateur peut déplacer, à l'aide des fourchettes **12** ou **13,** les bagues **10** ou **11**. Ces bagues, en liaison glissière avec **7** grâce à des cannelures, peuvent être liées en rotation aux pignons **4**, **5**, ou **6** par les crabots** C_3, C_4, C_5 ou C_6 selon le rapport de vitesse choisi par l'utilisateur.

BOITE DE VITESSES ***



* Voir chapitre 69, Contraintes thermiques. ** Crabots : fines dentures. *** D'après document SKF.

41.2 Exemple de calcul

La figure **1** représente le schéma cinématique de la boîte de vitesses de la page précédente, lorsque **5** est solidaire de l'arbre de sortie **7** (pour des raisons de clarté, les pignons **6** et **4** ne sont pas représentés). L'étude porte sur cette situation.

HYPOTHÈSES :

- Les efforts de **4** et **6** sur **1** sont négligeables.
- Les poids propres des éléments sont négligeables.
- Les liaisons sont sans frottement.
- Les engrenages sont à denture hélicoïdale* (fig. 2). L'angle d'inclinaison des hélices de **1** est $\beta \approx 20°$ dans le même sens. L'angle de pression est $\alpha \approx 20°$.
- L'angle de rotulage** de **1/2** en *A* et **1/2** en *B* ne dépasse pas 4 à 5' (fig. 3). Le roulement **9** supporte l'effort axial. La liaison **1-2** en *B* est une liaison rotule ; **1-2** en *A* est une liaison sphère-cylindre (jeu axial > 0).
- Les liaisons **3-1** et **5-1** sont des liaisons sphère-plan.

On donne : le torseur associé aux actions mécaniques de **3/1** :

$$_C\{C_{3/1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} -1\,565 & 0 \\ -1\,665 & 0 \\ 4\,300 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{(en N).}$$

On demande de déterminer les torseurs associés aux actions mécaniques de **2/1** et **5/1** :

$$_A\{A_{2/1}\} \;;\; _B\{B_{2/1}\} \;;\; _D\{D_{5/1}\}.$$

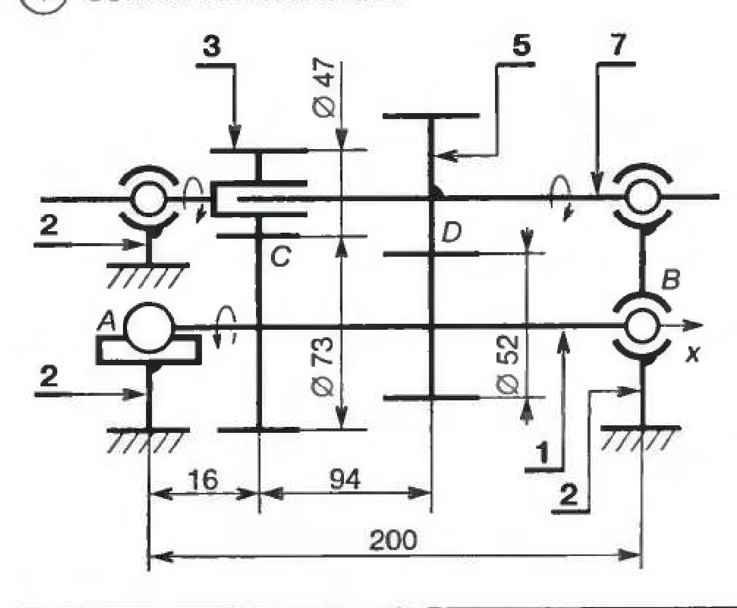
SOLUTION :

Isoler l'arbre intermédiaire **1** :

- **Recencer les actions mécaniques exercées sur 1 :**

Nature de la liaison	Torseur transmissible***
3-1 liaison sphère-plan : Centre *C*, normale $(C, \vec{n}_1)$	$_C\{C_{3/1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} -1\,565 & 0 \\ -1\,665 & 0 \\ 4\,300 & 0 \end{Bmatrix}$
2-1 liaison sphère-cylindre : centre *A*, axe : $(A, \vec{x})$	$_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$
5-1 liaison sphère-plan : centre *D*, normale $(D, \vec{n}_2)$	$_D\{D_{5/1}\} = {}_D\begin{Bmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}$
2-1 liaison rotule : centre *B*	$_B\{B_{2/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}$

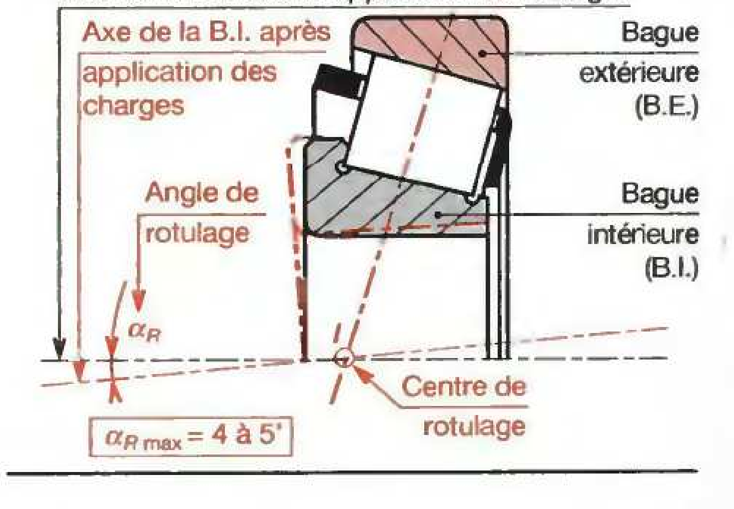
① SCHÉMA CINÉMATIQUE



② ENGRENAGE HÉLICOÏDAL EN *C* *

③ ANGLE DE ROTULAGE **





* Valeurs des efforts sur une dent § 41.2. ** Voir définition § 19.7.

*** À ce stade du calcul, les efforts induits par les roulements coniques ne sont pas pris en compte.

■ **Rechercher une relation entre les composantes de $\overrightarrow{D_{5/1}}$***

Exprimer X_D, Y_D en fonction de Z_D (par exemple) :

Dans le triangle *DJH* : $\tan 20° = -\dfrac{X_D}{Z_D}$; $X_D = -Z_D . \tan 20°$.

Dans le triangle *DEH* : $\tan 20° = -\dfrac{Y_D}{\|\vec{D'}\|}$; $Y_D = -\|\vec{D'}\| . \tan 20°$ (1)

Dans le triangle *DJH* : $\cos 20° = -\dfrac{Z_D}{\|\vec{D'}\|}$; $\|\vec{D'}\| = -\dfrac{Z_D}{\cos 20°}$ (2)

En reportant (2) dans (1) : $Y_D = (Z_D / \cos 20°) . \tan 20°$

d'où : $_D\{D_{5/1}\} = \begin{Bmatrix} -Z_D . \tan 20° & 0 \\ Z_D (\tan 20°/\cos 20°) & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}$.

■ **Calculer l'ordre d'hyperstatisme**

Nombre d'inconnues statiques de liaisons : $n_s = 6$.

$(Y_A, Z_A, Z_D, X_B, Y_B, Z_B)$; $h = n_s - 6$ (problème spatial).

$h = 6 - 6 = 0$; (problème isostatique soluble).

■ **Appliquer le principe fondamental de la statique**

$_A\{A_{2/1}\} + {}_A\{C_{3/1}\} + {}_A\{D_{5/1}\} + {}_A\{B_{2/1}\} = \{0\}$.

Problème spatial et isostatique ⇒ Méthode analytique.

■ **Écrire le théorème de la résultante statique**

$$-1\,565 + 0 - Z_D . \tan 20° + X_B = 0 \quad (1)$$
$$-1\,665 + Y_A - Z_D (\tan 20°/\cos 20°) + Y_B = 0 \quad (2)$$
$$+4\,300 + Z_A + Z_D + Z_B = 0 \quad (3)$$

■ **Écrire le théorème du moment statique**

$$0 + 156\,950 + 26\,Z_D + 0 = 0 \quad (4)$$
$$0 - 68\,800 - 110\,Z_D - 200\,Z_B = 0 \quad (5)$$
$$0 + 30\,482{,}5 + \frac{110\,Z_D . \tan 20°}{\cos 20°} + 26\,Z_D . \tan 20° + 200\,Y_B = 0 \quad (6)$$

■ **Résoudre le système de 6 équations à 6 inconnues**

Déduire de (4) :

$Z_D = 156\,950/26 = 6\,036{,}5$ N ; $\mathbf{Z_D \approx -6\,040}$ **N**

(5) devient : $-68\,800 + 110 \times 6\,036{,}5 - 200\,Z_B = 0$; $\mathbf{Z_B \approx +2\,980}$ **N**

(1) devient : $-1565 + 6036{,}5 \times \tan 20° + X_B = 0$; $\mathbf{X_B \approx -632}$ **N**

Déduire de (6) :

$$+30\,482{,}5 + \frac{100 \times (-6\,036{,}5) \times \tan 20°}{\cos 20°} +$$
$$26 \times (-6\,036{,}5) \times \tan 20° + 200\,Y_B = 0 \quad ; \mathbf{Y_B \approx 1\,419}\ \mathbf{N}$$

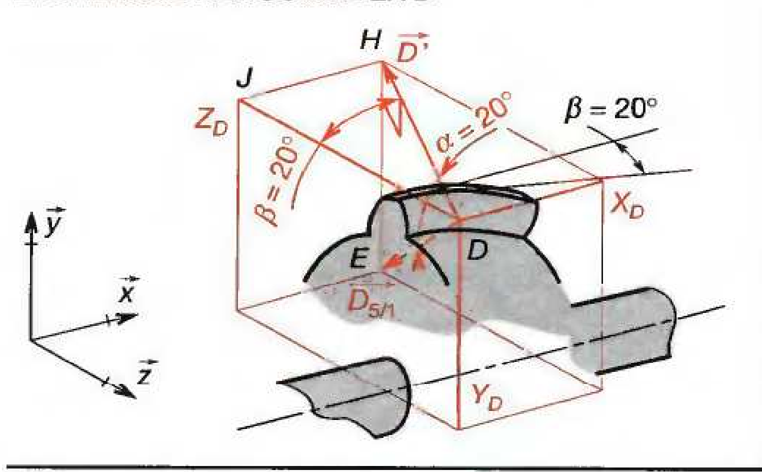
Déduire de (2) :

$$-1665 + Y_A + (-6036{,}5) \times \frac{\tan 20°}{\cos 20°} + 1419 = 0 ; \mathbf{Y_A \approx 2\,584}\ \mathbf{N}.$$

■ **Interpréter les résultats :**

Le roulement **9** est soumis à un effort axial ($X_B \neq 0$) et radial ($Y_B \neq 0$). **8** est soumis à un effort radial ($Y_A \neq 0$). **

ENGRENAGE HÉLICOÏDAL EN *D*



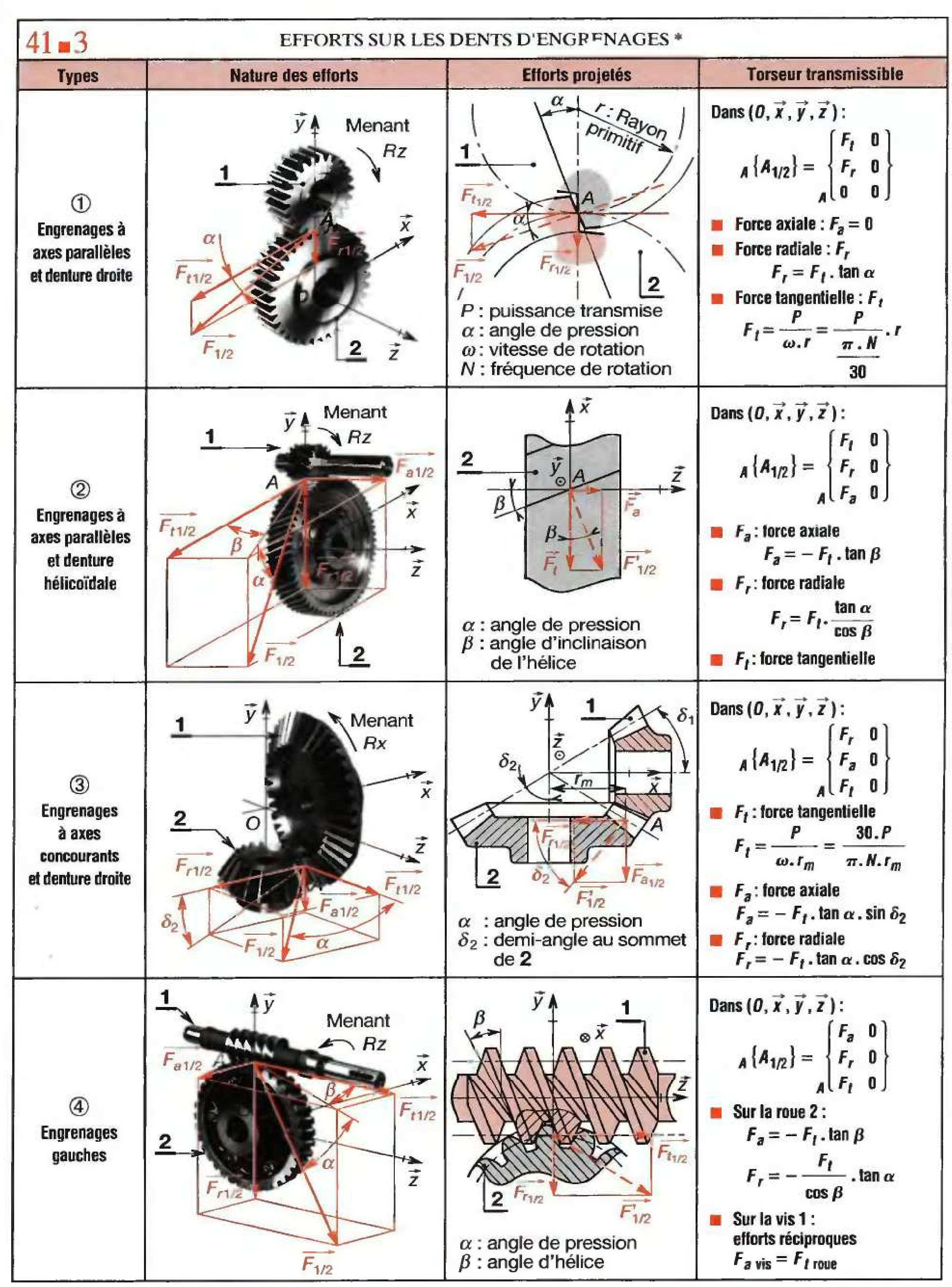
ISOLEMENT DE **1**

200, 110, 16, Y_B, $B_{2/1}$, Z_D, X_D, D, B, x, y, $D_{5/1}$, Y_D, X_B, Z_B, $A_{2/1}$, X_C, C, Y_A, Y_C, Z_C, $C_{3/1}$, A, Z_A, z, $R_2 = 26$, $R_1 = 36{,}5$

Réduction des torseurs en *A*
$_A\{C_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{3/1}} \\ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{C_{3/1}} \end{Bmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{C_{3/1}} : \begin{pmatrix} 16 \\ 36{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1565 \\ -1665 \\ 4300 \end{pmatrix}$ *** $_A\{C_{3/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} -1565 & 156950 \\ -1665 & -68800 \\ 4300 & 30482{,}5 \end{Bmatrix}$
$_A\{D_{5/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{D_{5/1}} \\ \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{D_{5/1}} \end{Bmatrix}$; $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{D_{5/1}} : \begin{pmatrix} 110 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -Z_D . \tan 20° \\ Z_D . \dfrac{\tan 20°}{\cos 20°} \\ Z_D \end{pmatrix}$ $_A\{D_{5/1}\} = \begin{Bmatrix} -Z_D . \tan 20° & 26\,Z_D \\ Z_D . \dfrac{\tan 20°}{\cos 20°} & -110\,Z_D \\ Z_D & \dfrac{110\,Z_D . \tan 20°}{\cos 20°} + 26\,Z_D . \tan 20° \end{Bmatrix}$
$_A\{B_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{2/1}} \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B_{2/1}} \end{Bmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{B_{2/1}} : \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$ $_A\{B_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & -200\,Z_B \\ Z_B & 200\,Y_B \end{Bmatrix}$

* Voir aussi tableau des valeurs des efforts § 41.2. ** Les charges étant déterminées, voir calcul durée de vie des roulements G.D. § 40.65.

*** × est le signe du produit vectoriel, ∧ est toléré avec réserves.



41 ■ 3 EFFORTS SUR LES DENTS D'ENGRENAGES *

Types	Nature des efforts	Efforts projetés	Torseur transmissible
① Engrenages à axes parallèles et denture droite	Menant Rz; 1; 2; $\vec{F}_{t1/2}$, $\vec{F}_{r1/2}$, $\vec{F}_{1/2}$, α, A	r : Rayon primitif P : puissance transmise α : angle de pression ω : vitesse de rotation N : fréquence de rotation	Dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $_A\{A_{1/2}\} = \left\{\begin{matrix} F_t & 0 \\ F_r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A$ ■ Force axiale : $F_a = 0$ ■ Force radiale : F_r $F_r = F_t . \tan\alpha$ ■ Force tangentielle : F_t $F_t = \dfrac{P}{\omega . r} = \dfrac{P}{\frac{\pi . N}{30} . r}$
② Engrenages à axes parallèles et denture hélicoïdale	Menant Rz; 1; 2; A; $\vec{F}_{a1/2}$, $\vec{F}_{t1/2}$, $\vec{F}_{r1/2}$, $\vec{F}_{1/2}$, α, β	α : angle de pression β : angle d'inclinaison de l'hélice	Dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $_A\{A_{1/2}\} = \left\{\begin{matrix} F_t & 0 \\ F_r & 0 \\ F_a & 0 \end{matrix}\right\}_A$ ■ F_a : force axiale $F_a = - F_t . \tan\beta$ ■ F_r : force radiale $F_r = F_t . \dfrac{\tan\alpha}{\cos\beta}$ ■ F_t : force tangentielle
③ Engrenages à axes concourants et denture droite	Menant Rx; 1; 2; O; $\vec{F}_{r1/2}$, $\vec{F}_{t1/2}$, $\vec{F}_{a1/2}$, $\vec{F}_{1/2}$, α, δ_2	α : angle de pression δ_2 : demi-angle au sommet de **2**	Dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $_A\{A_{1/2}\} = \left\{\begin{matrix} F_r & 0 \\ F_a & 0 \\ F_t & 0 \end{matrix}\right\}_A$ ■ F_t : force tangentielle $F_t = \dfrac{P}{\omega . r_m} = \dfrac{30 . P}{\pi . N . r_m}$ ■ F_a : force axiale $F_a = - F_t . \tan\alpha . \sin\delta_2$ ■ F_r : force radiale $F_r = - F_t . \tan\alpha . \cos\delta_2$
④ Engrenages gauches	Menant Rz; 1; 2; $\vec{F}_{a1/2}$, $\vec{F}_{t1/2}$, $\vec{F}_{r1/2}$, $\vec{F}_{1/2}$, α, β	α : angle de pression β : angle d'hélice	Dans $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $_A\{A_{1/2}\} = \left\{\begin{matrix} F_a & 0 \\ F_r & 0 \\ F_t & 0 \end{matrix}\right\}_A$ ■ Sur la roue 2 : $F_a = - F_t . \tan\beta$ $F_r = - \dfrac{F_t}{\cos\beta} . \tan\alpha$ ■ Sur la vis 1 : efforts réciproques $F_{a\,vis} = F_{t\,roue}$

* Voir caractéristiques géométriques G.D. chapitre 47.

Photographies : Lechner-Patissier.

42 Deux et trois glisseurs coplanaires

Un glisseur est un torseur réduit à sa résultante, le vecteur moment étant nul : $_A\{A_{2/1}\} = {}_A\{\overrightarrow{A_{2/1}}\ \ \vec{0}\}$.

On limite généralement l'écriture à celle du glisseur $\overrightarrow{A_{2/1}}$.

42 ■ 1 Deux glisseurs

Théorème 1 : Lorsqu'un système matériel est en équilibre sous l'action de deux glisseurs, les résultantes de ces derniers sont directement opposées.

$\overrightarrow{A_{2/1}} = -\overrightarrow{B_{3/1}}$; $\overrightarrow{A_{2/1}}$ et $\overrightarrow{B_{3/1}}$ ont :

- même support AB,
- des sens contraires,
- même intensité $\|\overrightarrow{A_{2/1}}\| = \|\overrightarrow{B_{3/1}}\|$.

42 ■ 2 Trois glisseurs

Théorème 2 : Lorsqu'un système matériel est en équilibre sous l'action de trois glisseurs, on a :

- $\vec{R} = \vec{0}$: somme géométrique nulle : le dynamique formé par les trois résultantes est fermé.
- $\overrightarrow{M_A} = \vec{0}$: somme des moments nulle en un point A. Les supports des trois résultantes sont coplanaires et concourants en un même point I ou coplanaires et parallèles, ou colinéaires (confondus).

42 ■ 3 Exemple

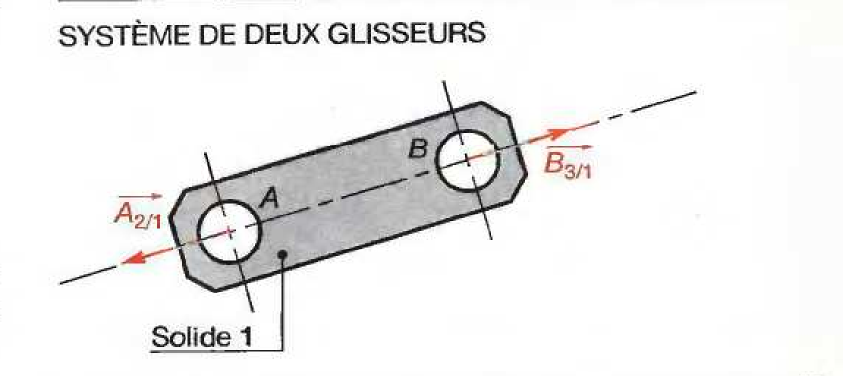
La figure représente la commande partielle du godet d'une pelle hydraulique. Lorsque le vérin V_3 est alimenté par de l'huile sous pression, sa tige se déplace, la biellette **5** pivote autour de M et, par l'intermédiaire de la biellette **6**, le godet **1** pivote autour de H. Il est soumis de la part du sol à un effort horizontal : $\|\vec{T}\| = 5\,000$ daN.

On demande : de calculer l'effort exercé sur l'articulation N dans le but de calculer son diamètre.

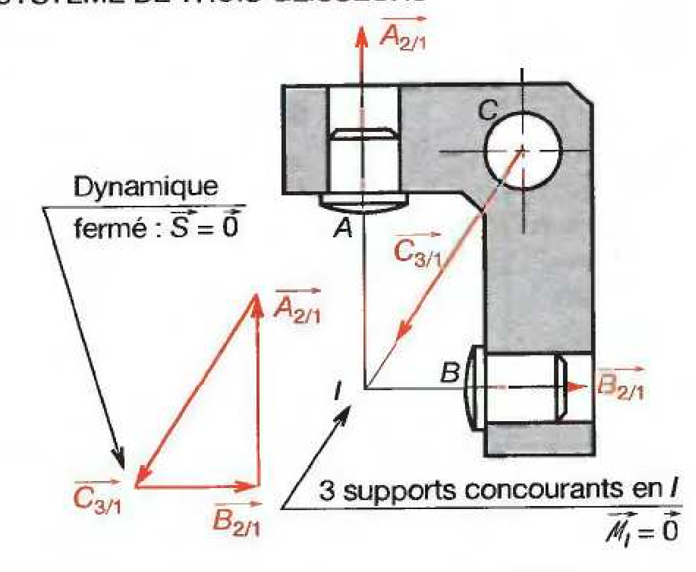
HYPOTHÈSES :

- Le système présente un plan de symétrie pour la géométrie et les efforts contenu dans le plan de la feuille.
- Le frottement est nul aux articulations.
- Les poids propres des solides **1**, **5**, **6** sont négligés devant les efforts aux liaisons.

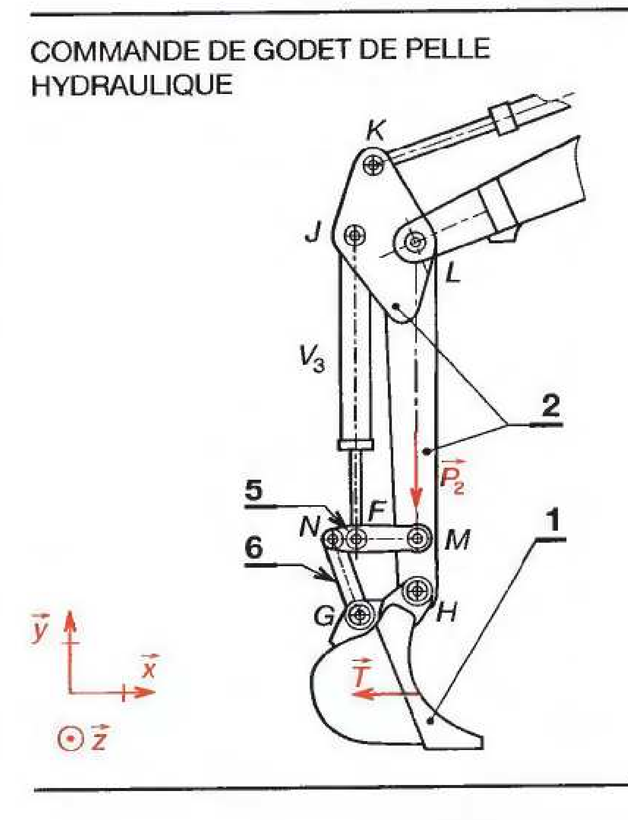
SYSTÈME DE DEUX GLISSEURS



SYSTÈME DE TROIS GLISSEURS



COMMANDE DE GODET DE PELLE HYDRAULIQUE



SOLUTION :

1° Isoler la biellette 6

■ **Recenser les actions mécaniques s'exerçant sur 6**

Nature de la liaison	Glisseur	Bilan inconnues
1-6 : liaison pivot centre G, axe $(G, \vec{z})$	$\overrightarrow{G_{1/6}}$	■ Support ? Passe par G ■ Sens ? ■ Intensité ?
5-6 : liaison pivot centre N, axe $(N, \vec{z})$	$\overrightarrow{N_{5/6}}$	■ Support ? Passe par N ■ Sens ? ■ Intensité ?

Actions à distance : nulles (poids négligés).

■ **Écrire le théorème relatif à l'équilibre** (2 glisseurs)

$\overrightarrow{G_{1/6}}$ et $\overrightarrow{N_{5/6}}$ sont directement opposés : support selon GN.

2° Isoler le godet 1

■ **Recenser les actions mécaniques s'exerçant sur 1**

Nature de la liaison	Glisseur	Bilan inconnues
Sol -1 : non définie : (solide pulvérulent /1)	$\overrightarrow{T_{S/1}} = 5\,000\ \vec{x}$	■ Entièrement déterminées
6-1 : liaison pivot centre G, axe $(G, \vec{z})$	$\overrightarrow{G_{6/1}}$	■ Support : selon GN ■ Sens ? ■ Intensité ?
2-1 : liaison pivot centre H, axe $(N, \vec{z})$	$\overrightarrow{H_{2/1}}$	■ Support ? Passe par H ■ Sens ? ■ Intensité ?

■ **Écrire le théorème relatif à l'équilibre** (3 glisseurs)

$\vec{S} = \vec{0}$: dynamique fermé $\vec{M_I} = \vec{0}$: 3 supports concourants.

■ **Résoudre graphiquement** (voir méthode ci-dessous)

MÉTHODE DE RÉSOLUTION GRAPHIQUE :

Après avoir isolé **1** et recensé les trois glisseurs :

1° Tracer les supports des deux résultantes connues : $\overrightarrow{G_{6/1}}$ et $\overrightarrow{T_{S/1}}$ (le solide **6** soumis à deux glisseurs a déjà été isolé : $\overrightarrow{G_{6/1}}$ est selon GN). Leur intersection donne le point I.

2° Tracer le support de $\overrightarrow{H_{2/1}}$ passant par I et H.

3° Choisir une échelle des forces.

4° Construire la somme géométrique :

$$\overrightarrow{T_{S/1}} + \overrightarrow{G_{6/1}} + \overrightarrow{H_{2/1}} = \vec{0}\,.$$

Construire le bipoint $\overrightarrow{0,1}$ tel que $\|\overrightarrow{0,1}\| = \|\overrightarrow{T_{S/1}}\| = 5\,000$ daN, puis par les points 0 et 1 les parallèles aux supports de $\overrightarrow{G_{6/1}}$ et $\overrightarrow{H_{2/1}}$.

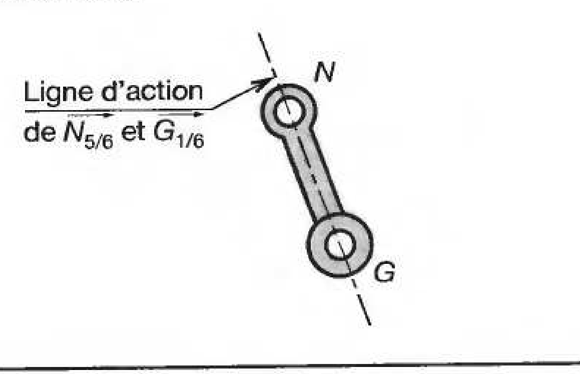
5° Mesurer 1,2 et 2,0 et donner un résultat chiffré (échelle).

REMARQUE :

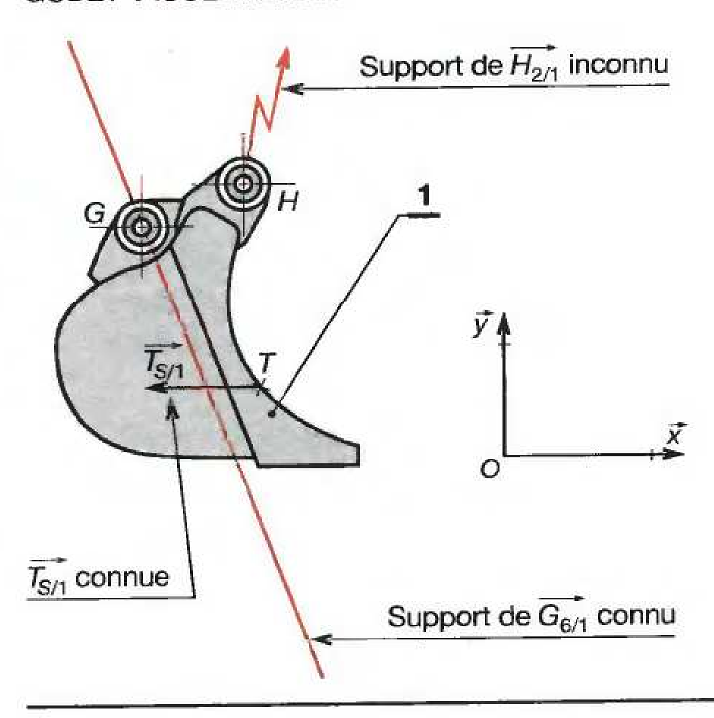
Lorsque les supports des résultantes sont parallèles, appliquer la méthode du dynamique et funiculaire (chapitre 44).

* Compte tenu du plan de symétrie $(G, \vec{x}, \vec{y})$.

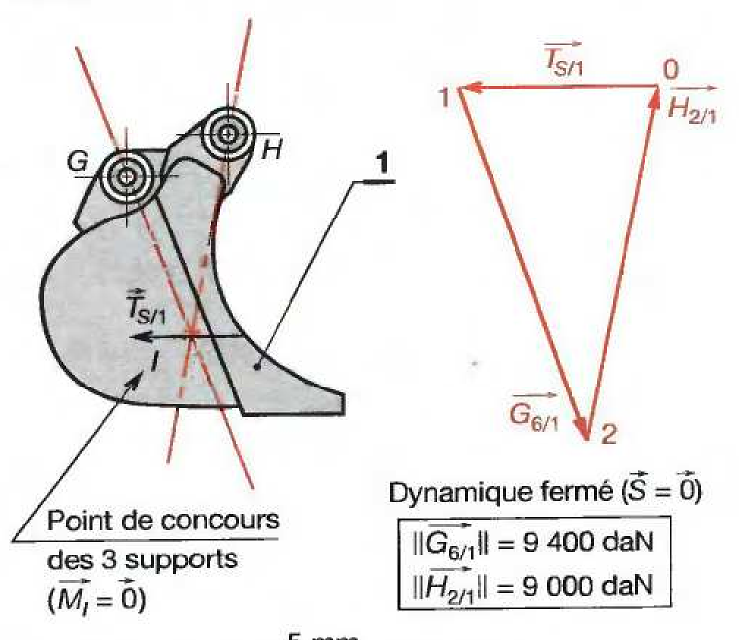
ISOLEMENT DE **6**



GODET **1** ISOLÉ : BILAN



GODET **1** ISOLÉ : RÉSOLUTION



43 Quatre glisseurs coplanaires

Lorsqu'un solide **1** est en équilibre sous l'action de quatre glisseurs coplanaires dont :

- Les quatres supports des résultantes sont connus.
- L'intensité d'une résultante est connue.

On peut appliquer la **méthode de Culmann**.

43.1 Méthode de Culmann

- Regrouper les résultantes deux à deux, en choisissant des couples qui donnent des points d'intersection de leurs supports dans les limites de la figure.

$$\underbrace{\overrightarrow{A_{2/1}} + \vec{P}}_{\vec{R_1}} + \underbrace{\overrightarrow{B_{2/1}} + \overrightarrow{C_{2/1}}}_{\vec{R_2}} = \vec{0}\ ;\quad \vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{0}$$

- $\vec{R_1}$ passe par le point M, intersection de $\overrightarrow{A_{2/1}}$ et $\vec{P}$.

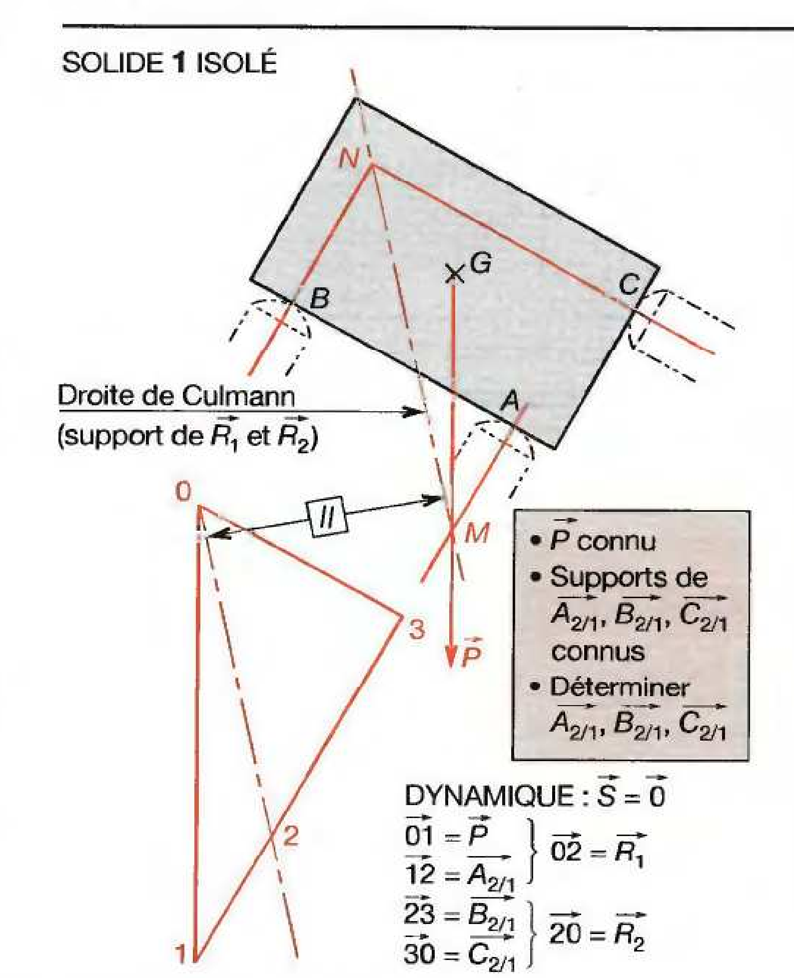
  $\vec{R_2}$ passe par le point N, intersection de $\overrightarrow{B_{2/1}}$ et $\overrightarrow{C_{2/1}}$.

- Le solide **1** est en équilibre sous l'action de deux résultantes $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ directement opposées*, leur support passe par M et N (droite de Culmann).

- Construire le dynamique fermé traduisant que la somme vectorielle $\overrightarrow{A_{2/1}}$, $\vec{P}$, $\overrightarrow{B_{2/1}}$, $\overrightarrow{C_{2/1}}$ est nulle et sachant que :

$\overrightarrow{A_{2/1}} + \vec{P} = \vec{R_1}$ ($\vec{R_1}$ porté par la droite de Culmann),

$\overrightarrow{B_{2/1}} + \overrightarrow{C_{2/1}} = \vec{R_2}$ ($\vec{R_2}$ porté par la droite de Culmann).



43.2 EXEMPLE DE CALCUL : MONTAGE D'USINAGE

FONCTIONNEMENT :

L'étude porte sur la phase de serrage. Lorsque l'huile arrive sous pression en X, les deux tiges **6** du vérin s'écartent. Par l'intermédiaire des biellettes **4**, les tiges **3** descendent, entraînant les brides **2** qui serrent les pièces **1** en E et E'.

ON DONNE :

- L'action de **2/3** : ${}_F\{F_{2/3}\} = {}_F\begin{Bmatrix} 3\,000\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.
- L'action de **4/3**, réductible en J a un glisseur dirigé selon KJ (isolement de **4**).
- Les actions de **0/3**, réductibles à des glisseurs en G et H.

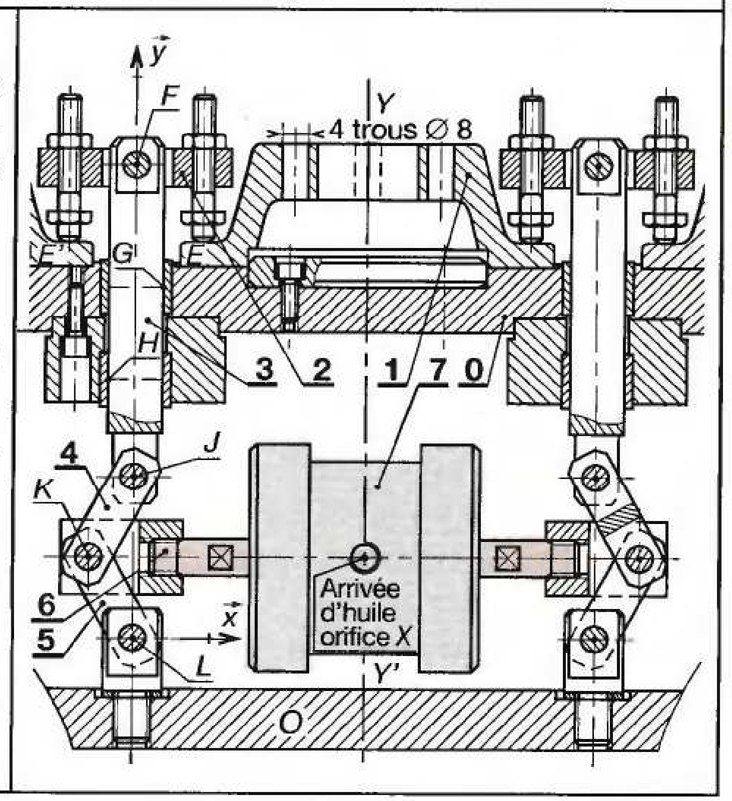
À l'équilibre strict :

$${}_G\{G_{0/3}\} = {}_G\begin{Bmatrix} -\|\overrightarrow{G_{0/3}}\|\cos\varphi & 0 \\ +\|\overrightarrow{G_{0/3}}\|\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \qquad {}_H\{H_{0/3}\} = {}_H\begin{Bmatrix} +\|\overrightarrow{H_{0/3}}\|\cos\varphi & 0 \\ +\|\overrightarrow{H_{0/3}}\|\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Avec : $\mu = \tan\varphi = 0{,}1$ aux contacts G et H.

ON DEMANDE :

De déterminer les actions $\overrightarrow{J_{4/3}}$, $\overrightarrow{G_{0/3}}$, $\overrightarrow{H_{0/3}}$.



* Voir § 42.1.

HYPOTHÈSES :

- Le système présente un plan de symétrie $(J, \vec{x}, \vec{y})$ pour la géométrie et les résultantes (plan de la feuille).
- Les poids propres des différents solides sont négligés.
- Les articulations sont parfaites et sans frottement.
- Les bagues en H' et G' sont parfaitement alignées.

ISOLER LE SOLIDE 3 :

Liaisons	{$\mathscr{T}$} simplifiés*	Bilan inconnues
2-3 pivot : centre F axe $(F, \vec{z})$	$_F\{F_{2/3}\} = {}_F\left\{\begin{matrix} 3000\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$	{$\mathscr{T}$} déterminé entièrement
4-3 pivot : centre J axe $(J, \vec{z})$	$_J\{J_{4/3}\} = {}_J\left\{\begin{matrix} X_J & 0 \\ Y_J & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$	• Support selon JK • Sens : ? • Intensité : ?
0-3 sphère-cylindre centre H' axe $(G, \vec{y})$	$_G\{G_{0/3}\} = {}_G\left\{\begin{matrix} -\lVert\vec{G}\rVert\cos\varphi & 0 \\ \lVert\vec{G}\rVert\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$	• Support : sur le cône G • Sens : ← • Intensité : ?
0-3 sphère-cylindre centre H' axe $(H, \vec{y})$	$_H\{H_{0/3}\} = {}_H\left\{\begin{matrix} \lVert\vec{H}\rVert\cos\varphi & 0 \\ \lVert\vec{H}\rVert\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$	• Support : sur le cône H • Sens : → • Intensité : ?

MÉTHODE DE RÉSOLUTION (CULMANN) :

1° Choisir une échelle des forces. Tracer $\overrightarrow{F_{2/3}}$ sur la tige, $\left(\lVert\overrightarrow{F_{2/3}}\rVert = 3\,000\text{ N}\right)$ et $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{F_{2/3}}$ sur le dynamique.

2° Tracer les supports de $\overrightarrow{G_{0/3}}$, $\overrightarrow{H_{0/3}}$ et $\overrightarrow{J_{4/3}}$.

3° Construire l'intersection M des supports $\overrightarrow{F_{2/3}}$ et $\overrightarrow{G_{0/3}}$ et l'intersection N des supports $\overrightarrow{H_{0/3}}$ et $\overrightarrow{J_{4/3}}$.

4° Tracer le support de $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ passant par M et N, $\vec{R_1} = \overrightarrow{F_{2/3}} + \overrightarrow{G_{0/3}}$ et $\vec{R_2} = \overrightarrow{H_{0/3}} + \overrightarrow{J_{4/3}}$ (droite de Culmann).

5° Continuer la construction du dynamique. Par le point 1, mener une parallèle au support de $\overrightarrow{G_{0/3}}$. Par le point 0, tracer une parallèle au support de $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$. L'intersection de ces deux droites donne le point 2 tel que : $\overrightarrow{12} = \overrightarrow{G_{0/3}}$ et $\overrightarrow{02} = \vec{R_1}$ $\left(\vec{R_1} = \overrightarrow{F_{2/3}} + \overrightarrow{G_{0/3}}\right)$.

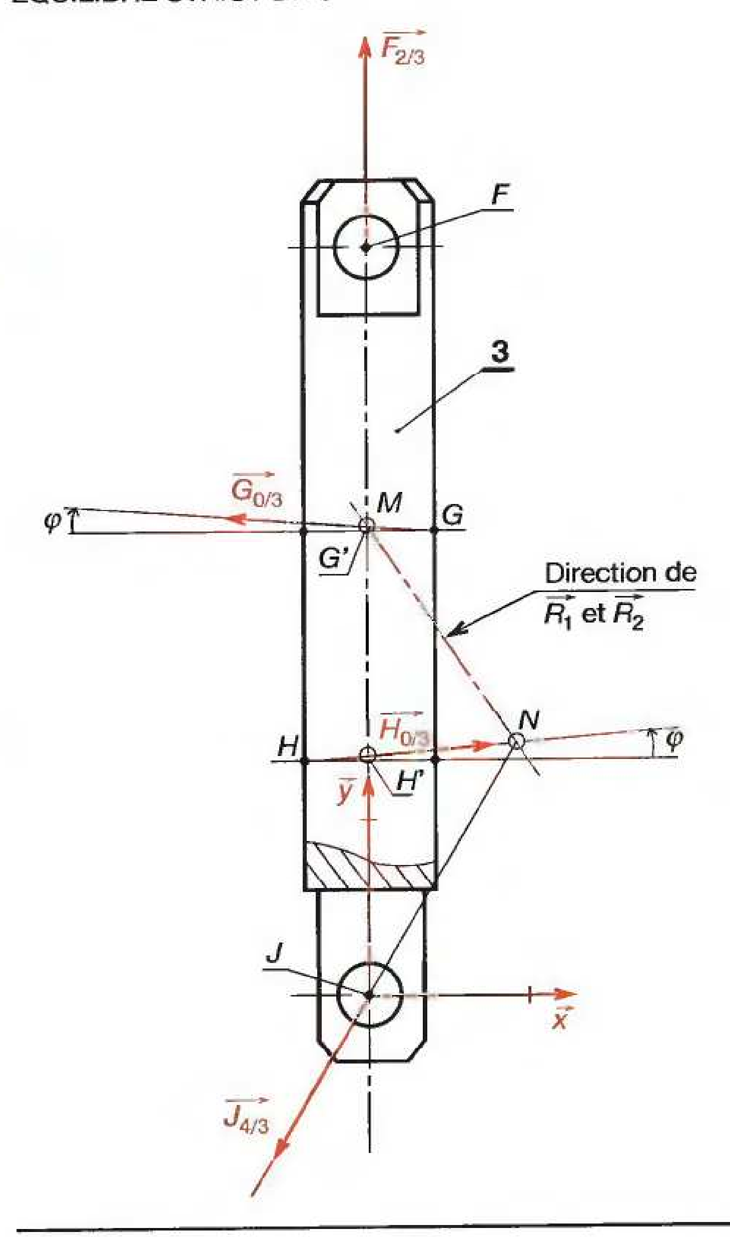
6° Par le point 0, tracer une droite parallèle au support de $\overrightarrow{H_{0/3}}$ (Dynamique fermé : extrémité de $\overrightarrow{34}$ confondue avec 0.)

7° Par le point 2, tracer une droite parallèle au support de $\overrightarrow{J_{4/3}}$. Cette droite coupe la droite parallèle à $\overrightarrow{H_{0/3}}$ passant par 0 en un point 3 tel que : $\overrightarrow{23} = \overrightarrow{J_{4/3}}$ et $\overrightarrow{30} = \overrightarrow{H_{0/3}}$.

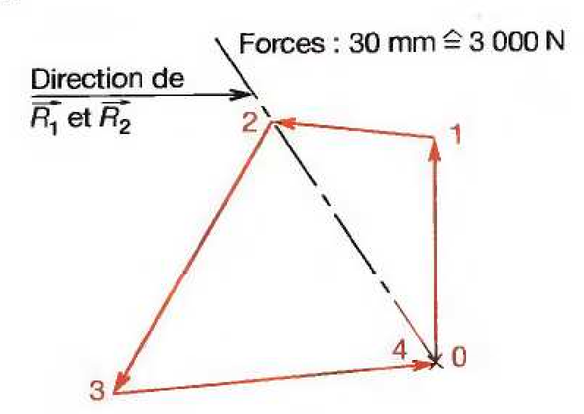
8° Mesurer les longueurs de $\overrightarrow{12}$, $\overrightarrow{23}$, $\overrightarrow{30}$, multiplier par l'échelle, donner un résultat chiffré.

* Compte tenu du plan de symétrie $(J, \vec{x}, \vec{y})$.

ÉQUILIBRE STRICT DE **3**



DYNAMIQUE



$\lVert\overrightarrow{12}\rVert = \lVert\overrightarrow{G_{0/3}}\rVert = 2\,150\text{ N}$; $\lVert\overrightarrow{34}\rVert = \lVert\overrightarrow{H_{0/3}}\rVert = 4\,250\text{ N}$
$\lVert\overrightarrow{23}\rVert = \lVert\overrightarrow{J_{4/3}}\rVert = 4\,150\text{ N}$; $\lVert\overrightarrow{01}\rVert = \lVert\overrightarrow{F_{2/3}}\rVert = 3\,000\text{ N}$

44 Dynamique et funiculaire

44 ■ 1 Réduction de N glisseurs coplanaires à un glisseur

■ Le solide 1 est chargé par trois glisseurs connus :

$${}_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ; {}_B\{B_{3/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ; {}_C\{C_{4/1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{4/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

■ Glisseur résultant : ${}_E\{E\} = {}_E\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/1}} + \overrightarrow{R_{3/1}} + \overrightarrow{R_{4/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

■ **Construire cette somme vectorielle en traçant le polygone nommé dynamique à partir du point 0.**

0 est l'origine de $\overrightarrow{R_{2/1}}$, 1 est son extrémité ; $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{R_{2/1}}$.
1 est l'origine de $\overrightarrow{R_{3/1}}$, 2 est son extrémité ; $\overrightarrow{12} = \overrightarrow{R_{3/1}}$.
2 est l'origine de $\overrightarrow{R_{4/1}}$, 3 est son extrémité ; $\overrightarrow{23} = \overrightarrow{R_{4/1}}$.
0 est l'origine de $\vec{R}$, 3 est son extrémité ; $\overrightarrow{03} = \vec{R}$.

$$\overrightarrow{R_{2/1}} + \overrightarrow{R_{3/1}} + \overrightarrow{R_{4/1}} = \vec{R},$$

d'où : $$\overrightarrow{01} + \overrightarrow{12} + \overrightarrow{23} = \overrightarrow{03}.$$

■ **Choisir un point arbitraire P appelé pôle du dynamique. Tracer les rayons polaires** $P0$, $P1$, $P2$, $P3$.

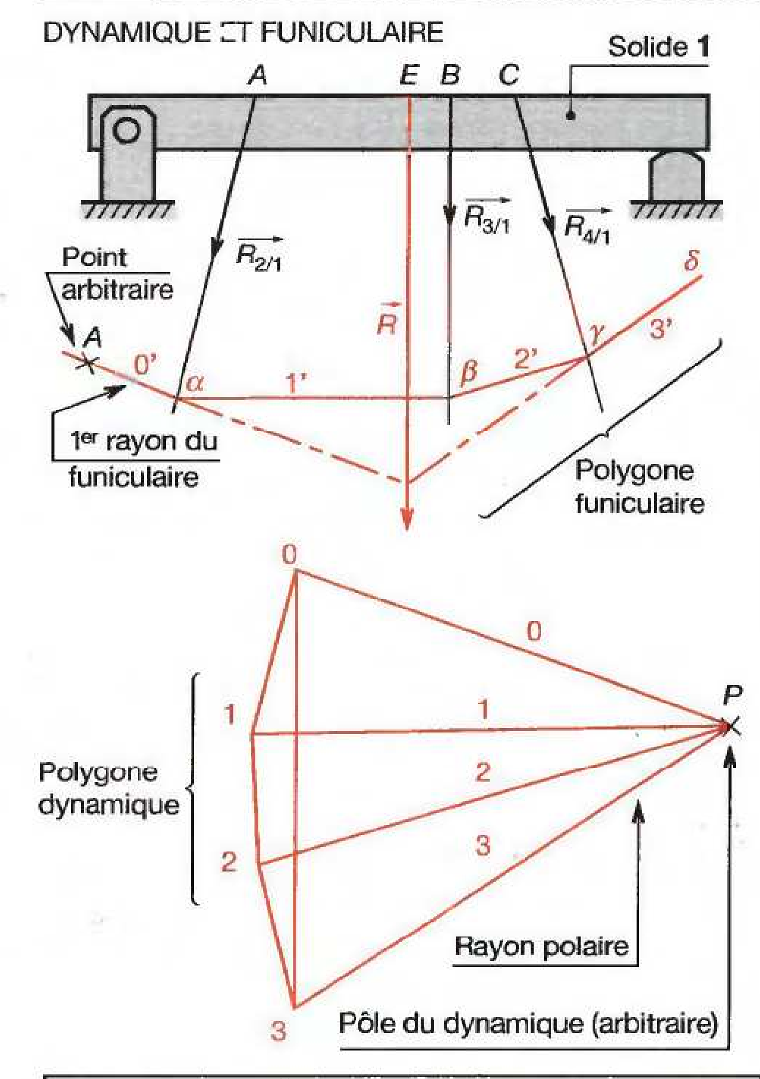
Lorsque le 1[er] rayon $P0$ et le dernier rayon $P3$ ne sont pas confondus, **le dynamique est dit ouvert**.

■ **Construire le polygone funiculaire relatif à P.**

À partir du point A arbitraire, construire un 1[er] rayon 0 parallèle à $P0$ qui coupe le support de $\overrightarrow{R_{2/1}}$ en α.

À partir du point α, construire un 2[e] rayon 1' parallèle à $P1$ qui coupe le support de $\overrightarrow{R_{3/1}}$ en β.
À partir du point β, construire un 3[e] rayon 2' parallèle à $P2$ qui coupe le support de $\overrightarrow{R_{4/1}}$ en γ.
À partir du point γ, construire un 4[e] rayon 3' parallèle à $P3$.
La ligne brisée $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ est le **funiculaire**.
Lorsque le 1[er] rayon $A\alpha$ et le dernier $\gamma\delta$ ne sont pas confondus, **le funiculaire est dit ouvert**.
On démontre que le support de la résultante $\vec{R}$ passe par le point d'intersection du 1[er] rayon $A\alpha$ et du dernier $\gamma\delta$.

RÈGLE :
La résultante d'un système N glisseurs coplanaires est déterminée :
■ En direction, sens et intensité par le bipoint $\overrightarrow{On}$ qui joint l'origine 0 du 1[er] bipoint à l'extrémité n du $n^{ième}$ bipoint du polygone dynamique.
■ Par un point de son support situé à l'intersection du 1[er] rayon et du $(n+1)^{ième}$ rayon du polygone funiculaire.



DIFFÉRENTES POSSIBILITÉS	
Cas	**Réduction du système**
Dynamique ouvert **Funiculaire ouvert**	**$\vec{R} \neq \vec{0}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_D} = \vec{0}$: système réductible à une résultante.**
Funiculaire ouvert **($0'\alpha$ // à γ 3')** **Dynamique fermé** **(0 confondu avec 3)**	B, $\overrightarrow{R_{3/1}}$, 0', α, 1', β, 2', γ, 3', A, $\overrightarrow{R_{4/1}}$, $\overrightarrow{R_{2/1}}$, C, 0, 3, 0,3, 1, P, 2 $\vec{R} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}_D} \neq \vec{0}$: système réductible à un couple
Dynamique fermé **Funiculaire fermé**	**$\vec{R} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{0}$: système en équilibre. (Voir page suivante.)**

44■2 Conditions graphiques d'équilibre

Lorsqu'un système matériel (S) est en équilibre sous l'action de N glisseurs à résultantes coplanaires, le principe fondamental de la statique entraîne que :

- **la résultante statique est nulle :**
  $\overrightarrow{R_{(\bar{S}/S)}} = \vec{0} \Leftrightarrow$ **Dynamique fermé ;**
- **le moment statique en un point est nul :**
  $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\alpha(\bar{S}/S)}} = \vec{0} \Leftrightarrow$ **Funiculaire fermé.**

EXEMPLE :

La commande de soupape est présentée § 37.2. Dans cette dernière, le linguet **2**, articulé en B par rapport au carter **0**, est soumis à un effort $\overrightarrow{A_{1/2}}$ exercé par l'arbre à came **1**. Cet effort provoque la rotation de **2** autour de B, ce qui entraîne une action sur la biellette **3** articulée en C par rapport à **2**. Cet effort est transmis au culbuteur **4**.

On donne : $\|\overrightarrow{C_{3/2}}\| = 1120$ N ; $\overrightarrow{C_{3/2}}$ dirigé selon DC.

On demande de déterminer $\overrightarrow{A_{1/2}}$ et $\overrightarrow{B_{0/2}}$.

HYPOTHÈSES :

- Le système présente un plan de symétrie ($A, \vec{x}, \vec{y}$) pour la géométrie et les résultantes (plan de la feuille).
- Les poids propres des différents solides sont négligés devant l'intensité des actions mécaniques aux liaisons.
- Les contacts sont parfaits : sans jeu et sans frottement.

ISOLER LE LINGUET 2 :

- **Recenser les actions mécaniques**

Nature des liaisons	$\{\mathcal{F}\}$ simplifiés*	Bilan inconnues
3-2 rotule centre C	$_C\{C_{3/1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 1\,120\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	$\{C_{3/1}\}$ entièrement déterminé
1-2 linéaire rectiligne, centre A, normale ($A, \vec{x}$) arête ($A, \vec{z}$)	$_A\{A_{1/2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} -\|\overrightarrow{A_{1/2}}\|.\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	• Support : normal au plan tangent (selon ($A, \vec{x}$)) • Sens : ← • Intensité : ?
0-2 rotule centre B	$_B\{B_{0/2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{0/2}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	• Support : ? passe par B. • Sens : → • Intensité : ?

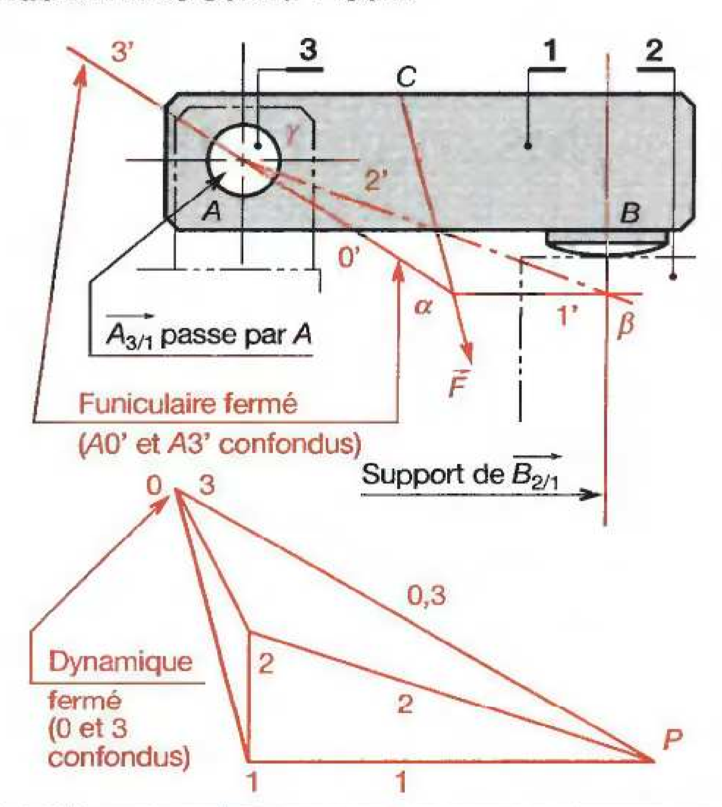
- **Écrire le théorème fondamental relatif à 3 glisseurs**

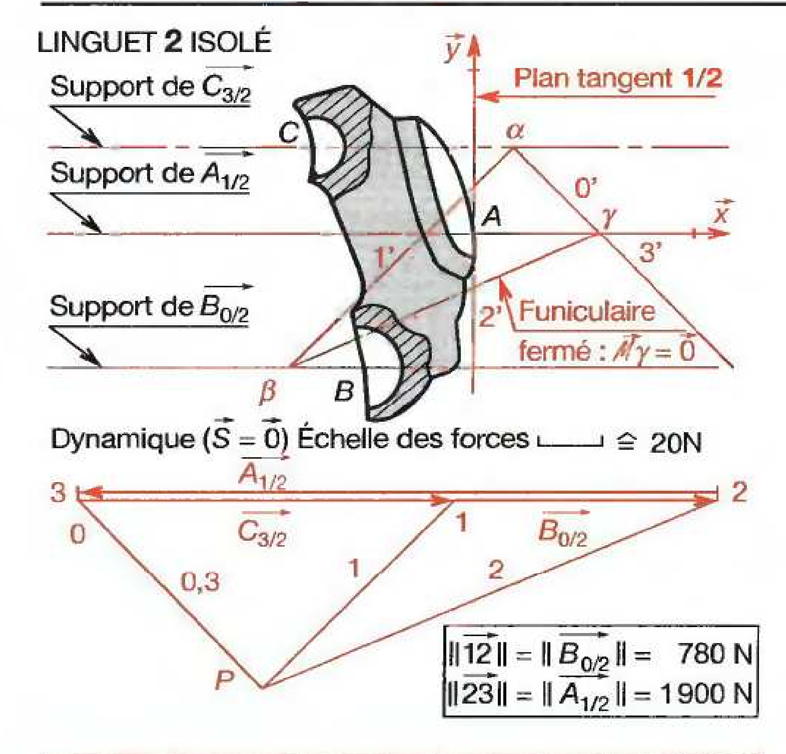
$\vec{S} = \vec{0}$: dynamique fermé ; $\vec{M_\alpha} = \vec{0}$: les supports de $\overrightarrow{C_{3/2}}$ et $\overrightarrow{A_{1/2}}$ sont parallèles ; celui de $\overrightarrow{B_{0/2}}$ l'est aussi.

- **Résoudre graphiquement** par la méthode du dynamique et du funiculaire (voir ci-contre).

$\vec{S} = \vec{0}$: dynamique fermé ; $\vec{M_\alpha} = \vec{0}$: funiculaire fermé.

* Compte tenu du plan de symétrie ($A, \vec{x}, \vec{y}$).





Méthode de construction

1° Construire $\overrightarrow{01}$ tel que $\|\overrightarrow{01}\| = \|\overrightarrow{C_{3/2}}\| = 1\,120$ N.
2° Choisir P et tracer $P0$ et $P1$.
3° Construire le funiculaire en traçant 0' // à $P0$. 0' coupe le support de $\overrightarrow{C_{3/2}}$ en α. À partir de α tracer 1' // à $P1$. 1' coupe le support de $\overrightarrow{B_{0/2}}$ en β.
4° Fermer le funiculaire en traçant $\beta\gamma$.
5° Sur le dynamique, tracer $P2$ // à 2'.

45 Hypothèses de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (arbres de transmission, bâtiments, fusées...) dans le but de **déterminer** ou **vérifier** leurs dimensions transversales afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux...)

45 ▪ 1 Les matériaux

L'homogénéité : on admet que les matériaux ont les mêmes propriétés mécaniques en tous les points.

L'isotropie : on admet que les matériaux ont, en un même point, les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. L'isotropie est vérifiée pour les aciers non fibrés (les aciers laminés et forgés ne sont pas isotropes). Elle n'est pas vérifiée pour les matériaux fibrés (bois, matériaux composites...) (fig. 2).

45 ▪ 2 La géométrie

Les solides idéaux sont des **poutres** présentant :

- des sections droites constantes ou variables lentement en dimensions et forme,
- des dimensions longitudinales importantes par rapport aux dimensions transversales.

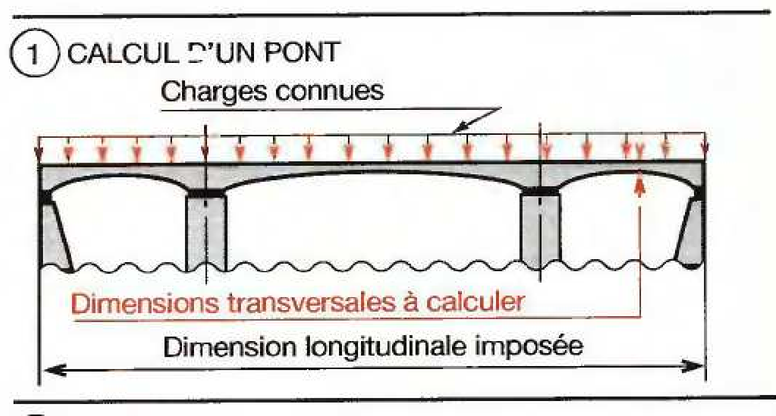
Une poutre est engendrée par une **section droite et plane (*S*)** dont le barycentre *G* se déplace sur une ligne courbe (*C*), à grand rayon de courbure, appelée **ligne moyenne**. La section droite (*S*) reste perpendiculaire à (*C*) (fig. 3).

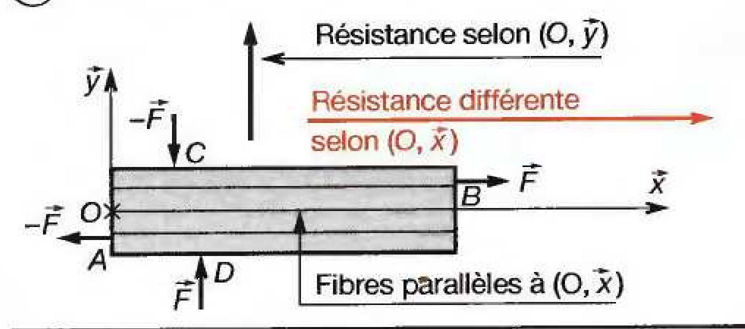
45 ▪ 3 Les forces

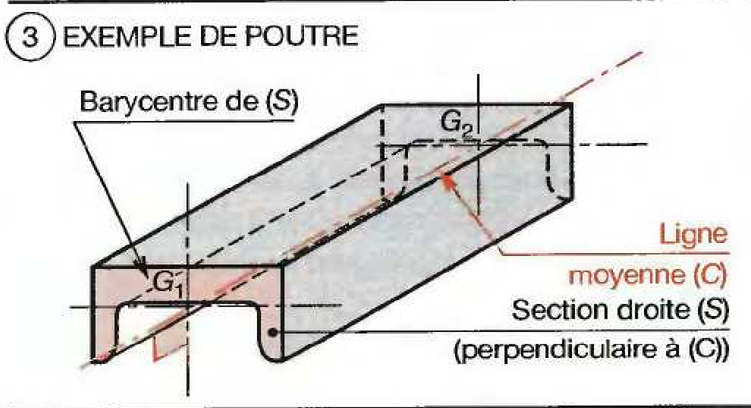
Les forces, appliquées en un point, sont des **pointeurs. Il n'est pas possible de les remplacer par un système de forces «vectoriellement» équivalent** (même résultante et même moment en un point *A*) car les effets physiques (sollicitations) sont différents.

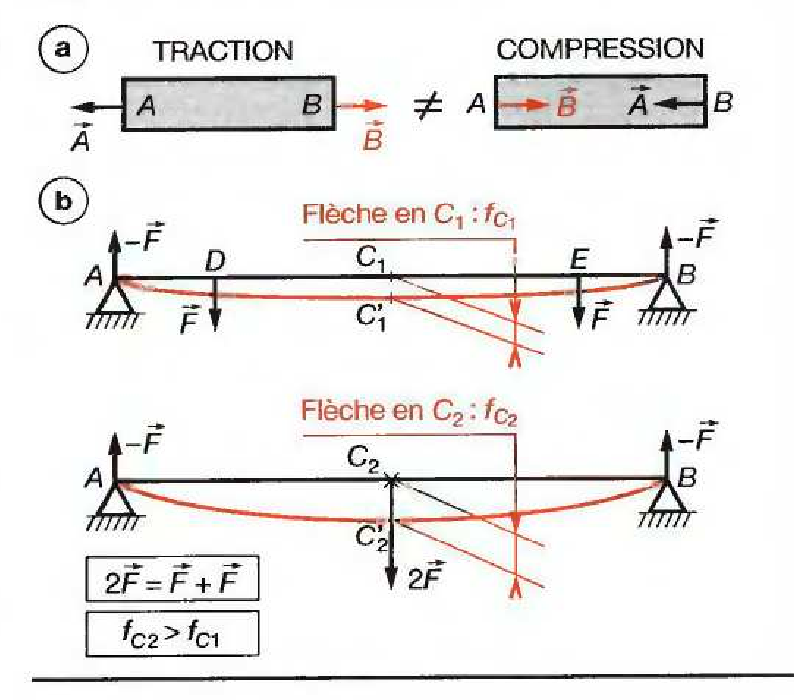
Dans l'exemple *a*, lorsque $\vec{A}$ et $\vec{B}$ glissent sur leur support, la traction devient de la compression.

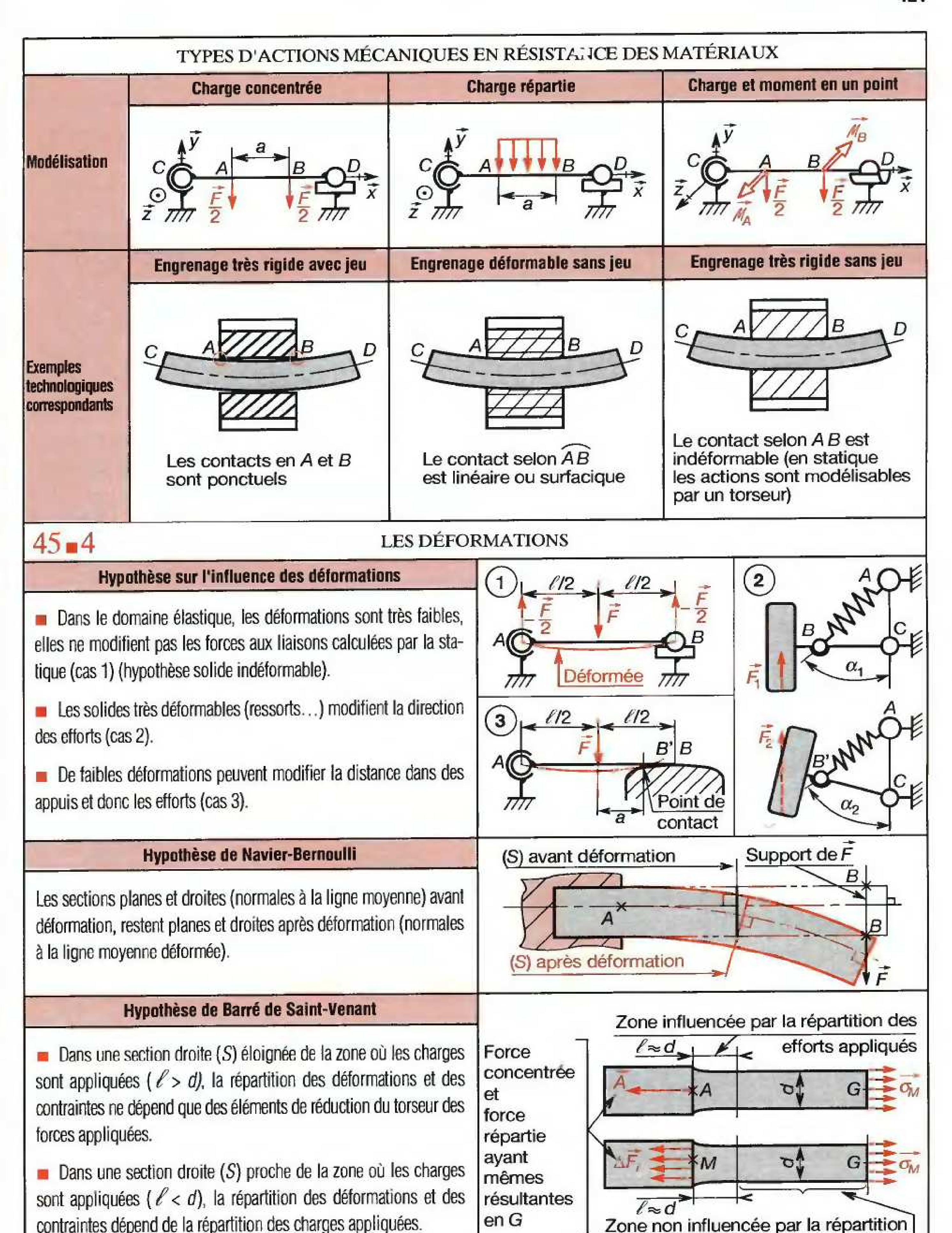
Dans l'exemple *b*, la résultante $2\vec{F}$ provoque une flèche plus importante que les deux forces $\vec{F}$ en *D* et *E*.










TYPES D'ACTIONS MÉCANIQUES EN RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
Charge concentrée
Charge répartie
Charge et moment en un point
Modélisation
Exemples technologiques correspondants
Engrenage très rigide avec jeu
Engrenage déformable sans jeu
Engrenage très rigide sans jeu
Les contacts en A et B sont ponctuels
Le contact selon AB est linéaire ou surfacique
Le contact selon AB est indéformable (en statique les actions sont modélisables par un torseur)
45 ▪ 4
LES DÉFORMATIONS
Hypothèse sur l'influence des déformations
▪ Dans le domaine élastique, les déformations sont très faibles, elles ne modifient pas les forces aux liaisons calculées par la statique (cas 1) (hypothèse solide indéformable).
▪ Les solides très déformables (ressorts...) modifient la direction des efforts (cas 2).
▪ De faibles déformations peuvent modifier la distance dans des appuis et donc les efforts (cas 3).
Déformée
Point de contact
Hypothèse de Navier-Bernoulli
Les sections planes et droites (normales à la ligne moyenne) avant déformation, restent planes et droites après déformation (normales à la ligne moyenne déformée).
(S) avant déformation
Support de F
(S) après déformation
Hypothèse de Barré de Saint-Venant
▪ Dans une section droite (S) éloignée de la zone où les charges sont appliquées (ℓ > d), la répartition des déformations et des contraintes ne dépend que des éléments de réduction du torseur des forces appliquées.
▪ Dans une section droite (S) proche de la zone où les charges sont appliquées (ℓ < d), la répartition des déformations et des contraintes dépend de la répartition des charges appliquées.
Force concentrée et force répartie ayant mêmes résultantes en G
Zone influencée par la répartition des efforts appliqués
Zone non influencée par la répartition

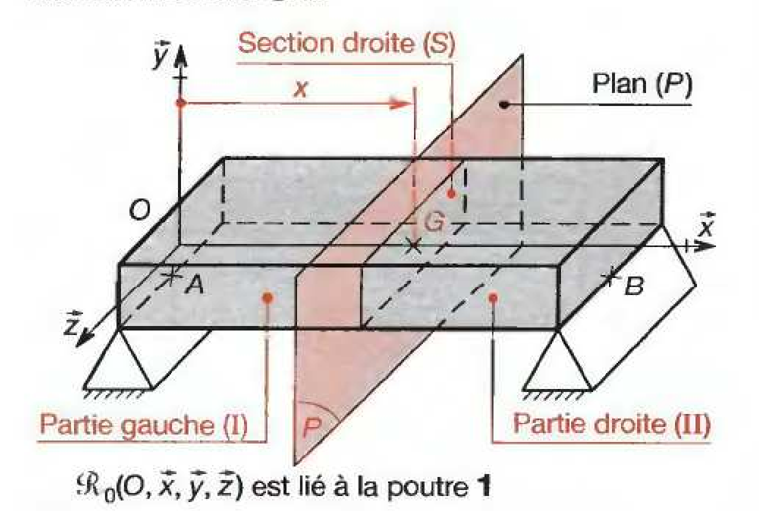
46 Coupure dans une poutre

Le plan (P) contenant la section droite (S) partage la poutre **1** en deux parties (I) et (II).

Le barycentre G de (S) a pour abscisse x dans $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On pose $\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{x}$.

On appelle (I) la partie «gauche», ou amont, de (P) et (II) la partie «droite», ou aval, de (P).

NOTION DE COUPURE



$\mathcal{R}_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la poutre **1**

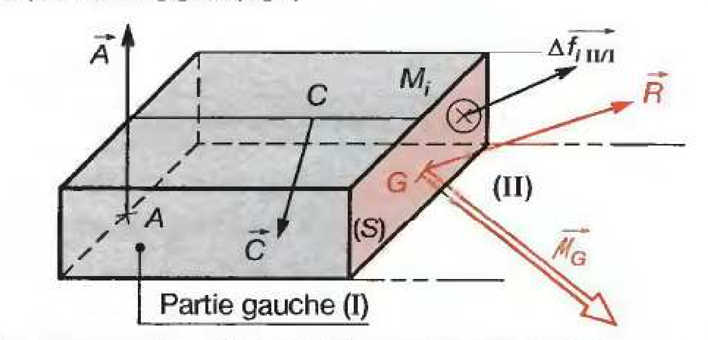
46.1 Torseur de cohésion

Les actions mécaniques que la partie droite exerce sur la section droite fictive (S) appartenant à (I) sont des actions extérieures à la partie (I). Leur répartition est inconnue mais nous pouvons les **modéliser par un torseur de cohésion** et **calculer ses éléments de réduction en G**, barycentre de la section (S).

$$\{\text{Coh}_{II/I}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_G \end{Bmatrix}$$

- **$\vec{R} = \sum_S \Delta\vec{f}_i$: résultante des forces de cohésion $\Delta\vec{f}_i$ de II/I,**
- **$\vec{\mathcal{M}}_G = \sum_S (\overrightarrow{GM_i} \times \Delta\vec{f}_i)$:* moment résultant des $\Delta\vec{f}_i$ par rapport à G.**

TORSEUR DE COHÉSION



REMARQUE :

- Cette définition relève d'une convention, on peut prendre la convention opposée.
- D'après le théorème des actions mutuelles :

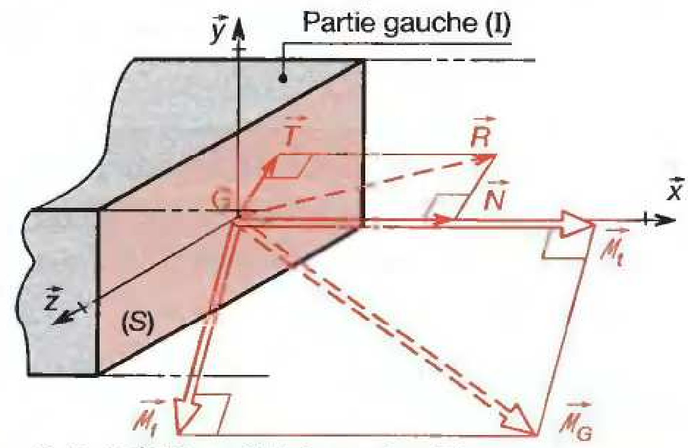
$${}_G\{\text{Coh}_{II/I}\} = -{}_G\{\text{Coh}_{I/II}\}$$

46.2 Projection des éléments de réduction de {Coh}

$\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le **repère de définition des sollicitations**. C'est un repère local, direct, lié à la section droite (S) :

- $(G, \vec{x})$ est selon la normale extérieure à la partie gauche (I) de (S).
- $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ sont dans le plan de (S) dirigés selon les axes de symétrie de (S) s'ils existent.

COMPOSANTES DE $\vec{R}$ ET $\vec{\mathcal{M}}_G$ DANS $(\mathcal{R})$



$\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la section (S)

Projections de la résultante et du moment du torseur de cohésion dans $(\mathcal{R})$			
$\vec{N}$	**Effort normal : projection de $\vec{R}$ sur la normale extérieure $(G,\vec{x})$.**	$\vec{M}_t$	**Moment de torsion : projection de $\vec{\mathcal{M}}_G$ sur la normale $(G,\vec{x})$.**
$\vec{T}$	**Effort tranchant : projection de $\vec{R}$ sur le plan de la section droite $(G,\vec{y},\vec{z})$.**	$\vec{M}_f$	**Moment de flexion : projection de $\vec{\mathcal{M}}_G$ sur le plan $(G,\vec{y},\vec{z})$.**

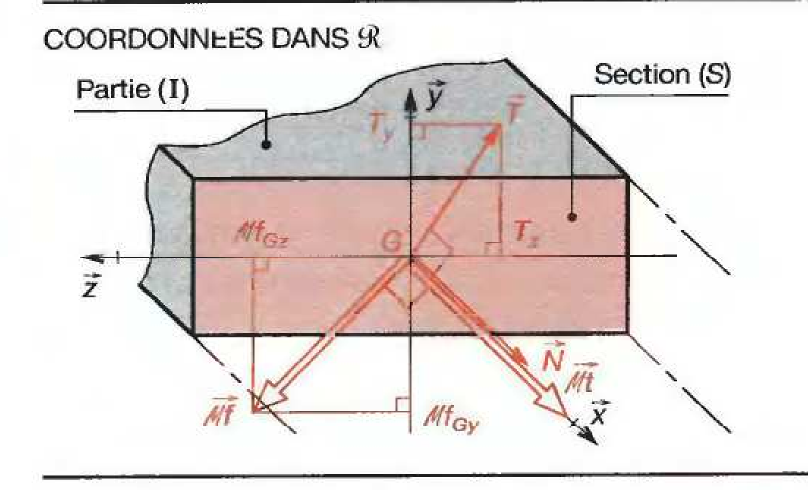
* $\times$ est le signe du produit vectoriel.

$\vec{T}$ et $\vec{Mf}$ n'ont pas, en général, de direction particulière dans le plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$. Il est utile de définir leurs coordonnées dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Coordonnées de $\vec{R}$ et $\vec{M_G}$ dans $\mathcal{R}$*	
$\vec{R} = N.\vec{x} + T_y.\vec{y} + T_z.\vec{z}$ $\vec{M_G} = Mt.\vec{x} + Mf_{Gy}.\vec{y} + Mf_{Gz}.\vec{z}$	
N	Coordonnée de l'effort normal $\vec{N}$ sur $(G, \vec{x})$.
T_y	Coordonnée de l'effort tranchant $\vec{T}$ sur $(G, \vec{y})$.
T_z	Coordonnée de l'effort tranchant $\vec{T}$ sur $(G, \vec{z})$.
Mt	Coordonnée du moment de torsion $\vec{Mt}$ sur $(G, \vec{x})$.
Mf_{Gy}	Coordonnée du moment de flexion $\vec{Mf}$ sur $(G, \vec{y})$.
Mf_{Gz}	Coordonnée du moment de flexion $\vec{Mf}$ sur $(G, \vec{z})$.

Ces coordonnées varient selon la position de la section (S) définie par l'abscisse de G dans $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
La représentation graphique des fonctions $N(x)$, $T_y(x)$, $T_z(x)$, $Mt(x)$, $Mf_{Gy}(x)$, $Mf_{Gz}(x)$ s'appellent les **diagrammes des sollicitations.**

COORDONNÉES DANS $\mathcal{R}$



EXEMPLE DE DIAGRAMME

Mf_{Gz} (N.m)
1500
Section la plus sollicitée à la flexion
+
x
0 1,5 3,5 5 (m)

46■3 SOLLICITATIONS SIMPLES

Une sollicitation est simple si et seulement si, un des quatre éléments $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{Mt}$, $\vec{Mf}$ n'est pas nul.

Dans le cas contraire, elle est dite composée (chapitre 55).

Exception : $\vec{T} \neq \vec{0}$, $\vec{Mf} \neq \vec{0}$ est de la flexion simple ($\vec{T}$ négligeable).

Sollicitation composée : (exemple général)

$$\{Coh_{II/I}\} = \left\{\begin{matrix} N & Mt \\ T_y & Mf_{Gy} \\ T_z & Mf_{Gz} \end{matrix}\right\}_G ;$$

Sollicitation simple : (exemple : tension $\vec{Mt} \neq \vec{0}$)

$$\{Coh_{II/I}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_G$$

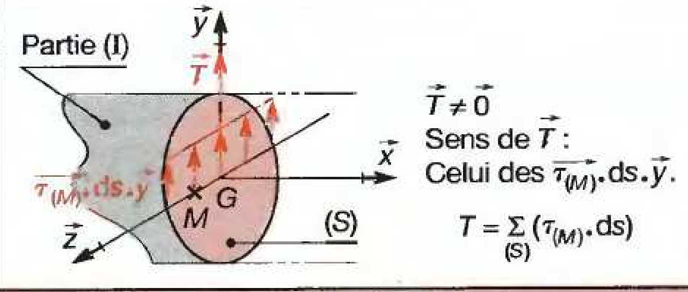
Traction (ou compression simple) : $\vec{N} \neq \vec{0}$

Partie (I) · $\vec{y}$ · (S) · G · M · $\vec{z}$ · $\vec{N}$ · $\vec{x}$ · $\vec{\sigma_{(M)}}.ds.\vec{x}$

Sens de $\vec{N}$: Celui des $\vec{\sigma_{(M)}}.ds.\vec{x}$.

$$N = \sum_{(S)} (\sigma_{(M)}\, ds)$$

Cisaillement simple (théorique) : $\vec{T} \neq \vec{0}$

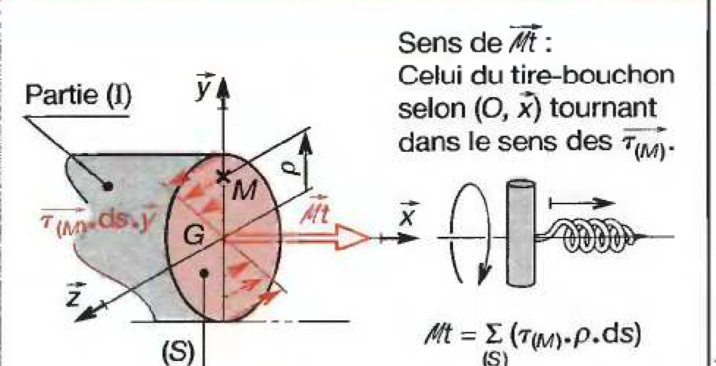


$\vec{T} \neq \vec{0}$
Sens de $\vec{T}$: Celui des $\vec{\tau_{(M)}}.ds.\vec{y}$.

$$T = \sum_{(S)} (\tau_{(M)}.ds)$$

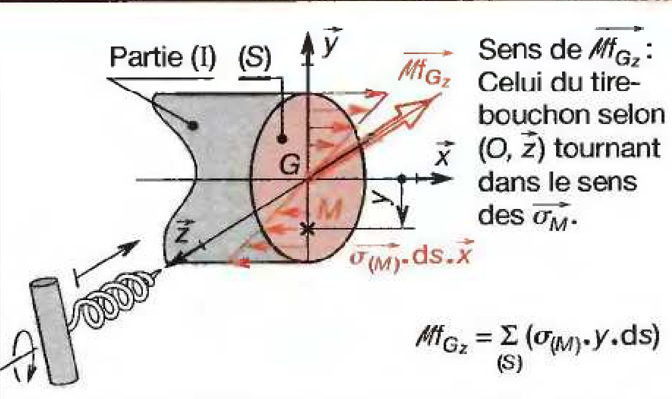
Torsion simple : $\vec{Mt} \neq \vec{0}$

Sens de $\vec{Mt}$: Celui du tire-bouchon selon $(O, \vec{x})$ tournant dans le sens des $\vec{\tau_{(M)}}$.



$$Mt = \sum_{(S)} (\tau_{(M)}.\rho.ds)$$

Flexion simple : $\vec{Mf} \neq \vec{0}$



Sens de $\vec{Mf_{Gz}}$: Celui du tire-bouchon selon $(O, \vec{z})$ tournant dans le sens des $\vec{\sigma_M}$.

$$Mf_{Gz} = \sum_{(S)} (\sigma_{(M)}.y.ds)$$

* Une coordonnée est un nombre réel (algébrique) § 72.5.

** Voir définition de $\sigma_{(M)}$ et $\tau_{(M)}$ § 46.7.

46■4 Torseur des actions mécaniques extérieures et torseur de cohésion

46■41 Actions mécaniques «à gauche»

Le torseur des actions mécaniques extérieures «à gauche» de (S), appliquées sur (I) s'écrit en G :

$$_G\{\text{Actions ext. à gauche}_{/\,\mathrm{I}}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{R} & \text{forces à gauche}_{/\,\mathrm{I}}\\ \vec{\mathcal{M}}_G & \text{actions à gauche}_{/\,\mathrm{I}}\end{matrix}\right\}$$

Le principe fondamental de la statique appliqué à (I) s'écrit :

$$_G\{\text{Actions ext. à gauche}_{/\,\mathrm{I}}\} + {}_G\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = \{0\}.$$

$$_G\{\mathbf{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{\mathcal{M}}_G\end{matrix}\right\} = -{}_G\{\textbf{Actions ext. à gauche}_{/\,\mathrm{I}}\}$$

d'où : $\vec{R} = -\vec{R}_{\text{actions à gauche/I}}$; $\vec{\mathcal{M}}_G = -\vec{\mathcal{M}}_{G\ \text{actions à gauche/I}}$

Cette relation permet de calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion à partir des actions mécaniques extérieures à gauche (connues par la statique).

EXEMPLE :

■ Coupure réalisée entre O et F : $(0 \leqslant x \leqslant \ell/2)$:

Partie (I) isolée (fig. 2)

$$_G\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = -{}_G\left\{\begin{matrix}-\vec{F}/2\\ \vec{GE}\times -\vec{F}/2\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{F}/2\\ \vec{GE}\times \vec{F}/2\end{matrix}\right\}$$

46■42 Actions mécaniques «à droite»

Lorsqu'il y a moins de forces à droite de la section (S), il est plus simple d'isoler la partie droite (II).

$$_G\{\text{Actions ext. à droite}_{/\,\mathrm{II}}\} + {}_G\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{I/II}}\} = \{0\}.$$

$$-{}_G\{\mathbf{Coh}_{\mathrm{I/II}}\} = +{}_G\{\mathbf{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = +{}_G\{\textbf{Actions ext. à droite}_{/\,\mathrm{II}}\}$$

$\vec{R} = +\vec{R}_{\text{forces ext. à droite/ II}}$; $\vec{\mathcal{M}}_G = +\vec{\mathcal{M}}_{G\ \text{actions ext. à droite/II}}$

■ Coupure réalisée entre F et E' $(\ell/2 \leqslant x \leqslant \ell)$:

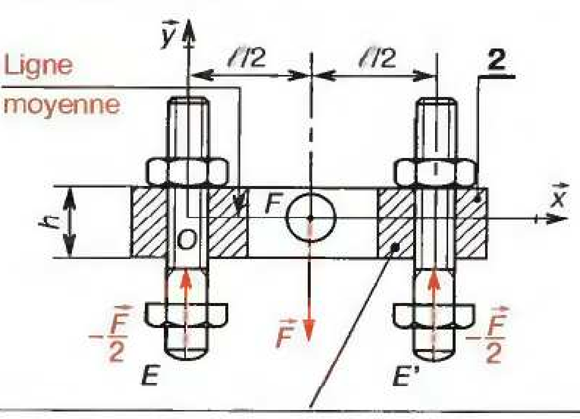
Partie (II) isolée : une seule force $-\vec{F}/2$: (fig. 4)

$$\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}-\vec{F}/2\\ \vec{GE'}\times -\vec{F}/2\end{matrix}\right\}$$

Partie (I) isolée : deux forces $-\vec{F}/2$; $\vec{F}$: (fig. 3)

$$\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = -{}_G\left\{\begin{matrix}-\vec{F}/2 + \vec{F}\\ \vec{GE}\times(-\vec{F}/2) + \vec{GF}\times\vec{F}\end{matrix}\right\}$$

(1) POUTRE ISOLÉE



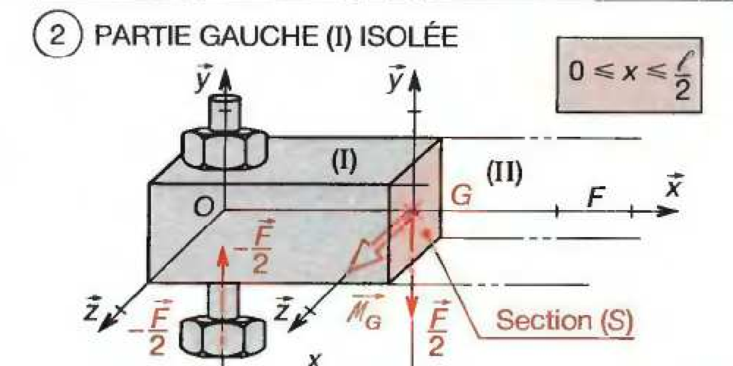
Le solide 2 est modélisé comme une poutre rectiligne car :

■ **sa longueur ℓ est importante par rapport à sa hauteur h ;**

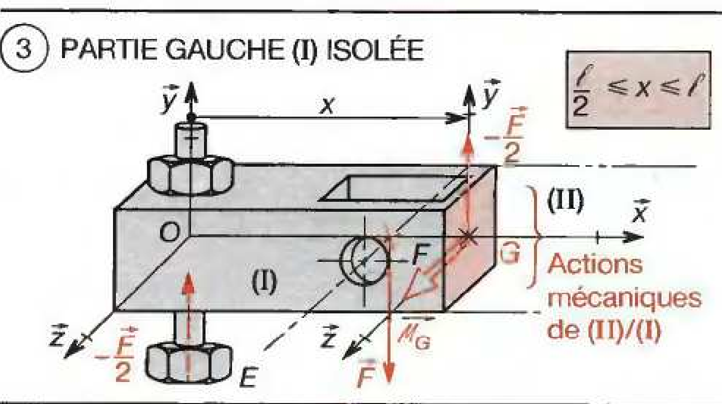
■ **sa ligne moyenne est rectiligne.**

Ce n'est pas un solide idéal car sa section (S) présente des variations brusques (alésage, évidement).

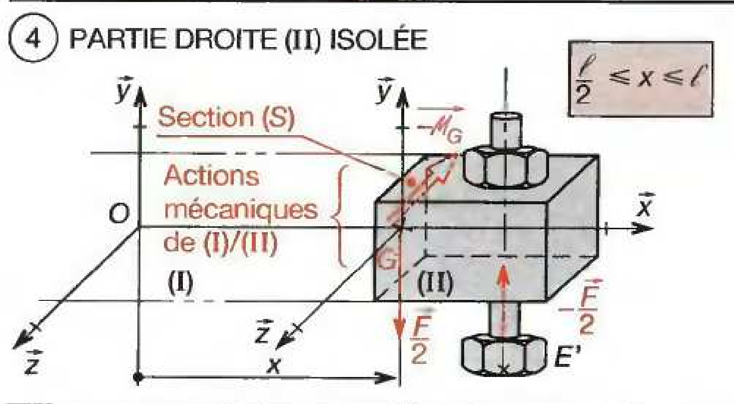
(2) PARTIE GAUCHE (I) ISOLÉE



(3) PARTIE GAUCHE (I) ISOLÉE



(4) PARTIE DROITE (II) ISOLÉE



REMARQUE :

Le torseur des actions mécaniques à gauche de (S) (ou à droite) est modifié lorsque (S) se déplace le long de la poutre :

- Si une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne) apparaît (exemple : poutre en équerre).
- Si une discontinuité liée à une force nouvelle (ou un moment) apparaît.

> **RÈGLE : Effectuer un nombre de coupures (n_c) égal au nombre de discontinuités (n_d) (géométrique ou d'action mécanique) plus un.**
>
> $$n_c = n_d + 1$$

EXEMPLE DE CALCUL :

Une bride **2**, modélisée comme une poutre (voir fig. 1 § 46.51), est appliquée vers le bas, au serrage, par une tige **3** qui exerce un effort $\overrightarrow{F_{3/2}} = -3\,000\,\vec{y}$ (en N) (voir § 43.2). Elle serre deux pièces par l'intermédiaire de deux liaisons sphère-plan telles que : $\overrightarrow{E_{P/2}} = \overrightarrow{E'_{P/2}} = 1\,500\,\vec{y}$. La bride **2** possède un plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$ pour la géométrie et les forces.

1° Déterminer l'expression des fonctions $N(x)$; $T(x)$, $\mathcal{M}t(x)$; $\mathcal{M}f(x)$; le long de la poutre.

2° Tracer les diagrammes représentatifs de ces fonctions.

SOLUTION :

1° Étude des fonctions : 1re coupure entre O et F :

$0 \leqslant x \leqslant 24$: partie (I) isolée.

$$\{\text{Coh}_{II/I}\} = -_{G1}\left\{\overrightarrow{F_{\text{Pièce}/2}}\right\} = -_{G1}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{E_{P/2}} \\ \overrightarrow{G_1E} \times \overrightarrow{E_{P/2}}\end{matrix}\right\}$$

d'où : $\vec{R} = -\overrightarrow{E_{P/2}}$; $\quad \vec{R} = -1\,500\,\vec{y}$ (en N)

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{G1}} = -(-\|\overrightarrow{E_{P/2}}\|\,.\,x\,.\,\vec{z})$; $\quad \overrightarrow{\mathcal{M}_{G1}} = 1\,500\,.\,x\,.\,\vec{z}$

Soit : $T_y = -1\,500$ N et $\mathcal{M}f_{G1z} = 1\,500\,x$ (N.mm)

Si : $x = 0$, $\mathcal{M}f_{G1z} = 0$; si $x = 24$, $\mathcal{M}f_{G1z} = 1500 \times 24 = 36\,000$ N.mm.

2° Coupure entre F et O' : $24 \leqslant x \leqslant 48$: partie (I) isolée.

$$\{\text{Coh}_{II/I}\} = -_{G2}\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{E_{P/2}} + \overrightarrow{F_{3/2}} \\ \overrightarrow{G_2E} \times \overrightarrow{E_{P/2}} + \overrightarrow{G_2F} \times \overrightarrow{F_{3/2}}\end{matrix}\right\}$$

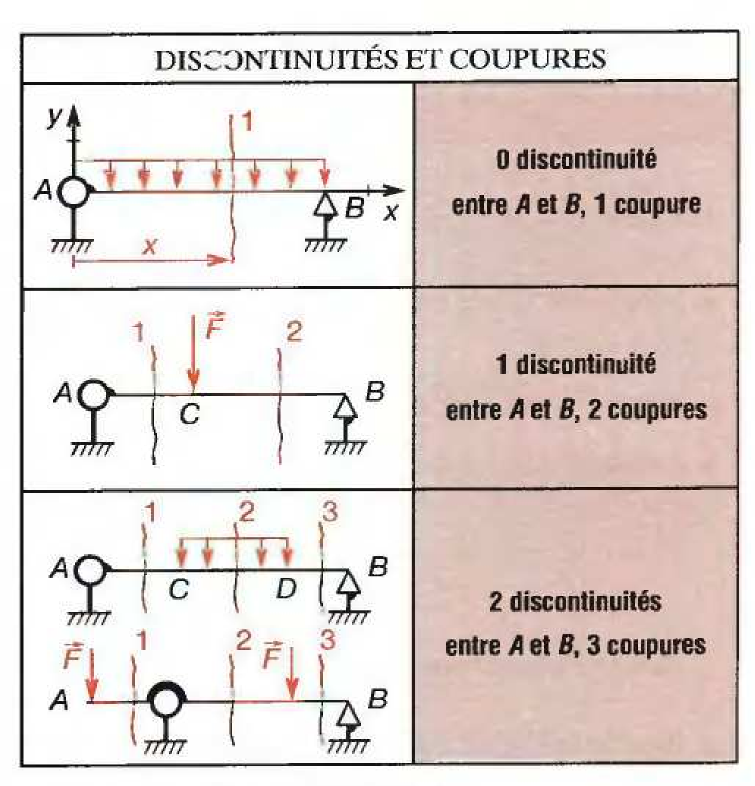
d'où : $\vec{R} = -(\overrightarrow{E_{P/2}} + \overrightarrow{F_{3/2}})$; $\quad \vec{R} = +1\,500\,\vec{y}$ (en N)

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{G2}} = -\left[-\|\overrightarrow{E_{P/2}}\|\,.\,x + \|\overrightarrow{F_{3/2}}\|\,(x-24)\right]\vec{z}$

d'où : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{G2}} = (-1\,500\,x + 3\,000 \times 24)\,\vec{z}$

Soit : $T_y = 1\,500$ N ; et $\mathcal{M}f_{Gz} = -1\,500\,x + 72\,000$

Pour : $x = 24$, $\mathcal{M}f_{Gz} = 36\,000$ N.mm ; $x = 48$, $\mathcal{M}f_{Gz} = 0$.



COUPURES DANS LA POUTRE 2

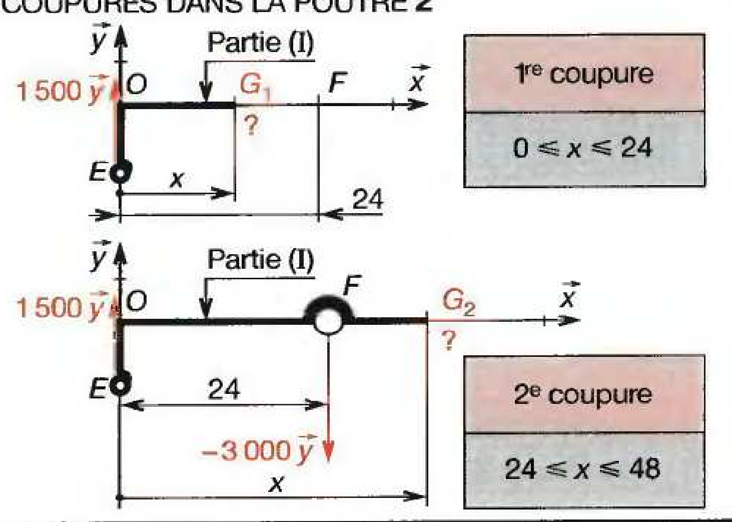


DIAGRAMME DE L'EFFORT TRANCHANT

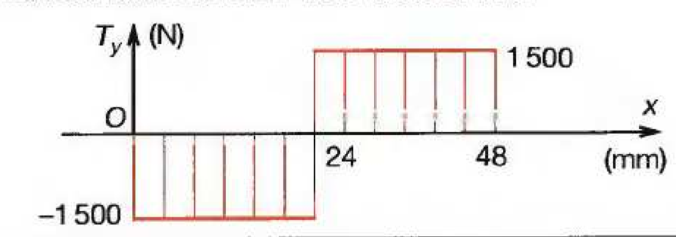
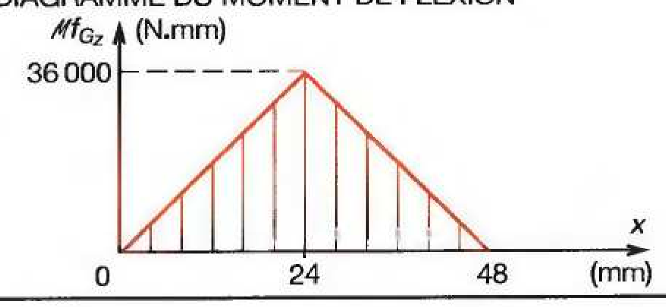
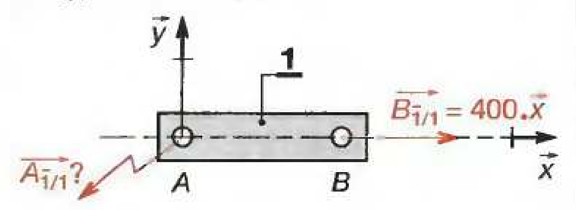
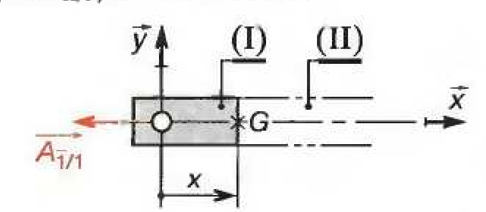


DIAGRAMME DU MOMENT DE FLEXION

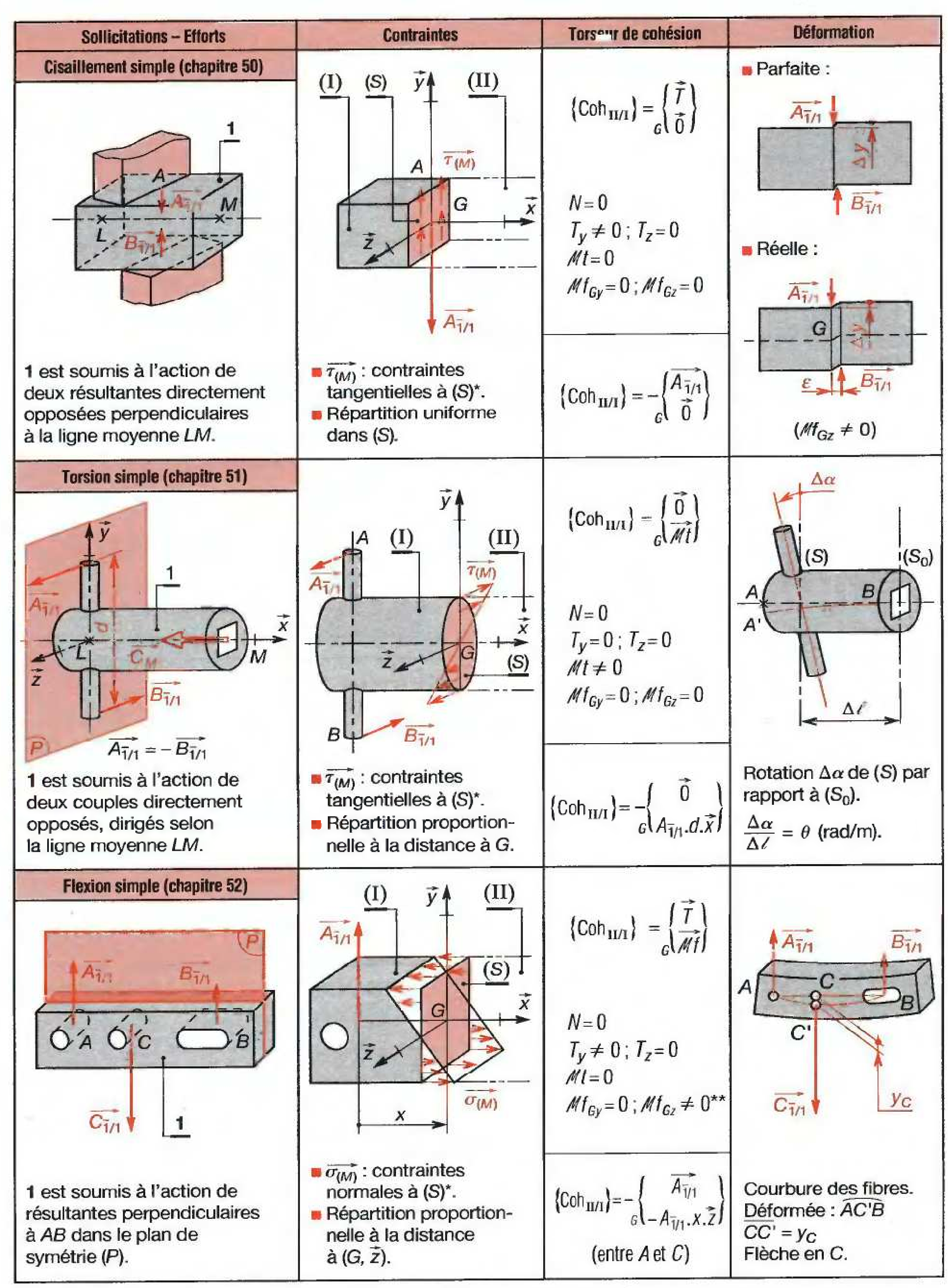


46 ■ 5 IDENTIFICATION DES SOLLICITATIONS

Méthode	Exemple
1° Résoudre le problème de statique ou dynamique : ■ **Hypothèses :** solides indéformables, actions mécaniques modélisées par glisseurs ou torseurs. ■ **Isoler** le solide **1** et calculer les actions extérieures inconnues. ■ **Appliquer** le principe fondamental de la statique (§ 31.5) ou de la dynamique (§ 56.4, § 57.9).	$\overrightarrow{B_{\bar{1}/1}}$ est connue. ■ $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}$ est à déterminer.  ■ $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}} + 400.\vec{x} = \vec{0}$ $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}} = -400.\vec{x}$ (en N).
2° Résoudre le problème de résistance des matériaux : ■ **Hypothèses :** matière homogène et isotrope (§ 45.1) poutre rectiligne (§ 45.2), actions mécaniques modélisées par des pointeurs (§ 45.3), appliquées progressivement, variation lente (sinon fatigue). ■ **Réaliser** une ou plusieurs coupures. **Isoler** la partie (I) ou partie gauche. Calculer $\{Coh_{II/I}\} = -\{$actions extérieures à gauche/I$\}$. Réaliser autant de coupures que de discontinuités plus une (§ 46.42). ■ **Identifier** la sollicitation en recherchant dans le tableau ci-dessous le cas correspondant au $\{Coh_{II/I}\}$ calculé.	Les actions $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}$ et $\overrightarrow{B_{\bar{1}/1}}$ sont connues, modélisées par deux pointeurs. ■ $\{Coh_{II/I}\}$ est à déterminer.  $\{Coh_{II/I}\} = -\left\{\begin{matrix} -400.\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} 400.\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$ ■ $\vec{N} = 400.\vec{x}$; $\vec{N} \neq \vec{0}$; $\vec{T} = \vec{Mt} = \vec{Mf} = \vec{0}$ **1** est soumis à de la traction simple.

Sollicitations – Efforts	Contraintes	Torseur de cohésion	Déformation
Traction simple (Chapitre 48) $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}$ A 1 B $\overrightarrow{B_{\bar{1}/1}}$	(I) (S) $\vec{y}$ (II) $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}$ G $\vec{x}$ $\vec{z}$ $\overrightarrow{\sigma_{(M)}}$	$\{Coh_{II/I}\} = \left\{\begin{matrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$ $N \neq 0$ $T_y = 0$; $T_z = 0$ $Mt = 0$ $Mf_{Gy} = 0$; $Mf_{Gz} = 0$	$\vec{y}$ A B $\vec{x}$ $\Delta\ell$ A B
Compression simple (Chapitre 49)* 1 A B $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}}$ $\overrightarrow{B_{\bar{1}/1}}$	■ $\overrightarrow{\sigma_{(M)}}$: contraintes normales à (S)**. ■ Répartition uniforme dans (S). ■ Traction $\sigma_{(M)} > 0$. ■ Compression $\sigma_{(M)} < 0$.	$\{Coh_{II/I}\} = -\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{A_{\bar{1}/1}} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$	■ Traction : allongement $\Delta\ell > 0$. ■ Compression : raccourcissement $\Delta\ell < 0$.
1 est soumis à l'action de deux résultantes directement opposées.			

* Attention au risque de flambage (§ 56.5). ** Voir définition § 46.7.



Sollicitations – Efforts	Contraintes	Torseur de cohésion	Déformation
Cisaillement simple (chapitre 50) 1 est soumis à l'action de deux résultantes directement opposées perpendiculaires à la ligne moyenne *LM*.	■ $\overrightarrow{\tau_{(M)}}$: contraintes tangentielles à (*S*)*. ■ Répartition uniforme dans (*S*).	$\{Coh_{II/I}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ $N = 0$ $T_y \neq 0 ; T_z = 0$ $Mt = 0$ $Mf_{Gy} = 0 ; Mf_{Gz} = 0$ $\{Coh_{II/I}\} = -\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A_{\bar{1}/1}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$	■ Parfaite : ■ Réelle : ($Mf_{Gz} \neq 0$)
Torsion simple (chapitre 51) $\overrightarrow{A_{\bar{1}/1}} = -\overrightarrow{B_{\bar{1}/1}}$ 1 est soumis à l'action de deux couples directement opposés, dirigés selon la ligne moyenne *LM*.	■ $\overrightarrow{\tau_{(M)}}$: contraintes tangentielles à (*S*)*. ■ Répartition proportionnelle à la distance à *G*.	$\{Coh_{II/I}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{Mt} \end{matrix} \right\}_G$ $N = 0$ $T_y = 0 ; T_z = 0$ $Mt \neq 0$ $Mf_{Gy} = 0 ; Mf_{Gz} = 0$ $\{Coh_{II/I}\} = -\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ A_{\bar{1}/1}.d.\vec{x} \end{matrix} \right\}_G$	Rotation $\Delta\alpha$ de (*S*) par rapport à (S_0). $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\ell} = \theta$ (rad/m).
Flexion simple (chapitre 52) 1 est soumis à l'action de résultantes perpendiculaires à *AB* dans le plan de symétrie (*P*).	■ $\overrightarrow{\sigma_{(M)}}$: contraintes normales à (*S*)*. ■ Répartition proportionnelle à la distance à $(G, \vec{z})$.	$\{Coh_{II/I}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{T} \\ \overrightarrow{Mf} \end{matrix} \right\}_G$ $N = 0$ $T_y \neq 0 ; T_z = 0$ $Mt = 0$ $Mf_{Gy} = 0 ; Mf_{Gz} \neq 0$** $\{Coh_{II/I}\} = -\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A_{\bar{1}/1}} \\ -A_{\bar{1}/1}.x.\vec{z} \end{matrix} \right\}_G$ (entre *A* et *C*)	Courbure des fibres. Déformée : $\widehat{AC'B}$ $CC' = y_C$ Flèche en *C*.

* Voir définition § 46.7. ** $T_y \neq 0 ; Mf_{Gz} \neq 0$. Cette sollicitation est considérée comme de la flexion simple.

46■6 Relation entre T et Mf

Dans un tronçon de poutre rectiligne, sur lequel il n'y a pas de charge concentrée appliquée, l'effort tranchant est égal, au signe près, à la dérivée du moment de flexion par rapport à la variable : x.

$$T_y = -\frac{dMf_{Gz}}{dx} \quad ; \quad T_z = \frac{dMf_{Gy}}{dx}$$

46■7 Vecteur contrainte

(S) : section quelconque, orientée par $\vec{n}$: normale à (S) extérieure à la matière de la partie (I).

$\Delta\vec{f}$: force élémentaire exercée par la partie (II) sur la partie (I), au point M appartenant à (S) (fig.2).

ΔS : élément de surface entourant le point M.

PAR DÉFINITION :

Le vecteur contrainte $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}$ au point M, relatif à la surface élémentaire ΔS, orientée par sa normale $\vec{n}$, est égal à la limite du quotient de $\Delta\vec{f}$ par ΔS lorsque ΔS tend vers zéro (fig.3).

$$\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta S} \; ; \; \overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}} = \frac{d\vec{f}}{dS} \; ; \; \|\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}\| = \frac{\|d\vec{f}\|}{dS}$$

$\|\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}\|$: norme du vecteur contrainte, en pascal (Pa)*. En résistance des matériaux, on utilise le mégapascal (MPa) : 1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm^2 ≈ 10 bars.

CONTRAINTE NORMALE - CONTRAINTE TANGENTIELLE :

- La contrainte normale $\overrightarrow{\sigma_M}$ est la projection de $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}$ sur la normale extérieure $\vec{n}$ (fig. 4).
- La contrainte tangentielle $\overrightarrow{\tau_M}$ est la projection de $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}$ sur le plan de la surface ΔS (fig. 4).

$$\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}} = \overrightarrow{\sigma_M} + \overrightarrow{\tau_M} \quad ; \quad \overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}} = \sigma_M . \vec{n} + \tau_M . \vec{t}$$

$\vec{n}$: vecteur unitaire normal à la surface ΔS.

$\vec{t}$: vecteur unitaire dans le plan de ΔS, selon la direction de $\overrightarrow{\tau_M}$.

σ_M : coordonnée normale de la contrainte $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}$ **.

τ_M : coordonnée tangentielle de la contrainte $\overrightarrow{C_{(M),\vec{t}}}$ **.

REMARQUE :

Une contrainte $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}$ est dite principale lorsque sa direction est normale au plan de la section (ΔS).

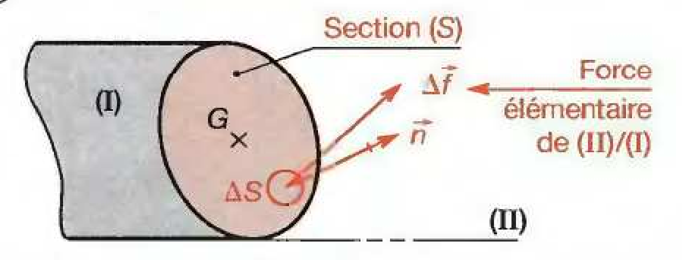
Dans ce cas : $\overrightarrow{\tau_M} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}} = \overrightarrow{\sigma_M}$.

① CORRESPONDANCE T_y ET Mf_{Gz}

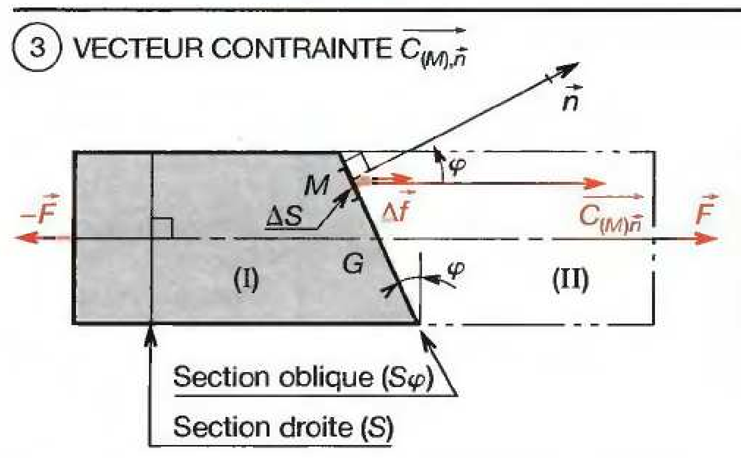
T_y = 2 700 pour x = 1,5. C'est la pente (au signe près) de la tangente à Mf_{Gz}

T_y = 0 en O ⇒ Tangente horizontale pour Mf_{Gz}

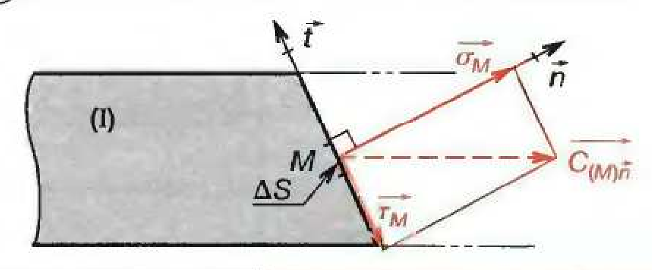
② FORCES DANS UNE SECTION



③ VECTEUR CONTRAINTE $\overrightarrow{C_{(M),\vec{n}}}$



④ COMPOSANTES DU VECTEUR CONTRAINTE

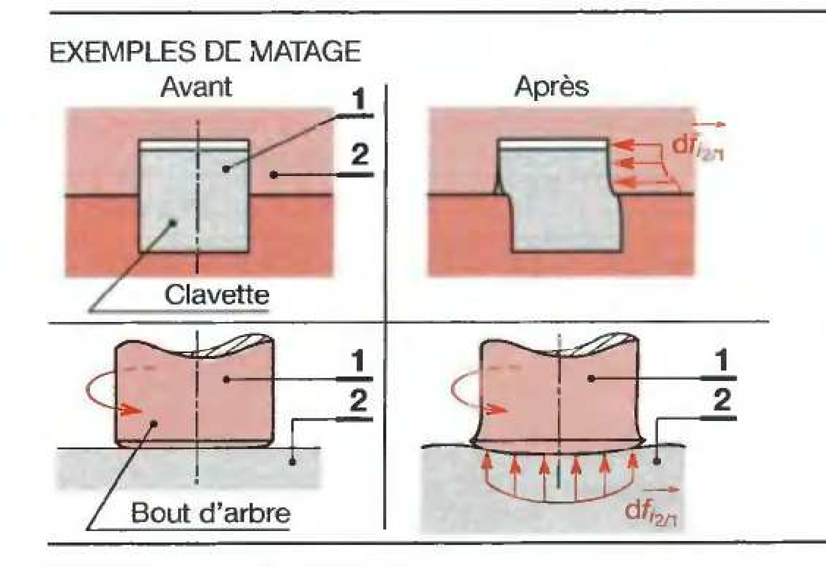


Contraintes	normale	: $\overrightarrow{\sigma_M} . \vec{n}$
	tangentielle	: $\overrightarrow{\tau_M} . \vec{t}$

* 1 Pa = 1 N/m^2. ** Dans ce qui suit, seule cette définition algébrique des contraintes sera utilisée.

47 Matage

On constate souvent sur des organes de machines des **déformations locales** : écrasement latéral des clavettes, gonflement des extrémités d'arbres soumis à des charges importantes, ovalisation des paliers…

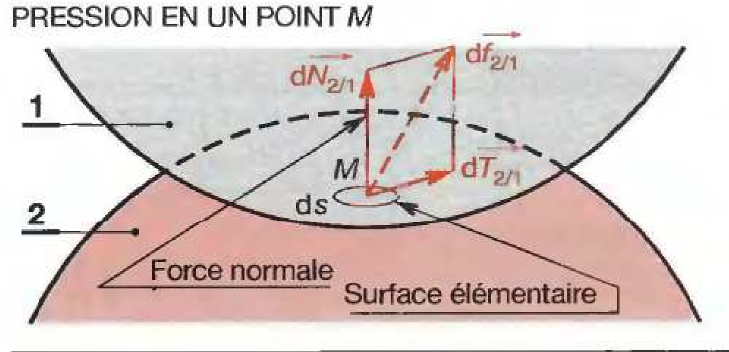


47 ▪ 1 Définition

Un solide 1 est sollicité au matage par un solide 2 si la pression superficielle sur la surface de liaison 1-2 entraîne une déformation permanente de cette dernière.

REMARQUE :

Les déformations étant locales, il faut tenir compte, dans les calculs, de la répartition des pressions appliquées (voir principe de Saint Venant § 45.4).



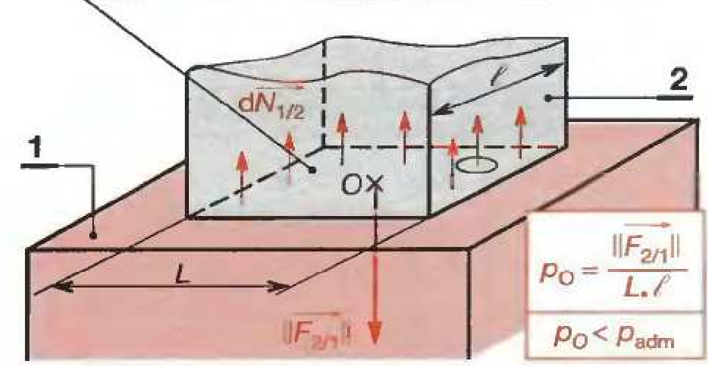
47 ▪ 2 Pression de matage

La pression de matage en un point est le quotient de la force élémentaire normale appliquée $\| d\overrightarrow{N_{2/1}} \|$ par la surface élémentaire : ds. Cette pression doit rester inférieure à la pression admissible p_{adm} (valeurs § 47.24).

$$p = \frac{\| d\overrightarrow{N_{2/1}} \|}{ds} \text{ ; condition de non matage : } p < p_{adm}$$

47 ▪ 21 Pression de matage uniforme

La pression de matage p_0 est égale au quotient de la force appliquée par l'aire de la surface de contact projetée sur un plan perpendiculaire à cette force (voir valeurs dans le tableau ci-dessous).

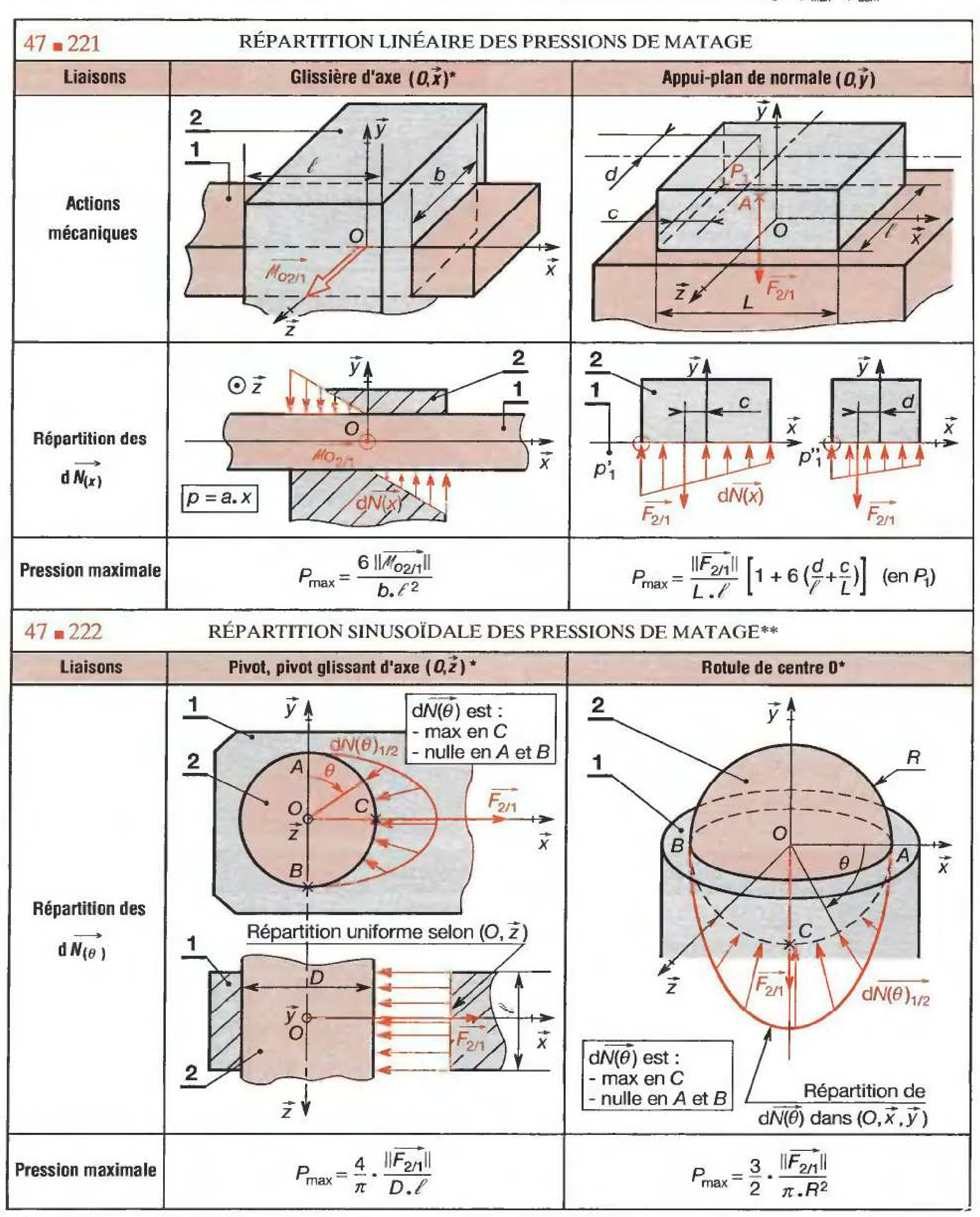


Surface	Couronne plane	Demi-cylindre*	Demi-sphère
Actions mécaniques	R_2, R_1, 2, 1, O, $\overrightarrow{dN_{1/2}}$, $\overrightarrow{F_{2/1}}$	Surface projetée **, 2, 1, D, O, ℓ, $\overrightarrow{dN_{1/2}}$, $\overrightarrow{F_{2/1}}$	Surface projetée **, 2, 1, R, O, $\overrightarrow{dN_{1/2}}$, $\overrightarrow{F_{2/1}}$
Pression de matage	$p_O = \frac{\|\overrightarrow{F_{2/1}}\|}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$	$p_O = \frac{\|\overrightarrow{F_{2/1}}\|}{D.\ell}$	$p_O = \frac{\|\overrightarrow{F_{2/1}}\|}{\pi . R^2}$

* Voir exemple de calcul d'un coussinet dans G.D. § 39.11. ** Dans ce cas, on parle de pression diamétrale.

47 ▪ 22 Pression de matage variable

Lorsque la pression de matage varie, il faut connaître la fonction mathématique donnant sa variation en fonction de l'abscisse du point considéré. On calcule alors la valeur de la pression maximale : p_{max} et on vérifie la condition de non-matage : $p_{max} < p_{adm}$.



47 ▪ 221 RÉPARTITION LINÉAIRE DES PRESSIONS DE MATAGE

Liaisons	Glissière d'axe $(O,\vec{x})$*	Appui-plan de normale $(O,\vec{y})$
Actions mécaniques		
Répartition des $d\vec{N}_{(x)}$	$p = a.x$	
Pression maximale	$p_{max} = \frac{6\,\|\vec{M}_{O2/1}\|}{b.\ell^2}$	$p_{max} = \frac{\|\vec{F}_{2/1}\|}{L.\ell}\left[1+6\left(\frac{d}{\ell}+\frac{c}{L}\right)\right]$ (en P_1)

47 ▪ 222 RÉPARTITION SINUSOÏDALE DES PRESSIONS DE MATAGE**

Liaisons	Pivot, pivot glissant d'axe $(O,\vec{z})$ *	Rotule de centre O*
Répartition des $d\vec{N}_{(\theta)}$		
Pression maximale	$p_{max} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\|\vec{F}_{2/1}\|}{D.\ell}$	$p_{max} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\|\vec{F}_{2/1}\|}{\pi.R^2}$

* Hypothèse : liaison sans jeu. ** Hypothèse de calcul.

47 ■ 23 Pressions entre contacts linéaires ou ponctuels

Pour une liaison pivot ou rotule, par exemple, on constate **dans la pratique une augmentation de la pression maximale**. En fait, le contact surfacique se transforme en contact quasi linéaire ou ponctuel sous l'influence des défauts de forme (circularité, cylindricité...) et du jeu existant dans l'ajustement. La liaison devient une **liaison réelle**.

Les formules de Hertz relatives à ces contacts s'appliquent dans le domaine élastique. Pour ces calculs, il faut définir les grandeurs ci-contre :

1° r_r : le rayon de courbure relative :

$$\frac{1}{r_r} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}\,^{*}$$

r_1 : rayon du cylindre ou de la sphère 1.
r_2 : rayon du cylindre ou de la sphère 2.

Signe : + pour une tangence extérieure.
Signe : – pour une tangence intérieure.

2° Le module d'élasticité E pour le calcul :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)$$

E_1 : module d'élasticité du matériau 1.
E_2 : module d'élasticité du matériau 2.

Contact cylindre-cylindre		Contact sphère-sphère	
Contact réel	Répartition de p	Contact réel	Répartition de p
r_1, $\vec{F}_{1/2}$, 1, 2, r_2, $2b$, ℓ	$2b$, P_{max}	r_1, $\vec{F}_{1/2}$, 1, 2, r_2, $2r$	$2r$, P_{max}
$b \approx 1{,}52\sqrt{\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert . r_r}{E . \ell}}$	$P_{max} \approx 0{,}418\sqrt{\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert . E}{r_r . \ell}}$	$r \approx 1{,}11\sqrt[3]{\dfrac{\lVert\vec{F}\rVert . r_r}{E}}$	$P_{max} \approx 0{,}388\sqrt[3]{\lVert\vec{F}\rVert . \left(\dfrac{E}{r_r}\right)^2}$

47 ■ 24 Valeurs de pressions admissibles

Le tableau ci-dessous donne les pressions limites tolérables (ou admissibles) entre deux pièces immobiles ou en mouvement dans des conditions d'utilisation déterminées. On doit avoir : $p < p_{adm}$.

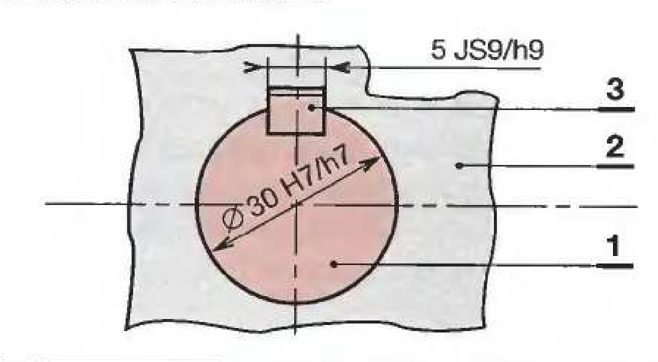
Contact entre pièces fixes	Pression admissible (en MPa)
Sur acier ou fonte sans matage	80 à 100
Sur acier ou fonte avec léger matage (ou sur béton)	200 à 250
Contact entre filets (ex. : vis d'assemblage)	15 à 30
Contact entre pièces mobiles	**Pression admissible (en MPa)**
Contact entre filets (mobiles en fonctionnement)	2 à 6
Articulations en porte à faux	0,5 à 8
Articulations en chape (ou fourchette)	1 à 25
Paliers rigides avec flexion de l'arbre ; acier/fonte	1 à 1,5
Paliers à rotule, acier sur bronze à graissage intermittant	1,5 à 2,5
Paliers acier trempé / bronze. Lubrification sur film d'huile	2,5 à 4
Paliers rectifiés de bielles ; graissage normal ou sans pression	6 à 9 ou 9 à 15
Paliers de moteurs (automobile, aviation) ; rotules de coussinets	10 à 25

* Dans le cas d'un contact cylindre/plan ou sphère/plan, l'un des rayons est infini : $\frac{1}{\infty} \to 0$.

47.3 Exemples

47.31 Calcul d'une clavette

Un arbre **1** de diamètre d = 30 mm tourne à 300 tr/min et transmet à une poulie **2** une puissance $P = 1{,}5$ kW. Cette poulie **2** est liée en rotation à l'arbre **1** par l'intermédiaire d'une clavette parallèle **3** de forme *B*, de longueur ℓ.



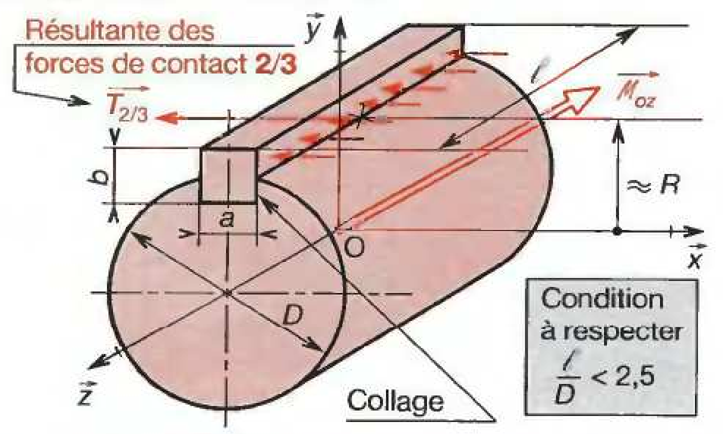
HYPOTHÈSES :

- L'ajustement entre **1** et **2** ne transmet aucun moment autour de $(O, \vec{z})$. Celui de la clavette **3** dans la rainure de **2** est glissant (pas de contraintes liées au montage).
- La clavette **3** est parfaitement parallèle à l'axe $(O, \vec{z})$ et la répartition des pressions sur son flanc latéral est uniforme.
- Les conditions de fonctionnement sont mauvaises (démarrages fréquents, variations d'effort en fonctionnement).

PROBLÈME :

1° Déterminer les dimensions transversales $a \times b$ de la clavette en fonction du diamètre de l'arbre.

2° Déterminer la longueur ℓ de la clavette afin qu'elle supporte la pression de matage sur son flanc.



Pressions admissibles sur les flancs des clavettes et cannelures (en MPa)*			
Type de montage	Conditions de fonctionnement		
	Mauvaises	Moyennes	Excellentes
Glissant sous charge	3 à 10	5 à 15	10 à 20
Glissant sans charge	15 à 30	20 à 40	30 à 50
Fixe	40 à 70	60 à 100	80 à 150

SOLUTION :

1° Dimensions transversales : elles sont normalisées en fonction du diamètre de l'arbre. Le tableau du G.D. § 38.121, pour un arbre de 30 mm donne $a = 10$; $b = 8$.

2° Détermination de la longueur de la clavette :

- **Calculer le couple moteur $\overline{M}_{Oz}$ appliqué sur 2 :**

On sait que $P = \overline{M}_{Oz} \cdot \omega$ (voir § 59.3)

d'où : $1{,}5 \times 10^3 = \overline{M}_{Oz} \times \dfrac{300 \times 2\pi}{60}$

$$\overline{M}_{Oz} = \frac{1{,}5 \times 10^3 \times 60}{300 \times 2\pi} \; ; \; \overline{M}_{Oz} \approx 47{,}7 \text{ N.m.}$$

- **Calculer la résultante des actions de contact entre 2 et 3 :**

$$\|\vec{T}_{2/3}\| = \frac{\overline{M}_{Oz}}{R} \; ; \; \|\vec{T}_{2/3}\| = \frac{2 \times 47{,}7}{30 \times 10^{-3}} \; ; \; \|\vec{T}_{2/3}\| \approx 3\,180 \text{ N.}$$

- **Calculer la pression sur un flanc de la clavette :**

La surface de liaison clavette/rainure étant plane, et la pression uniformément répartie, on peut écrire (voir § 47.21) :

$$p = \frac{\|\vec{T}_{2/3}\|}{S} \; ; \; p = \frac{\|\vec{T}_{2/3}\|}{\ell \times b/2} \; ; \; p = \frac{3\,180}{\ell \times 4}.$$

- **Choisir dans le tableau ci-dessus une pression admissible sur le flanc de la clavette :**

Cas d'un montage fixe, avec des conditions de fonctionnement mauvaises, adoptons $p_{adm} = 40$ MPa.*

- **Écrire la condition de non-matage :**

$$p < p_{adm} \; ; \; \frac{3\,180}{\ell \times 4} < 40 \; ; \; \ell > \frac{3\,180}{4 \times 40}$$

$\ell > 19{,}9$ mm. Nous adoptons : ℓ **= 20 mm**.

- **Vérifier** que $\frac{\ell}{D} < 2{,}5$; $\frac{20}{30} = 0{,}7$; **0,7 < 2,5**.

REMARQUE :

Le calcul de la clavette au cisaillement donne une longueur plus faible. La condition de non-matage est déterminante.

* 1 MPa = 1 N/mm².

47.32 Calcul des arbres cannelés

Ce calcul s'assimile à celui d'une liaison par clavette. L'effort tangentiel T à transmettre s'exerce sur les flancs des cannelures de l'arbre et sur ceux des rainures du moyeu, sur une surface totale théorique : $S = n \cdot \ell \cdot h$. La condition de non-matage s'écrit :

$$\frac{T}{S'} \leqslant p_{adm} \quad ; \quad \frac{Cm}{s' \cdot L \cdot R_{moy}} \leqslant p_{adm}$$

Cm : couple moteur à transmettre (N.mm); $Cm = T \cdot R_{moy}$.
s' : surface réelle d'appui par mm de longueur de contact (mm²/mm).
L : longueur de contact arbre-alésage (mm).
$S' = s' \cdot L$: surface totale réelle d'appui.
R_{moy} : rayon moyen mesuré à mi-hauteur d'une dent (mm).
p_{adm} : pression admissible sur les flancs des cannelures (MPa), dépend des conditions d'utilisation (voir tableau § 47.31).

EXEMPLE :
Arbre cannelé (série moyenne)* $d = 52$, $D = 60$, $Cm = 1\,500$ N.m. Glissant sans charge. D'après tableau § 47.31 : $p_{adm} = 15$ MPa.

SOLUTION :

- **Calculer la surface totale réelle d'appui** :

$$s' \cdot L \geqslant \frac{Cm}{p_{adm} \cdot R_{moy}} \; ; \; s' \cdot L \geqslant \frac{1{,}5 \times 10^6}{15 \times 28},$$

$s' \cdot L \geqslant 3\,572$ mm².

- **Rechercher sur l'abaque ci-contre la valeur de s'** :
$d = 52$; 8 cannelures, série moyenne ; $s' = 18$ mm²/mm.

- **Calculer L** :

$$L \geqslant \frac{3\,572}{18} \qquad L \geqslant 198{,}4 \text{ mm},$$

$L \geqslant 2{,}5\, d$: ne convient pas (difficulté de brochage...).

- **Prendre une série forte** : 16 cannelures :
$s' = 36$ mm²/mm, $L \geqslant \frac{3\,572}{36}$, $L \geqslant 99$ **mm** convient.

47.33 Calcul des chapes à œil

La détérioration d'une chape peut se faire par :

- traction selon la section S_1 (cas1),
- cisaillement selon la section S_2 (cas 2),
- matage dans l'alésage avec répartition sinusoïdale (cas 3)**.

Effectuer les trois calculs et prendre la condition la plus défavorable.

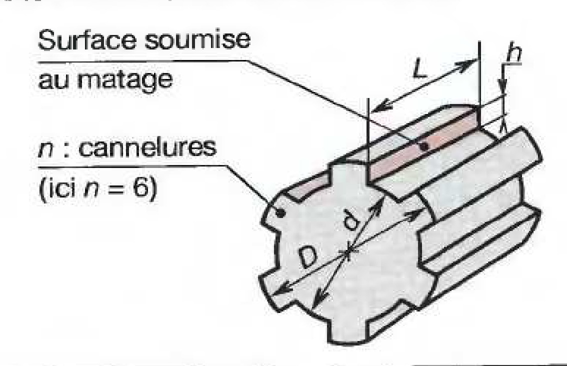
EXEMPLE :
Vérifier une chape au matage sachant que $\|\vec{F}\| = 1\,000$ N. $d = 12$, $e = 10$; $p_{adm} = 12$ MPa (glissant sous charge).

SOLUTION :

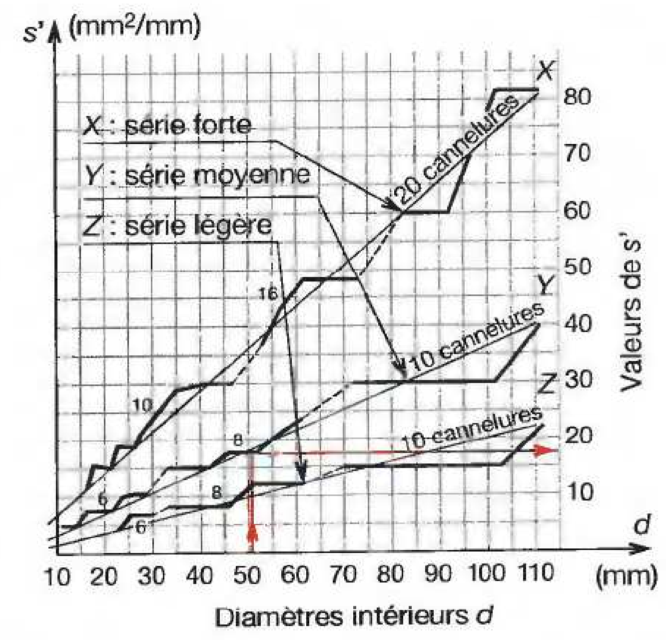
$$\frac{4 \times 1000}{\pi \times 12 \times 10} = 10{,}6 \text{ MPa} \; ; \; 10{,}6 < 12. \quad \text{Condition vérifiée.}$$

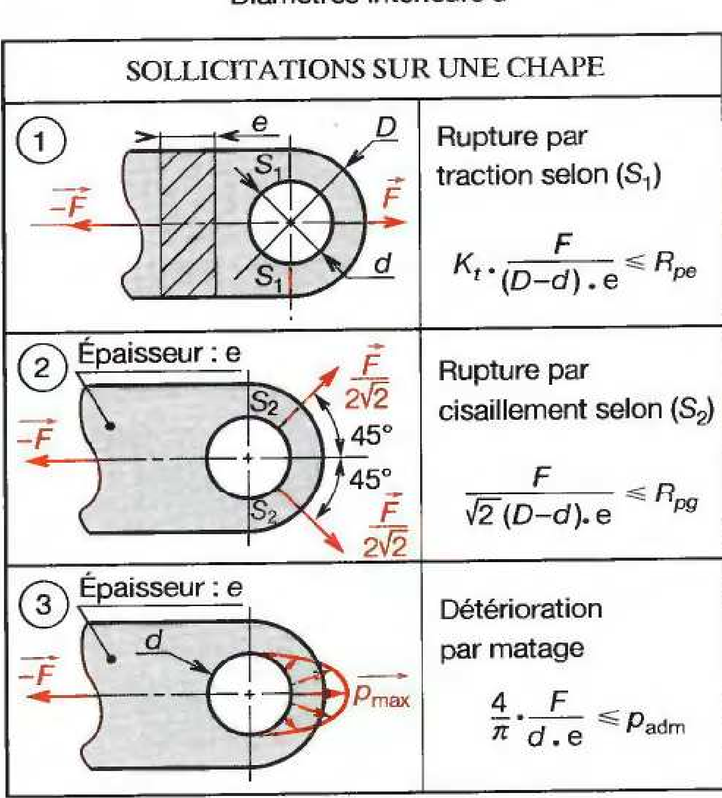
* Voir G.D. § 38.2. ** Hypothèse de calcul, voir § 47.222.

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES



DÉTERMINATION DE s'





48 Traction simple

48.1 Hypothèses

■ **Solide idéal** : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne, de section constante.

■ **Les actions extérieures** dans les sections extrêmes sont modélisables par deux résultantes $\vec{A}$ et $\vec{B}$ appliquées aux barycentres de ces sections, dirigées selon la ligne moyenne, orientées vers l'extérieur de la poutre.

$${}_B\{A_{\bar{1}/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} \qquad {}_B\{B_{\bar{1}/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{B}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

48.2 Définition

Une poutre est sollicitée à la traction si, le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en G, barycentre de la section droite (S) à une **résultante perpendiculaire** à (S), dirigée vers l'extérieur de la matière, telle que :

$${}_G\{\text{Coh}_{II/I}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{N}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} \text{ Dans } \mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : \begin{matrix} N \neq 0 ; T_y = 0 ; T_z = 0 \\ (N > 0) \\ Mt = 0 ; Mf_{Gy} = 0 ; Mf_{Gz} = 0 \end{matrix}$$

REMARQUE :

$${}_G\{\text{Coh}_{II/I}\} = -{}_G\{\text{Actions ext. à gauche}/_I\} = -{}_G\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$= +{}_G\{\text{Actions ext. à droite}/_{II}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{B}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

d'où : $\vec{N} = -\vec{A}$; $\vec{N} = \vec{B}$ et $\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0}$

48.3 Contraintes dans une section droite

Les contraintes $\vec{\sigma_M}$ dans une section droite (S) sont normales à la section et uniformément réparties dans cette dernière. La valeur de σ_M en un point M de (S) est :

$$\sigma_M = \frac{N}{S} \qquad N > 0 ; \ \sigma_M > 0$$

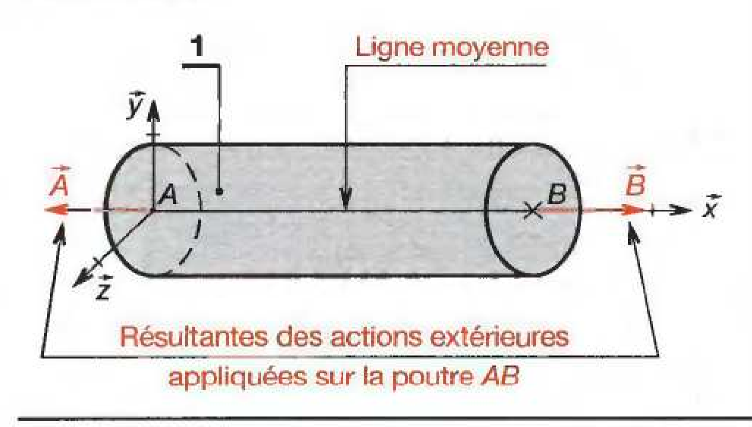
σ_M : contrainte normale en M (MPa)*.

N : effort normal (N).

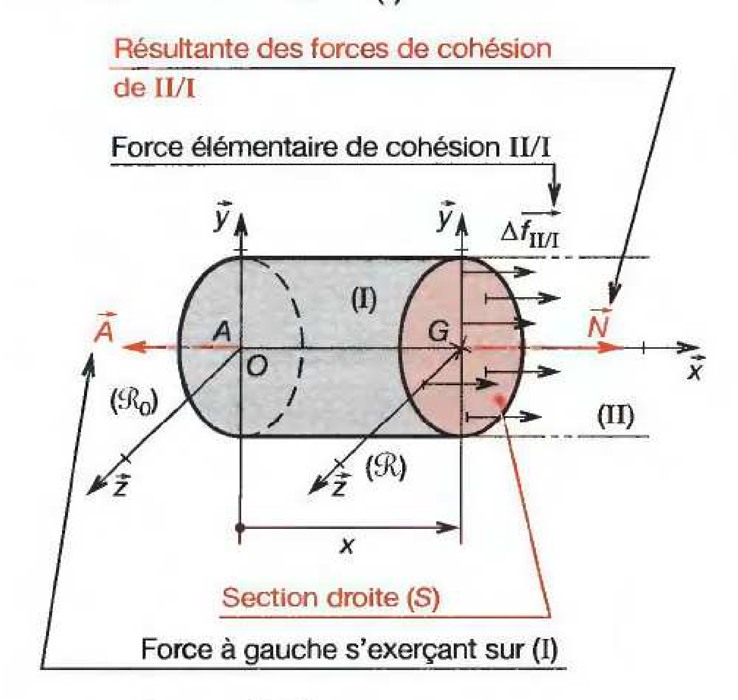
S : aire de la section droite soumise à la traction (mm²).

* 1 MPa = 1 N/mm².

SOLIDE IDÉAL

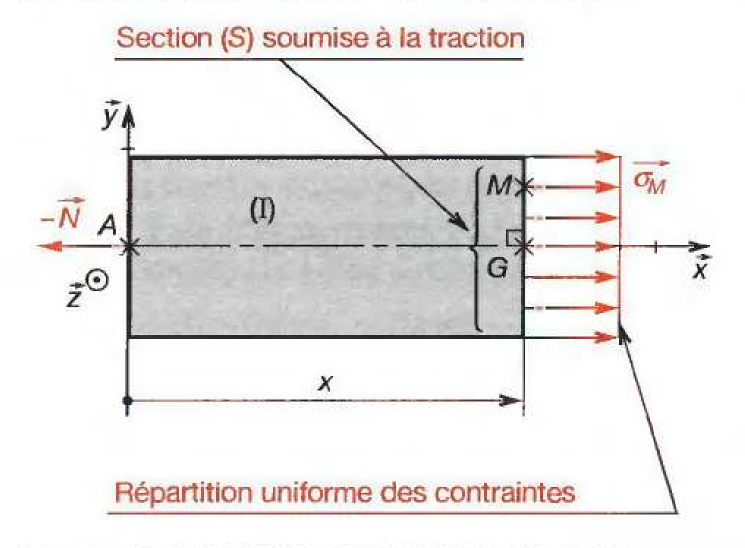


ISOLEMENT D'UNE PARTIE (I)



$\mathcal{R}_0 (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la poutre
$\mathcal{R} (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à la section (S)

RÉPARTITION DES CONTRAINTES DANS (S)



48■4 Étude des déformations

48■41 Essai de traction

La machine de traction permet d'appliquer très progressivement et sans choc un effort de traction F, afin d'étudier les allongements $\Delta \ell$ de l'éprouvette :

■ Porter en ordonnée la valeur de **l'effort unitaire R** (ou **contrainte de traction σ**) en mégapascal (MPa)*.

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

F : effort de traction (en N),

S_0 : section initiale de l'éprouvette (en mm^2).

■ Porter en abscisse la valeur de **l'allongement unitaire ε_x** :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

$\Delta \ell$: allongement de l'éprouvette (en mm) (fig. 2),

ℓ_0 : longueur initiale de l'éprouvette (en mm).

La courbe obtenue $\sigma = f(\varepsilon_x)$ est appelée : **courbe de traction**, elle est pratiquement indépendante des dimensions de référence de l'éprouvette. Elle fait apparaître deux zones :

■ **La zone OA** : l'éprouvette a une **déformation élastique**. **L'allongement unitaire est proportionnel à l'effort appliqué**. Dès que σ est supprimé, l'éprouvette reprend sa longueur initiale ℓ_0.

On reste dans cette zone tant que $\sigma < R_e$ avec $R_e = F_e / S_0$**.

R_e est la résistance élastique du matériau (MPa).

Pour les aciers : $200 \leqslant R_e \leqslant 1\,000$ (MPa).

■ **La zone AD** : $\sigma > R_e$: l'éprouvette a une **déformation plastique** ou **permanente**. L'allongement unitaire n'est plus proportionnel à l'effort unitaire appliqué. Lorsque σ est supprimé, l'éprouvette ne reprend pas sa longueur ℓ_0.

De A à C : l'éprouvette s'allonge et reste cylindrique.

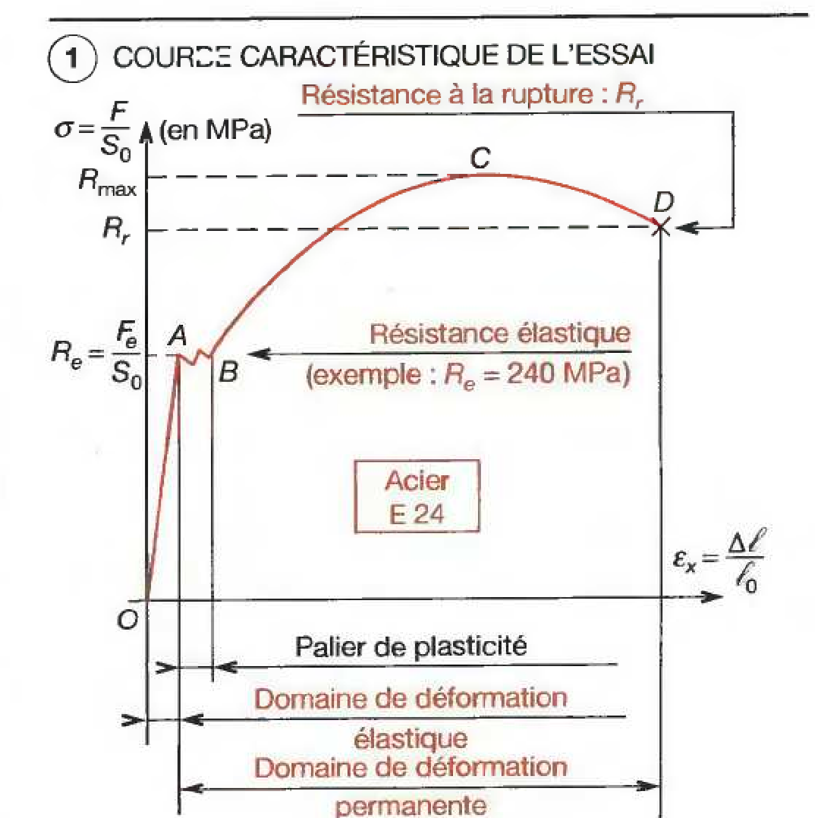
De C à D : l'allongement continue de croître avec un effort F_2 moins important. Il apparaît un étranglement, ou **striction**, qui s'accentue jusqu'à la rupture en D.

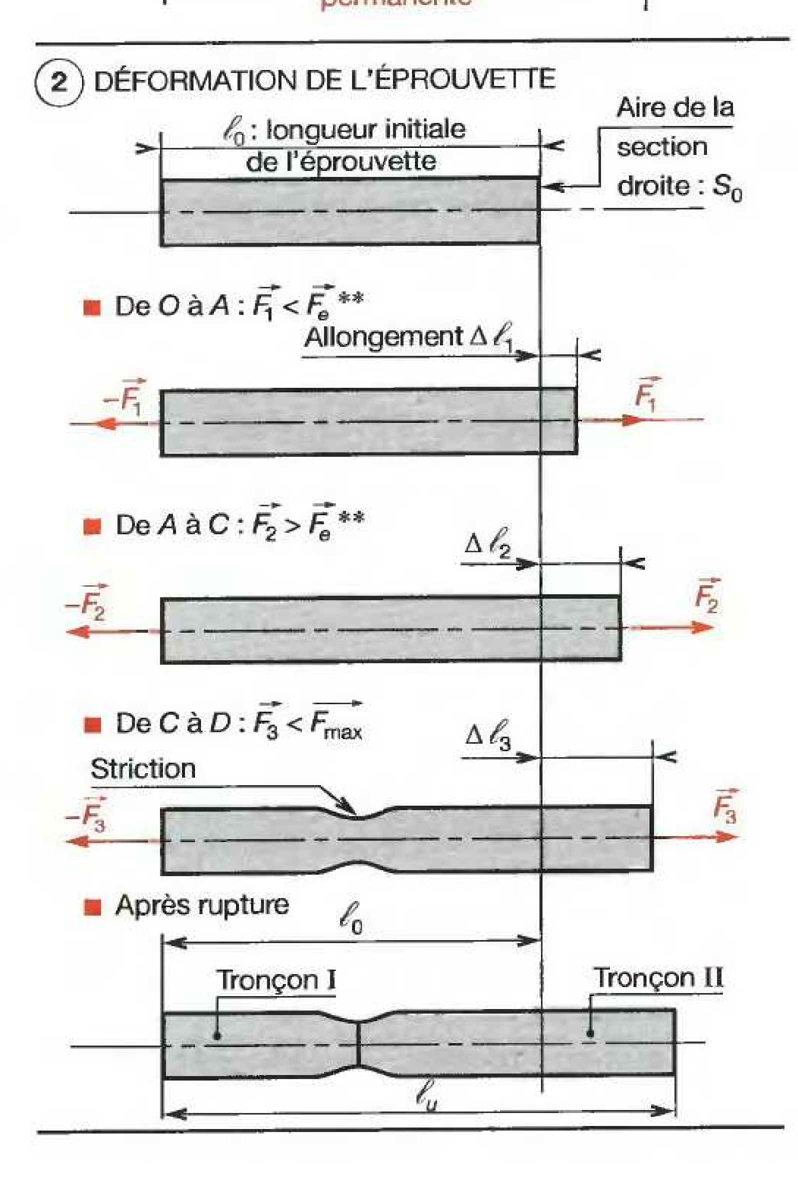
R_r est la résistance à la rupture du matériau (MPa).

Après rupture, l'éprouvette a pour longueur ℓ_u. On définit l'allongement en %.

$$A\% = \frac{\ell_u - \ell_0}{\ell_0} \times 100 \text{ ; pour les aciers } 0\% < A\% < 30\%.$$

* 1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm^2. ** F_e : force de limite élastique.





48 ■ 42 Déformation d'une poutre dans le domaine élastique

48 ■ 421 Déformation longitudinale

La contrainte $\sigma = \frac{N}{S_0}$ varie linéairement en fonction de l'allongement unitaire ε_x pour le segment de droite *OA*. C'est la **loi de Hooke** (voir fig. 1).

$$\sigma = E . \varepsilon_x \quad ; \quad \frac{N}{S_0} = E . \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$$

σ : contrainte normale de traction (MPa).
E : module d'élasticité longitudinal ou d'Young (MPa).
ε_x : allongement unitaire (sans dimension).
N : effort normal (N).
S_0 : section droite initiale soumise à la traction (mm^2).
$\Delta\ell$: allongement de la poutre (mm).
ℓ_0 : longueur initiale de la poutre (mm).
L'allongement $\Delta\ell$ s'écrit :

$$\Delta\ell = \frac{N . \ell_0}{E . S_0}$$

48 ■ 422 Déformation transversale

Lorsque une poutre s'allonge dans la direction longitudinale sous l'effet de N, on observe une contraction dans la direction transversale perpendiculaire. On écrit que :

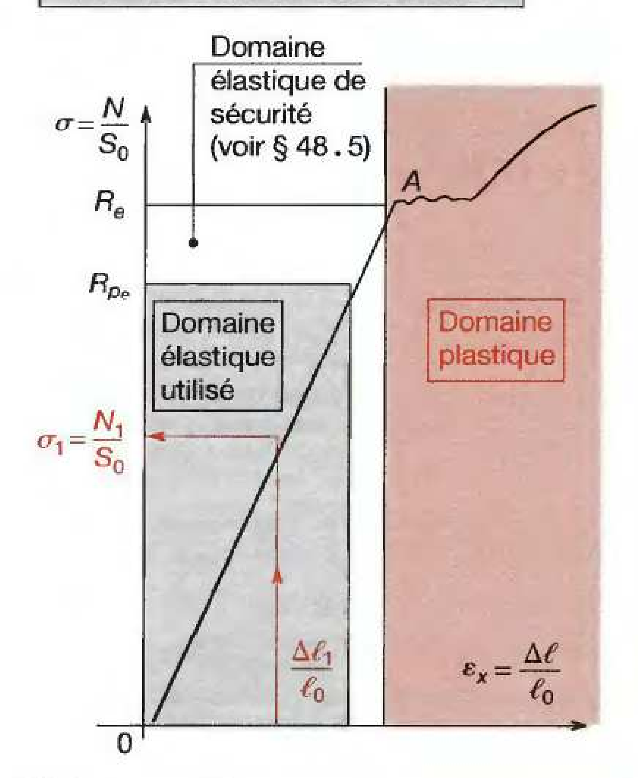
$$\varepsilon_y = - \nu . \varepsilon_x$$

ε_x : allongement unitaire selon $(O, \vec{x})$ (sans unité).
ε_y : contraction selon $(O, \vec{y})$ (ou raccourcissement),
ν : coefficient de Poisson.

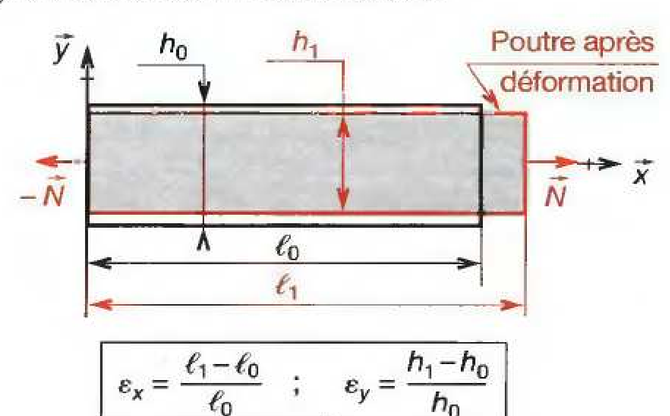
Selon les matériaux : $0,1 \leqslant \nu \leqslant 0,5$.
Pour les aciers : $\nu = 0,3$.

1 DÉFORMATION LONGITUDINALE

$$\sigma = E . \varepsilon_x$$
Pour les aciers $E \approx 200\,000$ MPa



2 DÉFORMATION TRANSVERSALE



$$\varepsilon_x = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$$

48 ■ 43 VALEURS DES CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES DES MÉTAUX ET PLASTIQUES*

Dénomination et symbole	$R_{e\,min}$ (MPa)	E (MPa)	Dénomination et symbole	R_{min} (MPa)	E (MPa)
Fonte à graphite lamellaire FGL 200	200	80 000	Acrylonitrile - butadiène - stryrène (ABS)	17	700
Fonte à graphite sphéroïdal FGS 600. 3	370	170 000	Polyamide type 6-6 (PA 6/6)	49	1830
Acier non allié (E 24) S 235	215	210 000	Polycarbonate (PC)	56	2450
Acier allié (25 CD 4) 25Cr Mo 4	700	210 000	Polytétrafluoroéthylène (PTFE)	11	400
Bronze : Cu Sn 8P	390	100 000	Polystyrène (PS)	35	2800
Cupro-aluminium Cu Al 10 Ni S Fe 4	250	122 500	Polychlorure de vinyle (rigide) PVC U	35	2450
Duralumin AW-2017 (Al Cu 4 Mg Si)	240	72 500	Phénoplaste (bakélite) PF 21	25	7000
Alpax A S13	80	74 500	Époxyde (araldite)	28	2450

* Voir autres valeurs G.D. chapitre 56.

48.5 Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale doit rester inférieure à la **résistance pratique à l'extension R_{pe}** (voir fig. 1, page précédente). La condition de résistance est :

$$|\sigma_M| \leq R_{pe} \quad \text{ou} \quad \frac{|N|}{S} \leq R_{pe}$$

On définit R_{pe} (MPa) par le quotient suivant :

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

R_e : résistance élastique à l'extension (MPa),

s : coefficient de sécurité (sans unité).

Coefficient de sécurité (s)	Conditions générales de calculs (sauf réglementation particulière)
1,5 à 2	Cas exceptionnels de grande légèreté. Hypothèses de charges surévaluées.
2 à 3	Construction où l'on recherche la légèreté (aviation). Hypothèses de calcul la plus défavorable (charpente avec vent ou neige, engrenages avec une seule dent en prise ...).
3 à 4	Bonne construction, calculs soignés, haubans fixes.
4 à 5	Construction courante (légers efforts dynamiques non pris en compte. Treuils.)
5 à 8	Calculs sommaires, efforts difficiles à évaluer (cas de chocs, mouvements alternatifs, appareils de levage, manutention).
8 à 10	Matériaux non homogènes. Chocs, élingues de levage.
10 à 15	Chocs très importants, très mal connus (presses). Ascenseurs.

48.6 Condition de déformation

Pour des **raisons fonctionnelles** (problèmes d'alignement d'appuis, cahiers des charges...), il est parfois important de **limiter l'allongement**. Il doit rester inférieur à une valeur limite : $\Delta\ell_{lim}$.

$$|\Delta\ell| \leq \Delta\ell_{lim} \quad \text{ou} \quad \frac{|N| \cdot \ell_0}{E \cdot S} \leq \Delta\ell_{lim}$$

48.7 Géométrie non parfaite *

Si le solide présente des **variations brusques de section**, dans une zone proche de ces variations, la répartition des contraintes n'est plus uniforme. Il y a **concentration de contrainte**. La contrainte maximale est :

$$|\sigma|_{max} = K_t \cdot |\sigma|_{nom} \; ; \quad 1 < K_t < 3$$

K_t : coefficient de concentration de contrainte de traction.

σ_{nom} : contrainte normale nominale ($\sigma_{nom} = \frac{N}{S}$).

K_t est fonction de la forme de la pièce (circulaire ou plane) et de la nature du changement de section (épaulement, gorge, alésage, etc.).

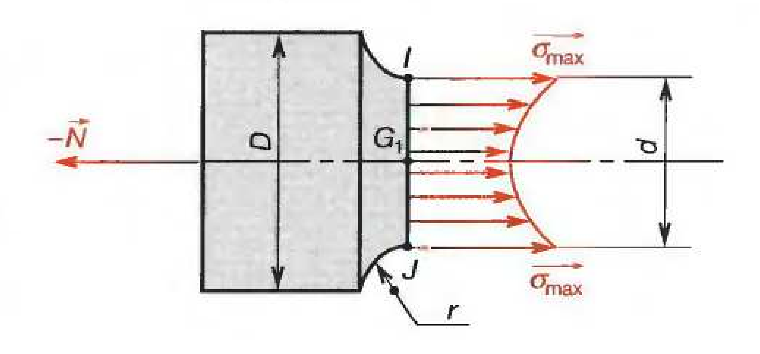
Les valeurs expérimentales de K_t sont données par les graphiques § 48.8.

Pour un filetage ISO triangulaire : $K_t \approx 2,5$

Les matériaux ductiles sont peu affectés par les concentrations de contraintes. Les matériaux cassant y sont très sensibles.

* On dit que le solide est réel.

CONCENTRATION DE CONTRAINTE



Méthode de calcul d'un solide réel

1° Calculer $|\sigma|_{nom}$.

2° Analyser la nature de la géométrie, (épaulement, gorge...), section circulaire ou prismatique et choisir la courbe § 48.8.

3° Calculer : $\frac{r}{d}$, $\frac{D}{d}$, ou $\frac{h}{d}$.

4° Déterminer la valeur de K_t correspondante.

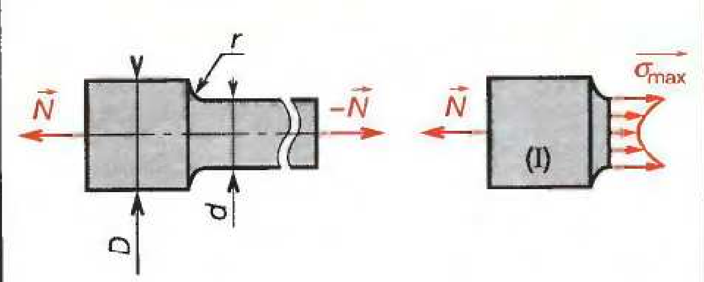
5° Calculer $|\sigma|_{max} = K_t |\sigma|_{nom}$.

6° Écrire la condition de résistance :

$|\sigma|_{max} \leq R_{pe}$.

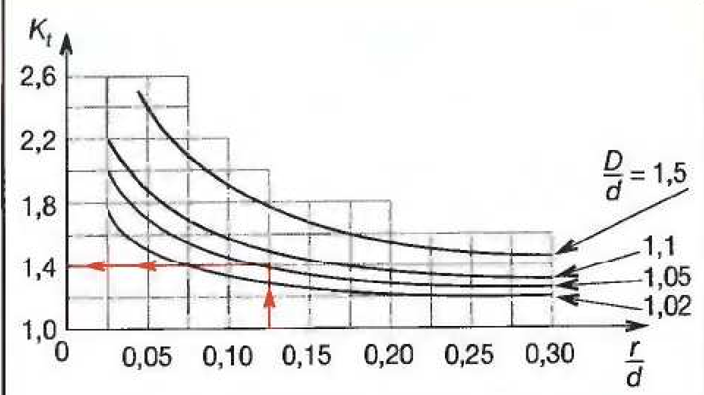
48 ■ 8 COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE K_t *

Arbre de section circulaire épaulé



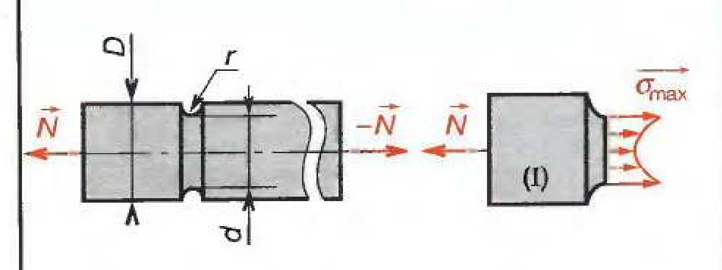
$|\sigma|_{max} = K_t \, |\sigma_{nom}|$

$|\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}$



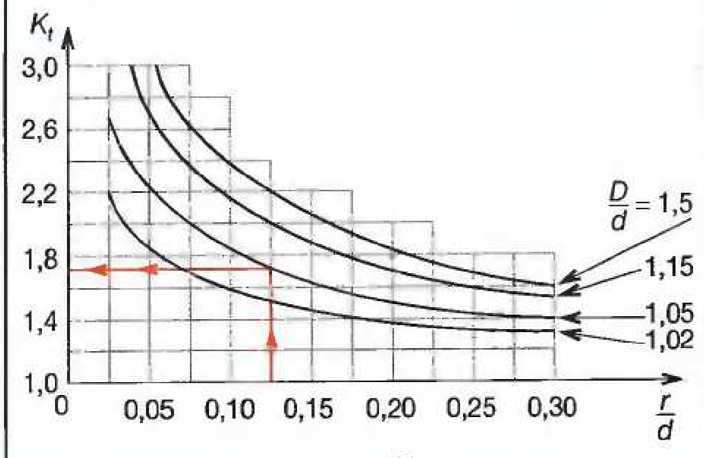
Exemple : $\frac{r}{d} = 0{,}125$; $\frac{D}{d} = 1{,}05$; $K_t = 1{,}4$

Arbre de section circulaire avec gorge



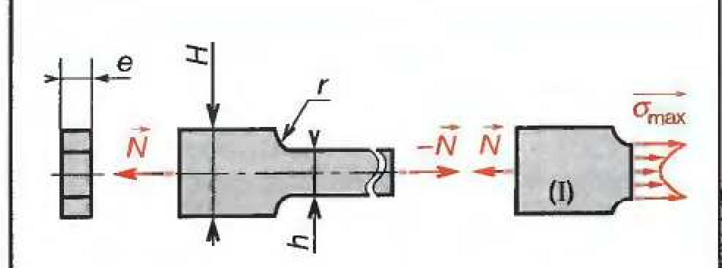
$|\sigma|_{max} = K_t \, |\sigma_{nom}|$

$|\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}$



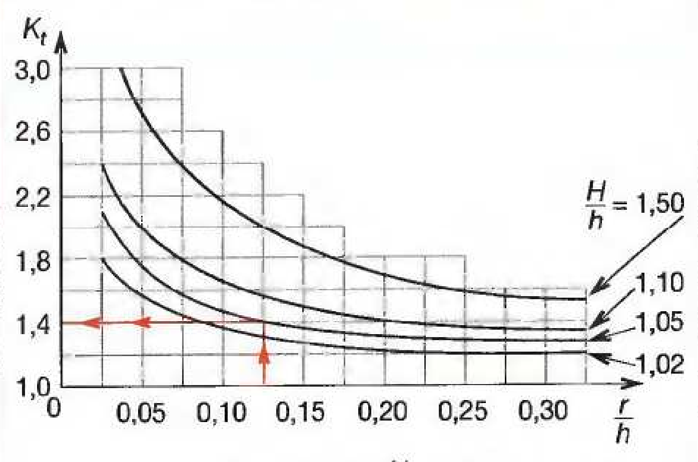
Exemple : $\frac{r}{d} = 0{,}125$; $\frac{D}{d} = 1{,}05$; $K_t = 1{,}7$

Plaque plane avec changement de section



$|\sigma|_{max} = K_t \, |\sigma_{nom}|$

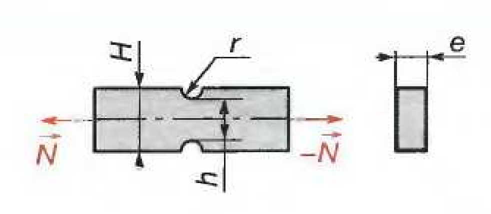
$|\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \qquad S = h \cdot e$



Exemple : $\frac{r}{h} = 0{,}125$; $\frac{H}{h} = 1{,}05$; $K_t = 1{,}4$

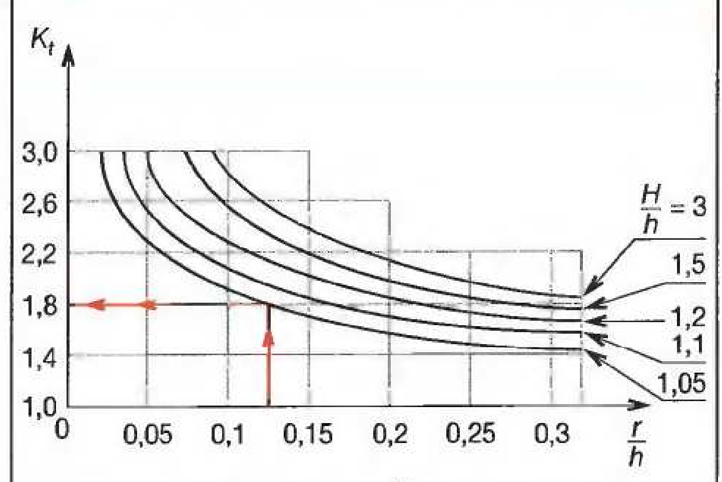
* D'après CETIM.

Plaque plane avec deux saignées sur les bords



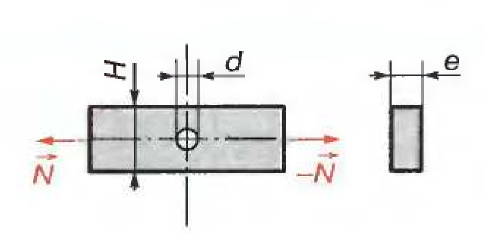
$$|\sigma|_{max} = K_t \, |\sigma_{nom}|$$

$$|\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \qquad S = h \cdot e$$



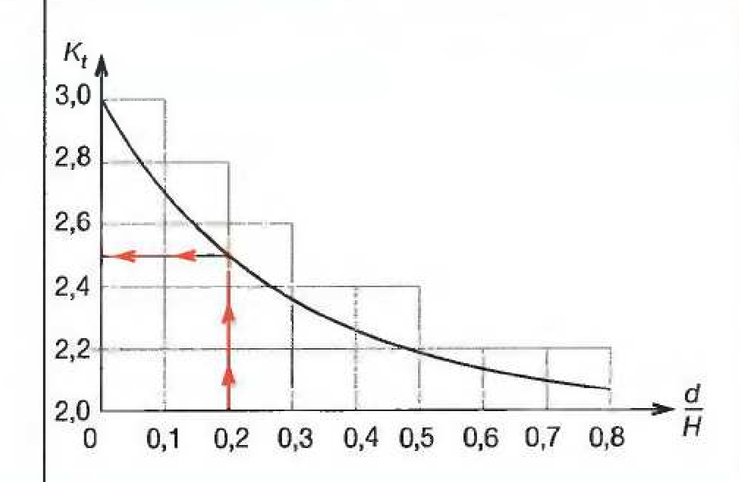
Exemple : $\frac{r}{h} = 0{,}125$; $\frac{H}{h} = 1{,}05$; $K_t = 1{,}8$

Plaque plane percée d'un trou sur l'axe de symétrie longitudinal



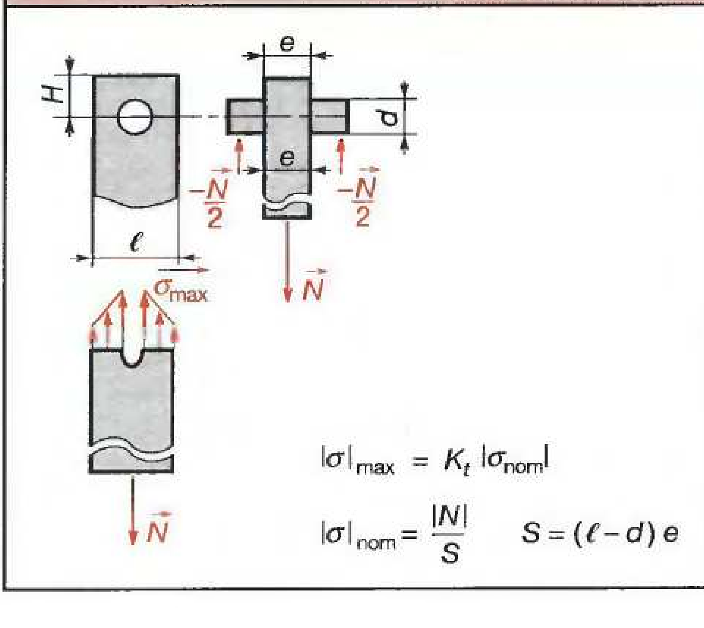
$$|\sigma|_{max} = K_t \, |\sigma_{nom}|$$

$$|\sigma|_{nom} = \frac{|N|}{S} \qquad S = (H - d)\, e$$



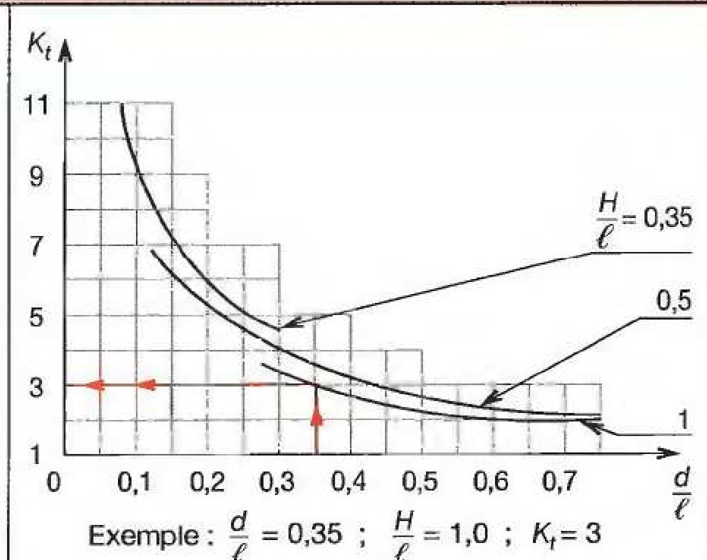
Exemple : $\frac{d}{H} = 0{,}2$; $K_t = 2{,}5$

Plaque plane percée d'un trou à une extrémité



$$|\sigma|_{max} = K_t \, |\sigma_{nom}|$$

$$|\sigma|_{nom} = \frac{|N|}{S} \qquad S = (\ell - d)\, e$$



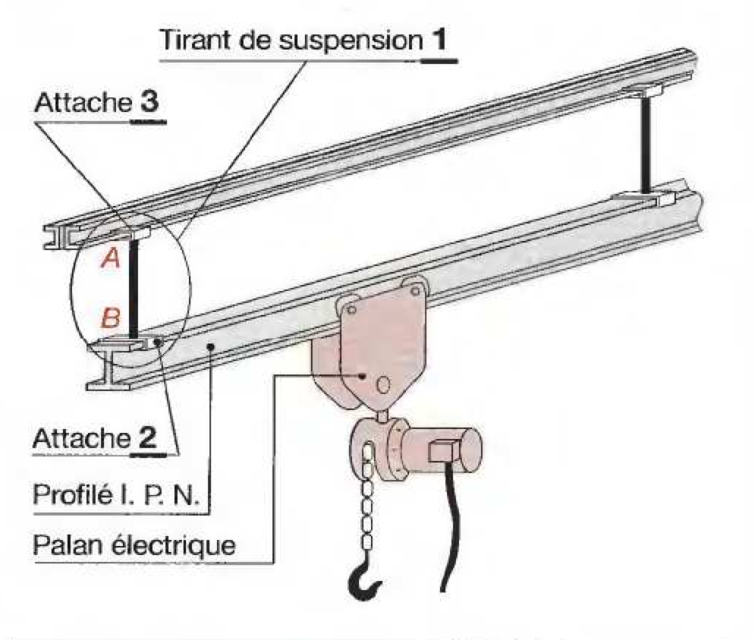
Exemple : $\frac{d}{\ell} = 0{,}35$; $\frac{H}{\ell} = 1{,}0$; $K_t = 3$

48.9 Exemples

48.91 Vérification d'un tirant

Un profilé IPN, sert de chemin de roulement pour un palan. Il est suspendu par 3 tirants de ∅ 10 mm et de longueur 400 mm. Ces tirants sont en acier de résistance élastique $R_e = 240$ MPa, de module d'Young : $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. Le coefficient de sécurité est : $s = 8$ (appareil de levage, voir tableau § 48.5). Le tirant le plus chargé supporte une charge verticale de 600 N. L'allongement ne doit pas dépasser 0,5 mm.

1° Vérifier que ce tirant peut supporter cette charge dans des conditions satisfaisantes de sécurité.
2° Vérifier que l'allongement reste acceptable.



RÉPONSE :

Le calcul se fait selon la méthode définie à la page suivante. 1 est une poutre soumise à deux résultantes opposées $\vec{A}_{3/1}$ et $\vec{B}_{3/1}$: (sollicitation de traction).

1° Vérification de la résistance à la traction :

ZONE 1 : SOLIDE IDÉAL :

La contrainte nominale est : $|\sigma_{nom}| = \dfrac{\|\vec{N}\|}{S}$

L'effort normal est : $\|\vec{N}\| = \|\vec{A}_{3/1}\| = 600$ N

■ **Calculer la surface soumise à la traction et la contrainte :**

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78{,}54 \text{ mm}^2$$

d'où : $$|\sigma_{nom}| = \frac{600}{78{,}54} = 7{,}64 \text{ MPa}$$

■ **Calculer la résistance pratique à l'extension, R_{pe} :**

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s} = \frac{240}{8} \qquad R_{pe} = 30 \text{ MPa}$$

■ **Écrire la condition de résistance :**

$$|\sigma_{nom}| \leqslant R_{pe} \qquad 7{,}64 < 30$$

Dans la zone 1, le tirant convient.

ZONE 2 : SOLIDE RÉEL :

■ **Calculer la surface soumise à la traction :**

$$d_3 = d - 1{,}2268\,p \ ; \ p = 1{,}5 \quad (p = \text{pas})^*$$

$$d_3 = 8{,}15 \text{ mm} \ ; \ S_1 = \frac{\pi \times 8{,}15^2}{4} = 52{,}3 \text{ mm}^2$$

■ **Calculer la contrainte nominale dans la zone 2 :**

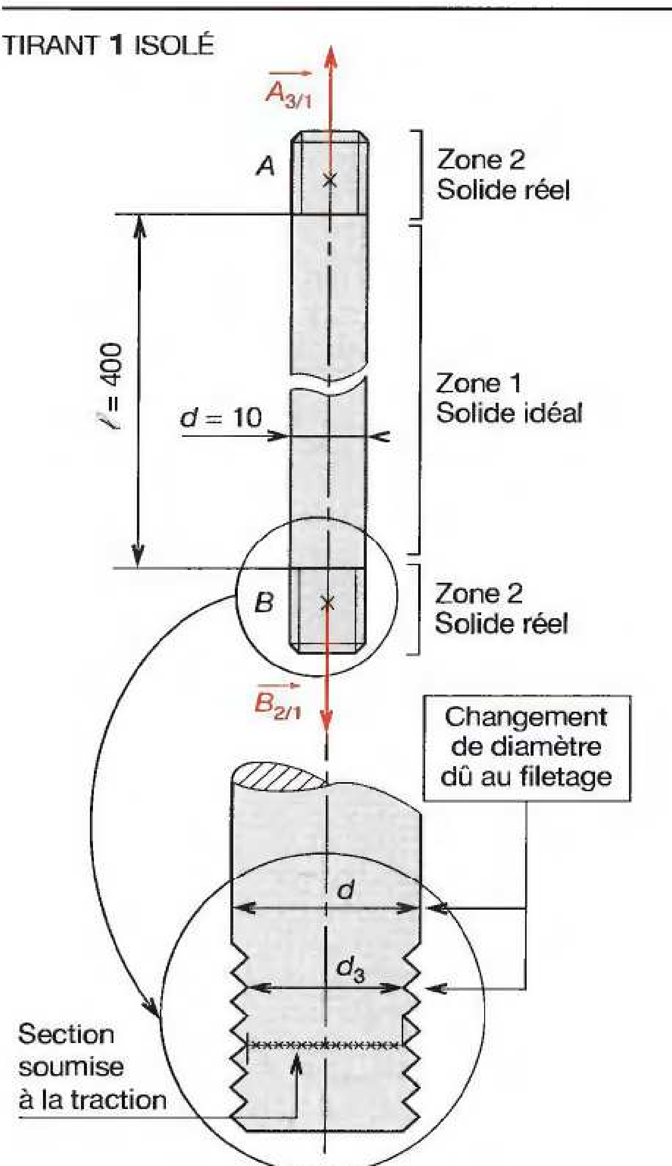
$$|\sigma_{nom}| = \frac{600}{52{,}3} = 11{,}47 \text{ MPa}.$$

La concentration de contrainte au fond du filet est : $K_t \approx 2{,}5$ (voir § 48.7).

■ **Calculer :** $|\sigma|_{max} = K_t \cdot |\sigma_{nom}|$

$$|\sigma|_{max} = 2{,}5 \times 11{,}47$$

$$|\sigma|_{max} = 28{,}68 \text{ MPa}.$$



* Voir G.D. § 30.31.

■ **Écrire la condition de résistance :**

$$|\sigma|_{max} \leqslant R_{pe} \quad 28{,}8 < 30 .$$

Dans la zone 2, le tirant convient.

2° Calcul de vérification à la déformation :

Allongement d'après § 48.42 : $|\Delta\ell| = \dfrac{|N| \cdot \ell_0}{E \cdot S_0}$.

$$|\Delta\ell| = \frac{600 \times 400}{2 \times 10^5 \times 78{,}65} = 0{,}015 ; 0{,}015 < 0{,}5 : \text{acceptable.}$$

48■92 Enveloppe cylindrique mince

Les vérins d'une presse hydraulique, par exemple, sont alimentés par de l'huile sous pression, circulant dans des canalisations, ce qui provoque des contraintes en leur sein.

PROBLÈME :

1° Établir la relation donnant la valeur de σ_x en fonction de : p_{eff}, d, e (voir fig. 2).

2° Déterminer la valeur : e du tube pour qu'il résiste en toute sécurité à la pression effective.

On donne $p_{eff} = 15$ MPa*, $d = 10$ mm, $s = 5$, $R_e = 280$ MPa.*

RÉPONSE :

1° Le demi-tube (I) isolé est en équilibre sous l'action :

■ De la résultante $\vec{R}$ des $d\vec{f_i}$ dues à la pression :

$$\boldsymbol{R = p_{eff} \cdot L \cdot d}$$

p_{eff} : pression effective (MPa) avec $p_{eff} = p_i - p_{atm}$.
p_i : pression intérieure du tube (MPa).
p_{atm} : pression atmosphérique s'exerçant sur le tube (MPa).
L : longueur du demi-tube isolé (mm).
d : diamètre du tube (mm).

■ Des forces de cohésion dans la section diamétrale (S_1) dont la résultante en G est normale à (S_1).

$$\boldsymbol{N = \sum_{(S_1)} \sigma_x \cdot ds}$$

Avec $\vec{N} + \vec{R} = \vec{0}$; sur $(O, \vec{x})$ $\sum_{(S1)} \sigma_x \cdot ds - p_{eff} \cdot L \cdot d = 0$

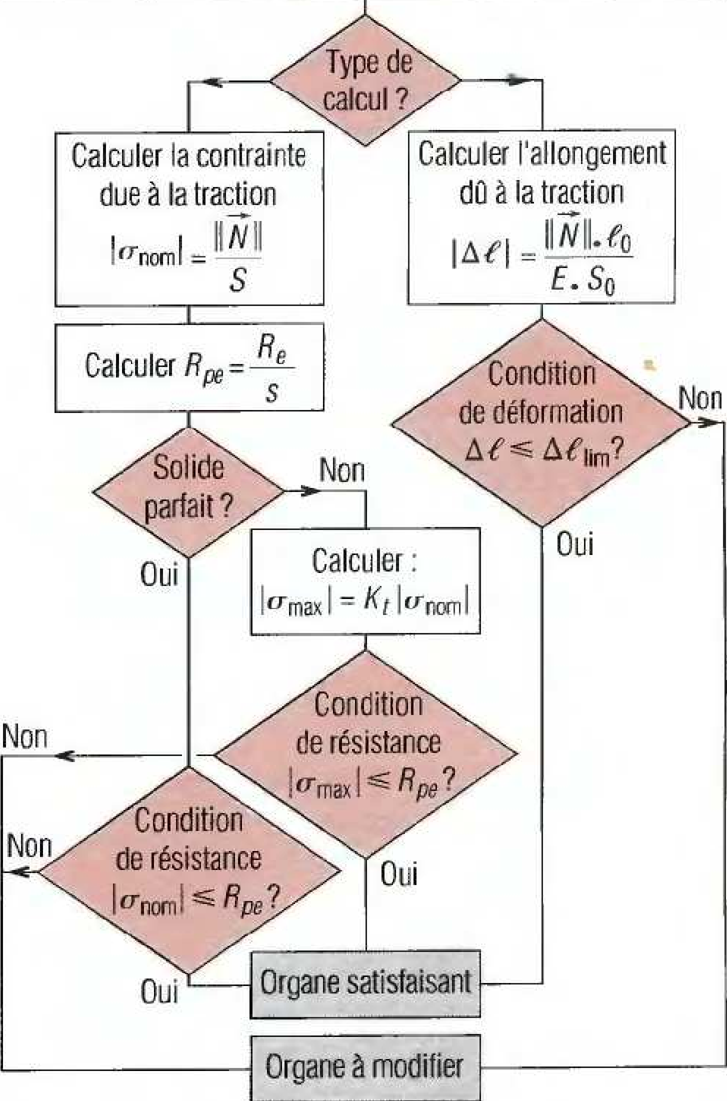
$\sigma_x = $ Cte d'où : $\sigma_x \sum_{(S1)} ds - p_{eff} \cdot L \cdot d = 0$

$\sum_{(S1)} ds = 2 \cdot e \cdot L \qquad \sigma_x \cdot 2e \cdot L - p_{eff} \cdot L \cdot d = 0$.

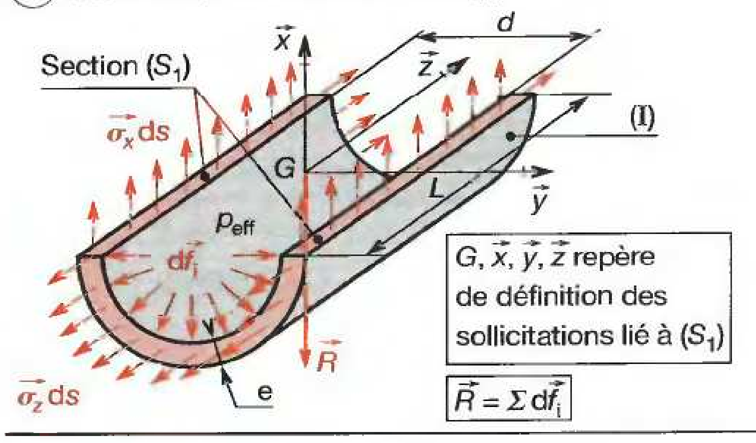
La valeur de la contrainte est :

$$\boldsymbol{\sigma_x = p_{eff} \cdot \frac{d}{2e}}$$

σ_x : contrainte normale selon $(G, \vec{x})$ (MPa).
e : épaisseur du tube (mm).
d : diamètre du tube (mm).
p_{eff} : pression effective (MPa).







* 1 MPa = 1 N/mm² = 10 bars. ** Voir § 49.8 pour la méthode de détermination.

On démontre aussi que:

$$|\sigma_Z| = p_{\text{eff}} \cdot \frac{d}{4e}$$

On constate que σ_x est le double de σ_Z, nous ne calculerons par la suite que σ_x.

2° Calculer l'épaisseur du tube :

- **Calculer la contrainte déterminante :**

$$\sigma_x = p_{\text{eff}} \cdot \frac{d}{2e} \; ; \; \sigma_x = \frac{15 \times 10}{2 \times e}$$

- **Calculer R_{pe} :**

$$R_{pe} = \frac{280}{5} = 56 \text{ MPa}$$

- **Écrire la condition de résistance** pour un solide parfait : (zone éloignée des extrémités du tube et de ses liaisons avec les solides voisins. Coefficient d'assemblage égal à 1).

$$\sigma_x \leqslant R_{pe} \; ; \; \frac{15 \times 10}{2 \times e} \leqslant 56$$

d'où : $e \geqslant \dfrac{15 \times 10}{2 \times 56}$; $e \geqslant 1{,}33$ mm

On adopte : ***e* : 1,5 mm.**

- **Vérifier les hypothèses de modélisation :**

Une enveloppe est considérée comme étant mince si la condition : $\frac{d}{e} > 20$ est respectée.

Calculer : $r = \frac{d}{e}$; $r = \frac{10}{1{,}5} = 6{,}6$. Condition non vérifiée. C'est une enveloppe épaisse.

Pour un calcul plus précis, il faut changer la modélisation géométrique. Pour les enveloppes épaisses :

$$p_{\text{eff}} \cdot \frac{D_i^2 + D_e^2}{D_e^2 - D_i^2} \leqslant R_{pe} \quad \text{avec} \quad \frac{D_i}{e} < 20$$

D_i : diamètre intérieur de l'enveloppe (mm).
D_e : diamètre extérieur de l'enveloppe (mm).
p_{eff} : pression effective dans l'enveloppe (MPa).
R_{pe} : résistance pratique à l'extension du matériau (MPa).

48 ■ 93 Enveloppe sphérique mince

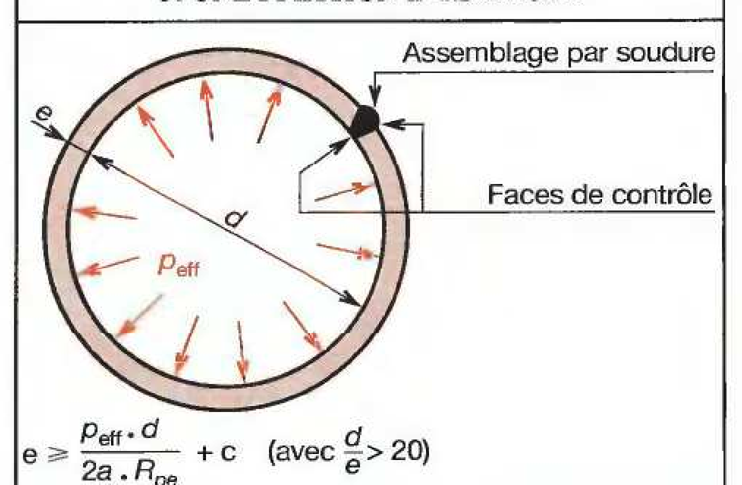
De la même façon, la résultante $\vec{R}$ des forces de pression est :

$$\|\vec{R}\| = p_{\text{eff}} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

L'épaisseur : *e* pour une enveloppe sphérique réelle est :

$$e \geqslant \frac{p_{\text{eff}} \cdot d}{4a \cdot R_{pe}} + c \qquad \text{(voir tableau)}$$

ENVELOPPES MINCES RÉELLES SOUMISES À UNE PRESSION INTÉRIEURE

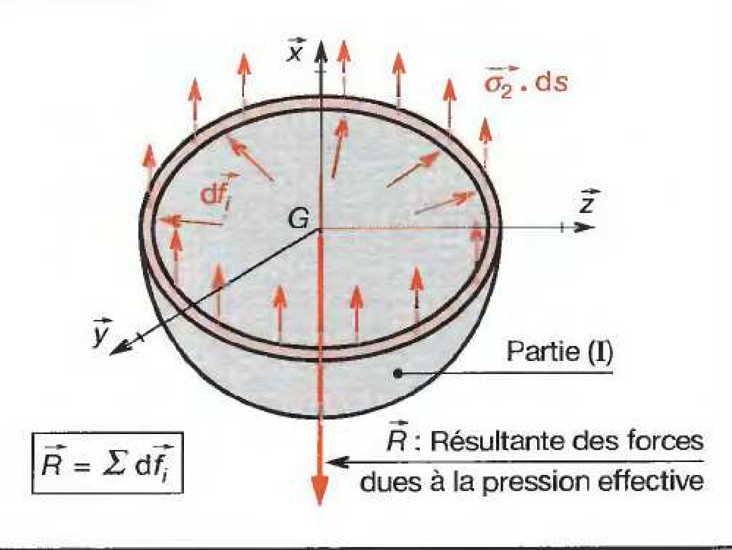


$$e \geqslant \frac{p_{\text{eff}} \cdot d}{2a \cdot R_{pe}} + c \quad \left(\text{avec } \frac{d}{e} > 20\right)$$

c : surépaisseur de corrosion et d'irrégularité (1 à 3 mm)
a : coefficient d'assemblage lié à la solution technologique

Valeurs du coefficient d'assemblage : *a*	
0,39	Soudure non contrôlable à l'envers. Rivetage sur un seul rang.
0,6	Soudure contrôlable sur les deux faces pendant l'exécution. Rivetage sur deux rangs.
0,75	Soudure contrôlable sur les deux faces après exécution.
0,84	Rivetage avec trois épaisseurs de tôle et quatre rangées de rivets.
0,9	Soudure contrôlée aux rayons X et recuit.
1	Réservoir, tube, sans joint.

ISOLEMENT D'UNE PARTIE (I) D'UNE ENVELOPPE SPHÉRIQUE



48.10 Les composites

Ce sont des solides réels car les matériaux qui les composent ne sont ni homogènes, ni isotropes (leur résistance et leur déformation varient selon la direction des efforts) (voir fig. 2).

Ils sont constitués de deux éléments* (voir fig. 1).

- Le renfort (généralement des fibres) qui supportent l'essentiel des efforts.
- La matrice qui assure le lien entre les fibres.

Les matériaux composites unidirectionnels sont caractérisés par des fibres disposées parallèlement les unes par rapport aux autres. La résistance à la traction est maximum lorsque la direction des efforts est selon celles des fibres. Dans ce cas, en supposant que l'adhésion fibre-matrice est bonne, l'allongement unitaire de chaque composant est identique. La charge appliquée est partagée entre les fibres et la matrice. La contrainte σ_c (en MPa) sur la composite est :

$$\sigma_c = \sigma_f . V_f + \sigma_m (1 - V_f)$$

σ_f : contrainte dans les fibres (MPa).
V_f : taux de volume en fibres (en %).
σ_m : contrainte dans la matrice (MPa).

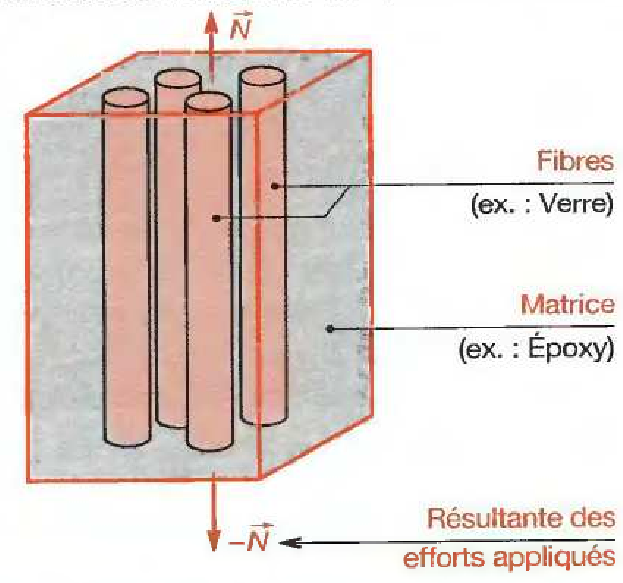
Le module d'Young E_c (MPa) est donné par la relation :

$$E_c = E_f . V_f + E_m (1 - V_f)$$

E_f : module d'Young des fibres (MPa).
V_f : taux de volume en fibres (en %).
E_m : module d'Young de la matrice (MPa).

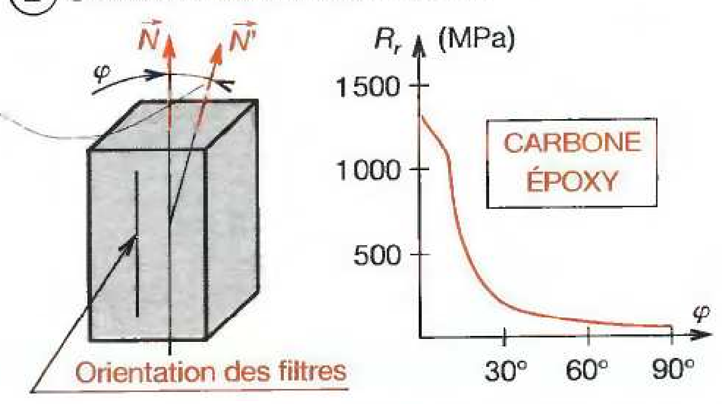
REMARQUE :
Si la charge est appliquée obliquement par rapport aux fibres, la résistance chute rapidement.

1 COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL À FIBRES LONGUES



Exemples de taux de volume en fibres : V_f	
Verre - Époxy	60 %
Verre - Polyamide 6 - 6	30 %

2 ORIENTATION CHARGE - FIBRE



CARACTÉRISTIQUES COMPARÉES DES ACIERS, ALLIAGES ET COMPOSITES

Nature	R_r (MPa)	E (MPa)	A (%)	T Limite (°C)	V_f (%)	Nature	R_r (MPa)	E (MPa)	A (%)	T Limite (°C)	V_f (%)
Acier 35 Cr Mo 4	1 000	200 000	11	600	–	Aluminium AU4G	400	72 000	6 à 10	200	–
Polyamide 6-6	49	2 000		80	–	SiC-Aluminium	700	105 000	0,65	400	35
Verre-Polyamide	160	10 000	1,5	120	30	Bore-Titane (TA6V)	1 000	250 000	0,4	650	40
Verre-Époxy	2 000	53 000	3,5	160	60	Carbone-Carbone	50-180	20 000	3,3	2 500	30
Kevlar-Époxy	1 600	75 000	2	160	60	Al2 03-Verre (Pyrex)	220	150 000	0,2	550	30

Avec : R_r : résistance min à la rupture - E : module d'Young - A : allongement en % - T : température limite.

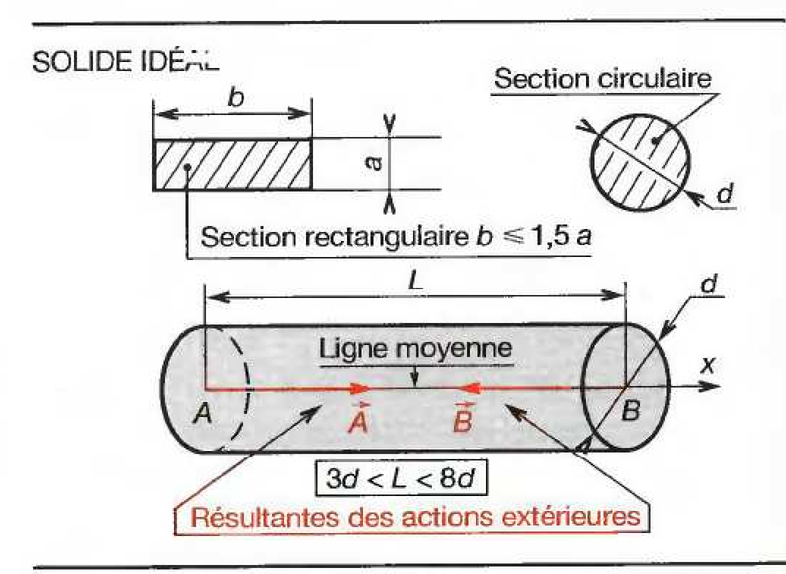
* Voir G.D. chapitre 58 pour compléments d'information.

49 Compression simple

49 ▪ 1 Hypothèses

Le solide est idéal : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne et de section constante, de forme voisine du carré ($b \leqslant 1{,}5\ a$). Les sections circulaires conviennent parfaitement. La longueur L doit être comprise entre 3 et 8 fois la dimension transversale la plus faible pour **éviter le risque de flambage**.

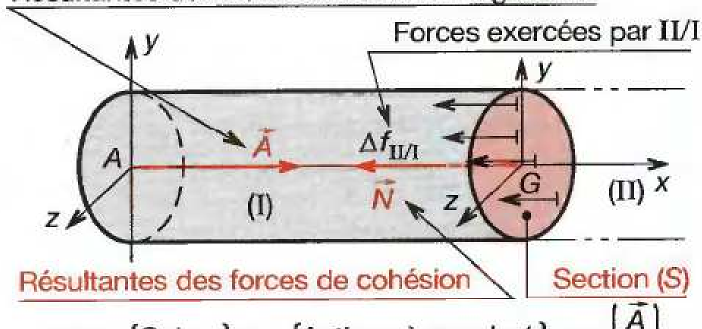
Les actions extérieures dans les sections extrêmes sont modélisables par deux résultantes $\vec{A}$ et $\vec{B}$, appliquées aux barycentres de ces sections, dirigées selon la ligne moyenne, vers l'intérieur de la poutre.



49 ▪ 2 Définition

Une poutre est sollicitée à la compression si, le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en G, barycentre de la section droite (S), à une **résultante perpendiculaire** à (S) dirigée vers l'intérieur de la matière, telle que :

$$_G\{\mathrm{Coh}_{II/I}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{N}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \quad \text{Dans } \mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : \begin{matrix} N \neq 0\ ;\ T_y = 0\ ;\ T_z = 0 \\ (N < 0) \\ Mt = 0\ ;\ Mf_{Gy} = 0\ ;\ Mf_{Gz} = 0 \end{matrix}$$



avec : $_G\{\mathrm{Coh}_{II/I}\} = -_G\{\text{Actions à gauche}/_I\} = -_G\left\{\begin{matrix}\vec{A}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$

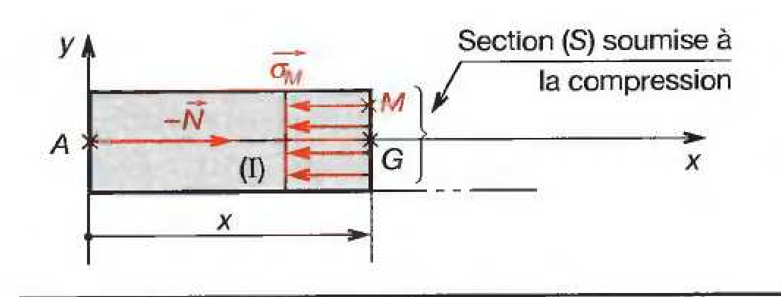
$\vec{N} = -\vec{A}$; $\vec{M}_G = \vec{0}$

49 ▪ 3 Contraintes dans une section droite

Elles sont normales à (S) et uniformément réparties dans cette dernière. La contrainte σ_M (MPa)* a pour valeur :

$$\sigma_M = \frac{N}{S} \qquad \text{avec } N < 0\ ;\ \sigma_M < 0$$

N : effort normal (N).
S : section droite soumise à la compression (mm²).

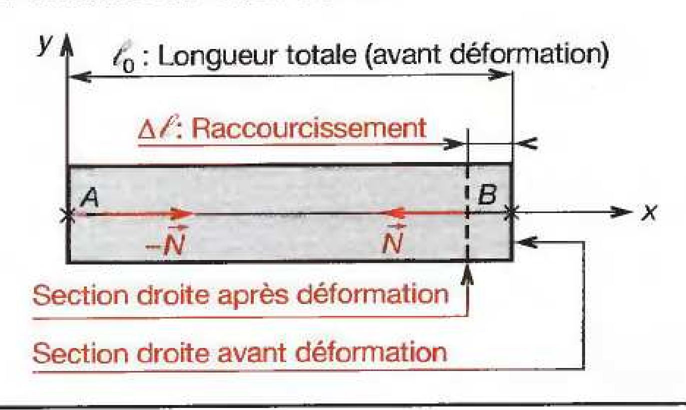


49 ▪ 4 Déformation d'une poutre

Dans le domaine élastique, les contraintes et les déformations sont proportionnelles**. Le raccourcissement $\Delta\ell$ (mm) est :

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell_0}{E \cdot S}\ ;\ N < 0 \quad \Delta\ell < 0$$

N : effort normal (N).
ℓ_0 : longueur initiale de la poutre (mm).
S : section droite soumise à la compression (mm²).
E : module d'élasticité longitudinal (module d'Young) (MPa).***



* 1 MPa = 1 N/mm². ** Voir loi de Hooke § 48.421. *** Voir valeurs de E § 48.43.

49 ▪ 5 Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale doit rester inférieure à la résistance pratique à la compression R_{pc}.
On définit R_{pc} par le rapport suivant :

$$R_{pc} = \frac{R_{ec}}{s}$$

R_{ec} : résistance élastique à la compression (MPa).
s : coefficient de sécurité (sans unité).

La condition de résistance est :

$$|\sigma| \leqslant R_{pc} \qquad \frac{|N|}{S} \leqslant R_{pc}$$

- Les aciers doux et mi-durs ont la même résistance élastique R_e en traction et en compression.*
- Le béton et la fonte ont des résistances élastiques très différentes en traction et en compression, ainsi que tous les matériaux non homogènes et non isotropes.
- Si le poids de la poutre verticale n'est pas négligeable (câbles d'ascenseurs de grands immeubles, piles de ponts, cheminées d'usine…), la condition de résistance est :

$$\frac{|N|}{S} + \frac{|P|}{S} \leqslant R_{pc}$$

P : poids total de la poutre (N).

49 ▪ 6 Solides réels

Ce sont des solides qui s'écartent des conditions idéales.

SECTIONS BRUSQUEMENT VARIABLES :
La section est de forme proche du carré ou du cercle, comme en traction, dans les zones de changement de section, la répartition des contraintes n'est plus uniforme. Cette **concentration de contrainte est peu dangereuse en compression** ; elle est, en général, négligée.

SECTIONS TRÈS PLATES :
Dans le cas d'une poutre plate (par exemple $b = 10\,a$), si $3b < L < 8b$, on a : $30a < L < 80a$. Sous l'action de $\vec{N}$, la poutre fléchit selon RMS, **la sollicitation de flambage** remplace la compression simple**.

SOLIDES TRÈS MINCES :
Si h devient très petite, on n'obtient plus de déformation significative. Tout se passe comme si on maintenait la pièce latéralement par des parois solides. La sollicitation de compression est remplacée par du **matage**.***

RÉSISTANCE ÉLASTIQUE DU BÉTON

Les valeurs ci-dessous sont fonction des dosages en kg de ciment par m³ de béton en place après 28 jours d'âge.

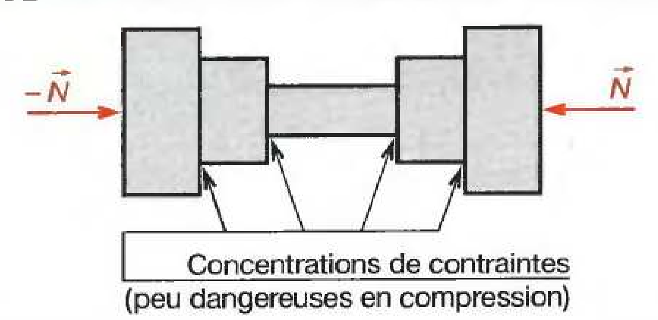
Dosage (kg/m³)	Bétons non contrôlés		Bétons contrôlés	
	Compression (en MPa)	Traction (en MPa)	Compression (en MPa)	Traction (en MPa)
250	15	1,5	18	1,8
400	25	2	30	2,4

RÉSISTANCES ÉLASTIQUES DE LA FONTE

Nuance	À la compression (MPa)	À la traction (MPa)
FLG 150	150	20
Ft 15	150	20

Poutres verticales	Poids négligé	Poids propre P non négligé
Contrainte	$\lvert\sigma\rvert = \frac{\lvert N\rvert}{S}$	$\lvert\sigma\rvert = \frac{\lvert N\rvert}{S} + \frac{\lvert P\rvert}{S}$
Déformation (si S est constant)	$\lvert\Delta\ell\rvert = \frac{\lvert N\rvert \cdot \ell_0}{E \cdot S}$	$\lvert\Delta\ell\rvert = \frac{\lvert N\rvert \cdot \ell_0}{E \cdot S} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lvert P\rvert \cdot \ell_0}{E \cdot S}$

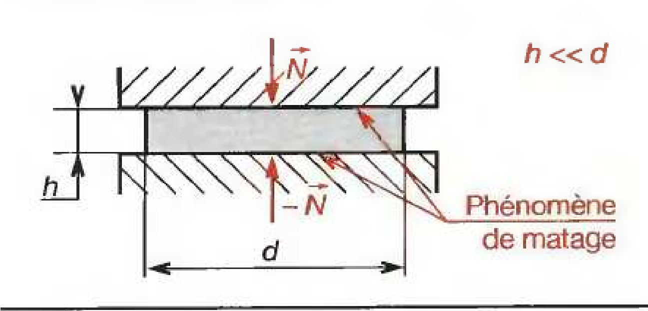
SOLIDES DE SECTIONS BRUSQUEMENT VARIABLES



PIÈCES LONGUES

a
b
$-\vec{N}$
$\vec{N}$
R
S
M
Phénomène de flambage

PIÈCES TRÈS COURTES



* Voir valeurs de R_e pour différents matériaux § 48.43 et G.D. chapitre 56.

** Voir § 55.5.

*** Voir chapitre 47.

49■8 Méthodes de calculs en traction-compression

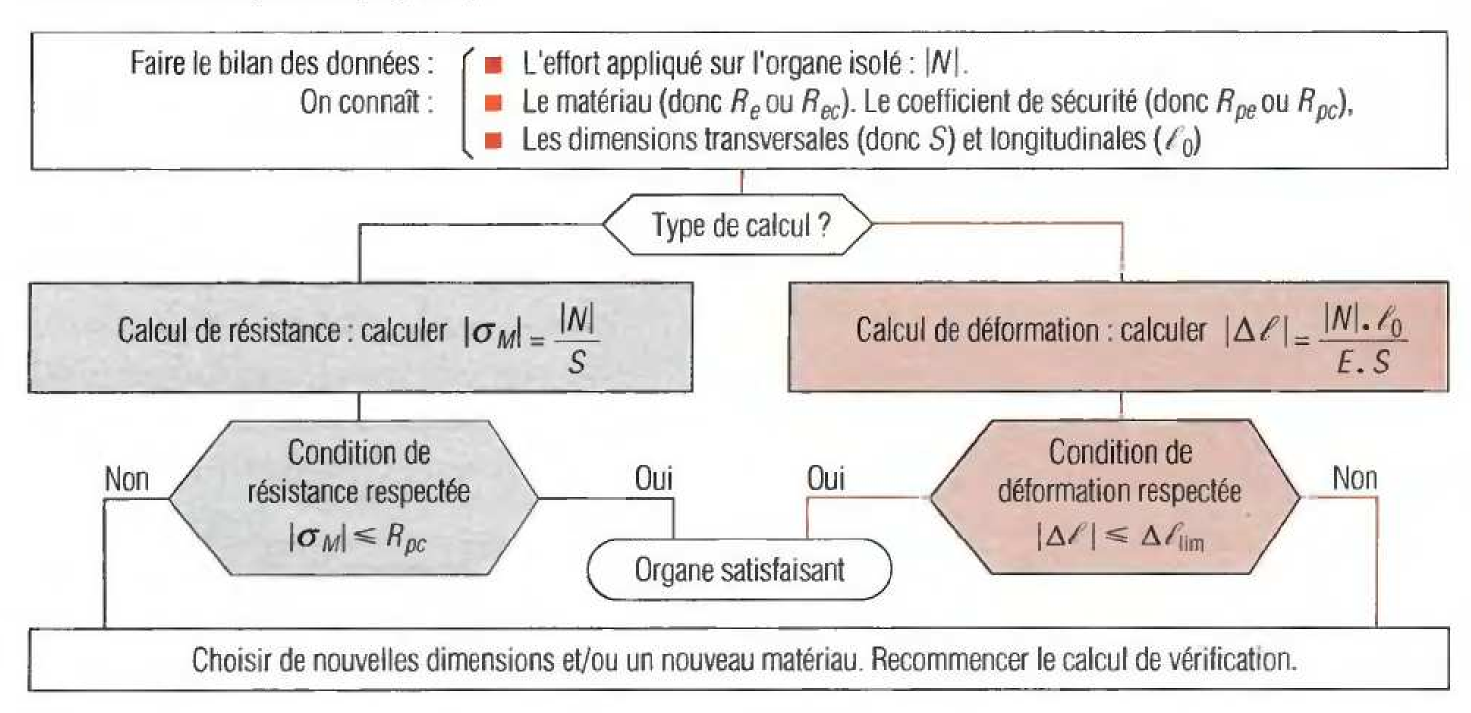
Il existe deux méthodes de calculs en traction ou compression.

■ **Le calcul de vérification** : les efforts sont connus, l'organe est déterminé (dimensions, matériaux connus) et on vérifie s'il convient. Si cela n'est pas le cas, on calcule de nouvelles dimensions, et/ou on change de matériau.

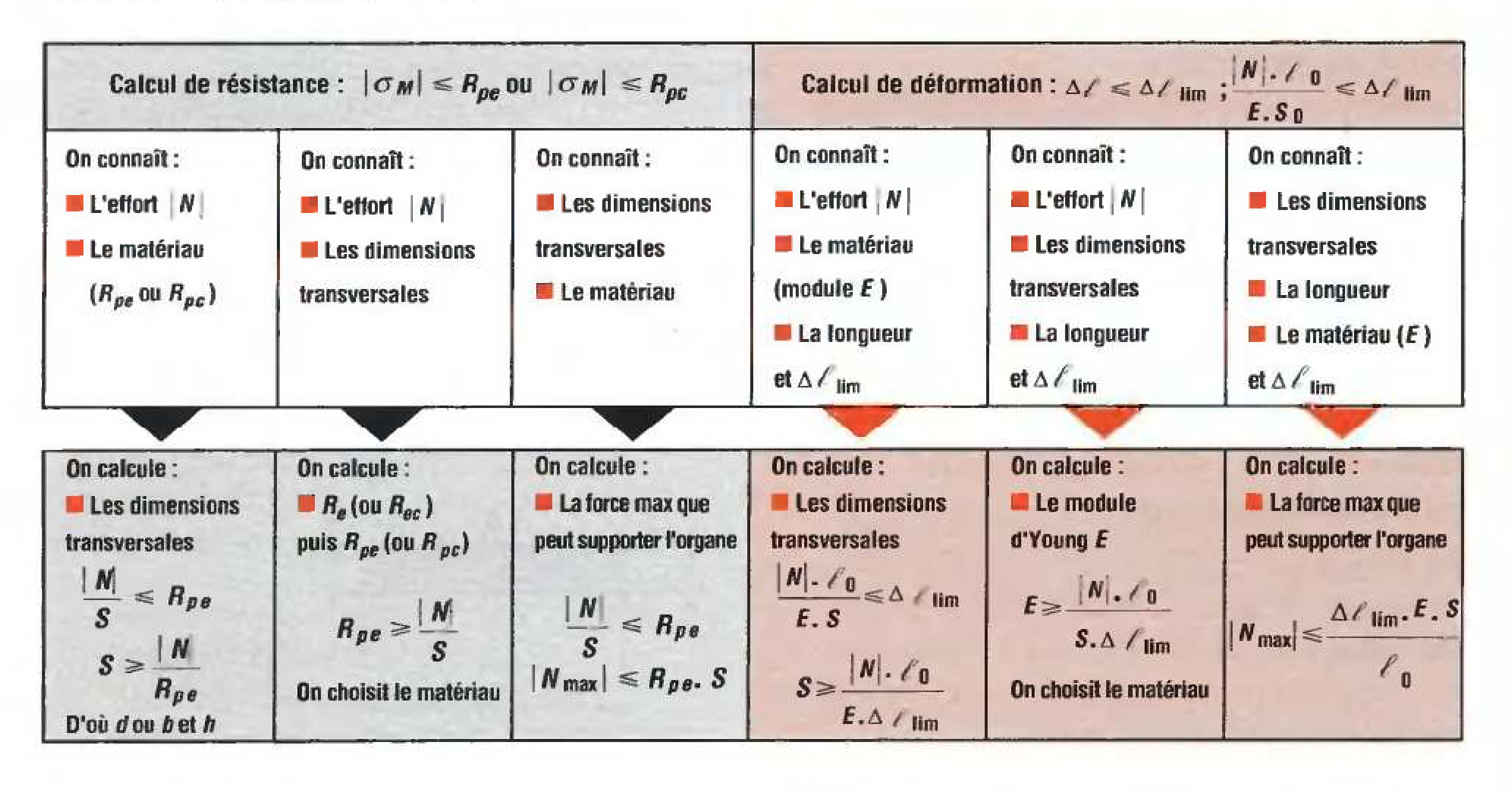
■ **Le calcul de détermination** : les efforts sont connus (par exemple), le matériau est déterminé et on calcule les dimensions.

Dans les deux cas, on peut faire soit un **calcul de résistance** (contraintes déterminantes), soit un **calcul de déformation** (déformations déterminantes) soit les deux types de calcul.

CALCUL DE VÉRIFICATION (voir exemple § 48.91) :



CALCUL DE DÉTERMINATION (voir exemple § 48.92) :



Calcul de résistance : $|\sigma_M| \leq R_{pe}$ ou $|\sigma_M| \leq R_{pc}$			Calcul de déformation : $\Delta\ell \leq \Delta\ell_{lim}$; $\frac{|N| \cdot \ell_0}{E \cdot S_0} \leq \Delta\ell_{lim}$		
On connaît : ■ L'effort $|N|$ ■ Le matériau (R_{pe} ou R_{pc})	On connaît : ■ L'effort $|N|$ ■ Les dimensions transversales	On connaît : ■ Les dimensions transversales ■ Le matériau	On connaît : ■ L'effort $|N|$ ■ Le matériau (module E) ■ La longueur et $\Delta\ell_{lim}$	On connaît : ■ L'effort $|N|$ ■ Les dimensions transversales ■ La longueur et $\Delta\ell_{lim}$	On connaît : ■ Les dimensions transversales ■ La longueur ■ Le matériau (E) et $\Delta\ell_{lim}$
On calcule : ■ Les dimensions transversales $\frac{|N|}{S} \leq R_{pe}$ $S \geq \frac{|N|}{R_{pe}}$ D'où d ou b et h	On calcule : ■ R_e (ou R_{ec}) puis R_{pe} (ou R_{pc}) $R_{pe} \geq \frac{|N|}{S}$ On choisit le matériau	On calcule : ■ La force max que peut supporter l'organe $\frac{|N|}{S} \leq R_{pe}$ $|N_{max}| \leq R_{pe} \cdot S$	On calcule : ■ Les dimensions transversales $\frac{|N| \cdot \ell_0}{E \cdot S} \leq \Delta\ell_{lim}$ $S \geq \frac{|N| \cdot \ell_0}{E \cdot \Delta\ell_{lim}}$	On calcule : ■ Le module d'Young E $E \geq \frac{|N| \cdot \ell_0}{S \cdot \Delta\ell_{lim}}$ On choisit le matériau	On calcule : ■ La force max que peut supporter l'organe $|N_{max}| \leq \frac{\Delta\ell_{lim} \cdot E \cdot S}{\ell_0}$

50 Cisaillement simple

50.1 Hypothèses

Le solide est idéal : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne de section constante, avec plan (π) de symétrie vertical.

Les actions extérieures sont modélisables en A et B, situés dans (π), par deux résultantes verticales $\vec{A}$ et $\vec{B}$, directement opposées, situées dans le plan de cisaillement (P) perpendiculaire à la ligne moyenne.

$$\{A_{1/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ \vec{0}\end{Bmatrix};\quad \{B_{1/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{B}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

50.2 Définition

Une poutre est sollicitée au cisaillement si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en G, barycentre de la section droite (S), à une **résultante située dans le plan (S)**, telle que :

$${}_G\{\mathrm{Coh}_{II/I}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{T}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} \text{ Dans } \mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : \quad N = 0 ;\ T_y \neq 0 ;\ T_z \neq 0 ;\quad Mt = 0 ;\ Mf_{Gy} = 0 ;\ Mf_{Gz} = 0$$

REMARQUES :

- ${}_G\{\mathrm{Coh}_{II/I}\} = -{}_G\{\text{Actions ext. à gauche}/_{I}\} = -{}_G\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$ $\vec{T} = -\vec{A}$

  $= +{}_G\{\text{Actions ext. à droite}/_{II}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{B}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$ $\vec{M}_G = \vec{0}$

- Dans la réalité, $\vec{A}$ s'exerce à une distance Δx, très petite, du plan (P) dans lequel se situe $\vec{B}$ et un faible moment de flexion, selon $(G, \vec{z})$, apparaît (majorer le coefficient de sécurité). Algébriquement : $Mf_{Gz} = -\|\vec{A}\| \cdot \Delta x$.

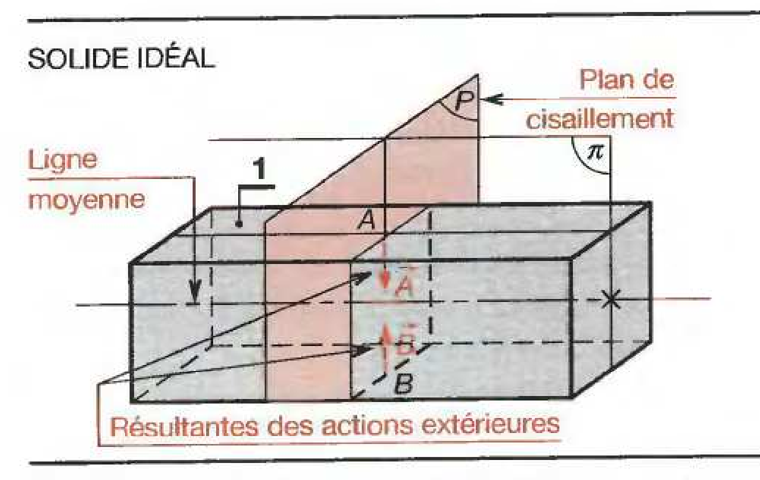
50.3 Contraintes dans une section droite

Les contraintes tangentielles $\vec{\tau}_M$ sont sensiblement uniformément réparties dans une section droite. On définit une contrainte moyenne τ_{moy} égale à τ_M supposée uniformément répartie :

$$\tau_{moy} = \frac{T}{S}$$

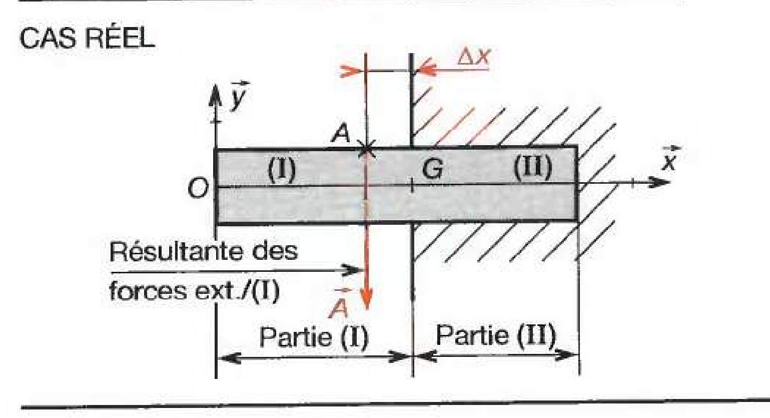
τ_{moy} : contrainte tangentielle moyenne (MPa)*.
T : effort tangentiel (ou tranchant) (N).
S : section droite soumise au cisaillement (mm²).

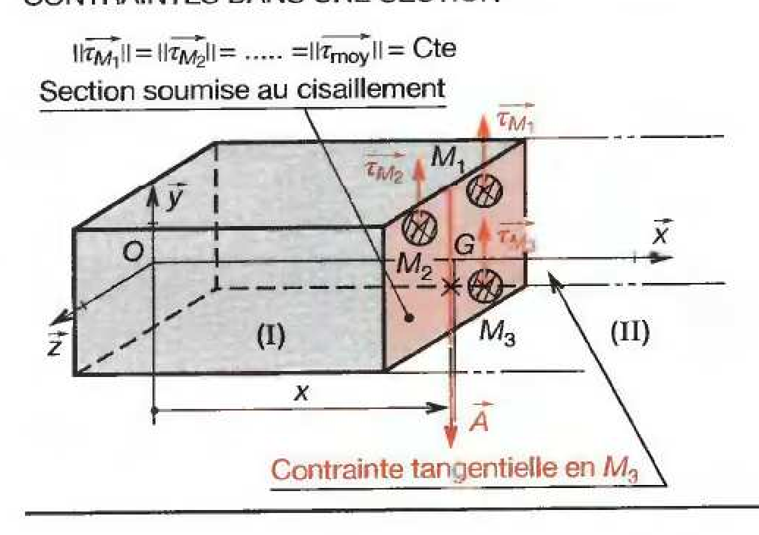
* 1 MPa = 1 N/mm².



ISOLEMENT D'UNE PARTIE GAUCHE (I)

Résultante des forces de cohésion (II)/(I)
Section de la coupure (S)
A
G
$\Delta \vec{f}_{II/I}$
O
(I)
(II)
x
Résultante des forces "à gauche"/(I)



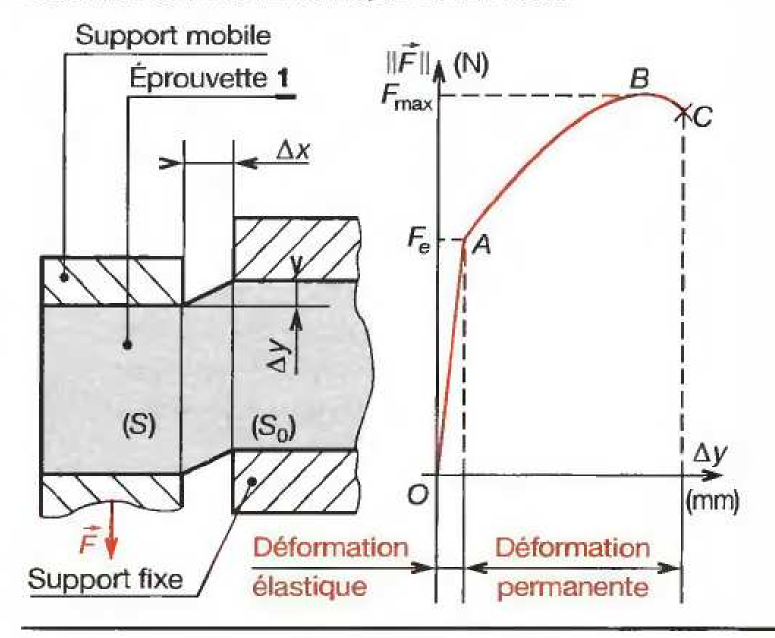


50.4 Étude des déformations

50.41 Essai de cisaillement

L'essai de cisaillement fait apparaître, comme pour la traction, deux zones :

- La zone *OA* de **déformation élastique** ou domaine élastique (la charge $\vec{F}$ est proportionnelle au glissement transversal Δy des sections droites S/S_0) ;
- La zone *ABC* de **déformation permanente**, ou domaine plastique.



50.42 Déformation d'une poutre dans le domaine élastique

On définit le **glissement relatif** γ par le rapport :

$$\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δy : glissement transversal entre deux sections (S) et (S_0) (mm).
Δx : distance entre deux sections (S) et (S_0) (mm).

La loi de Hooke établit la proportionnalité entre les contraintes tangentielles et le glissement relatif :

$$\tau_{moy} = G \cdot \gamma$$

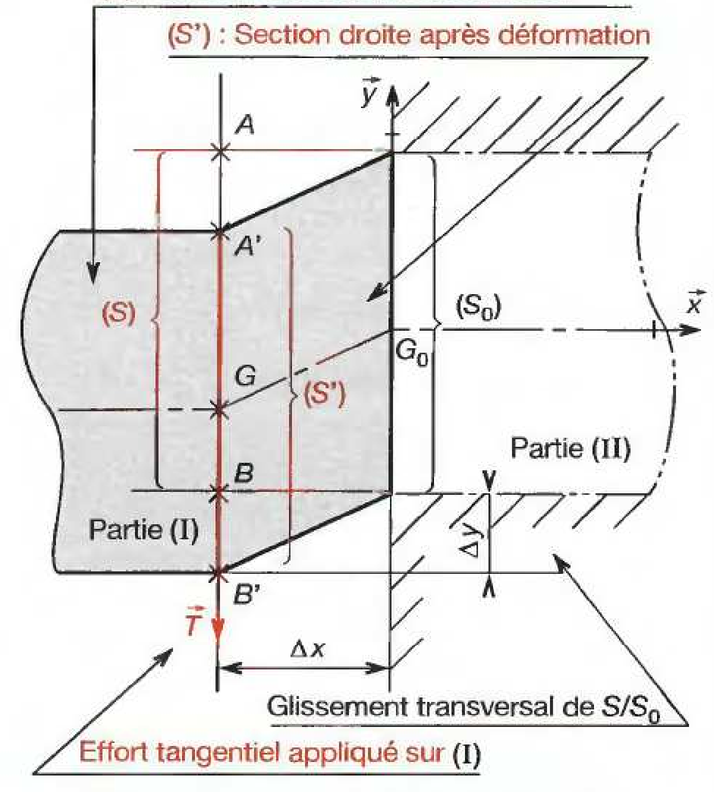
τ_{moy}*: contrainte tangentielle moyenne (MPa)**.
G : module d'élasticité transversal (de Coulomb) (MPa).
γ : glissement relatif (sans unité).

On peut écrire aussi :

$$\frac{T}{S} = G \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

T : force tangentielle (N).
S : aire de la section soumise au cisaillement (mm^2).
G : module d'élasticité transversal (de Coulomb) (MPa).
Δy : glissement transversal entre (S) et (S_0) (mm).
Δx : distance entre (S) et (S_0) (mm).

G, au même titre que *E*, est une constante caractéristique du matériau, déterminée par essais.



Matériau	Plexiglass	Verre	Alpax Duralumin	Laiton	Fontes	Bronzes	Aciers	Acier à ressort
Valeur de *G* en (MPa)	11 000	28 000	32 000	34 000	40 000	48 000	80 000	84 000

* Lire tau. ** 1 MPa = 1 N/mm^2.

50.5 Condition de résistance

Pour des **raisons de sécurité** et d'incertitude sur les hypothèses (le cisaillement pur n'existe pas), la contrainte tangentielle doit rester inférieure à la résistance pratique au cisaillement (ou au glissement).

On définit **la résistance pratique au glissement** par le quotient de la résistance élastique par le coefficient de sécurité s (voir valeurs au § 48.5).

$$R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

R_{pg}: résistance pratique au glissement (MPa).
R_{eg}: résistance élastique au glissement (MPa).
s : coefficient de sécurité (sans unité).

La condition de résistance s'écrit :

$$|\tau_{moy}| \leqslant R_{pg} \quad \text{ou} \quad \frac{|T|}{S} \leqslant R_{pg}$$

RELATION ENTRE LA RÉSISTANCE ÉLASTIQUE À LA TRACTION (R_e) ET LA RÉSISTANCE ÉLASTIQUE AU CISAILLEMENT OU GLISSEMENT (R_{eg})

Matériaux	Relation $R_{eg} = f(R_e)$
Acier doux ($R_e \leqslant 270$ MPa) Alliages d'aluminium	$R_{eg} = 0{,}5\ R_e$
Aciers mi-durs ($320 \leqslant R_e \leqslant 500$ MPa)	$R_{eg} = 0{,}7\ R_e$
Aciers durs ($R_e \geqslant 600$ MPa) Fontes	$R_{eg} = 0{,}8\ R_e$
Relation générale $R_{eg} = f(R_e)$	
$R_{eg} = \frac{k_0}{1+k_0} \cdot R_e$; $k_0 = \frac{R_e}{R_{ec}}$ R_{ec} : résistance élastique à la compression	

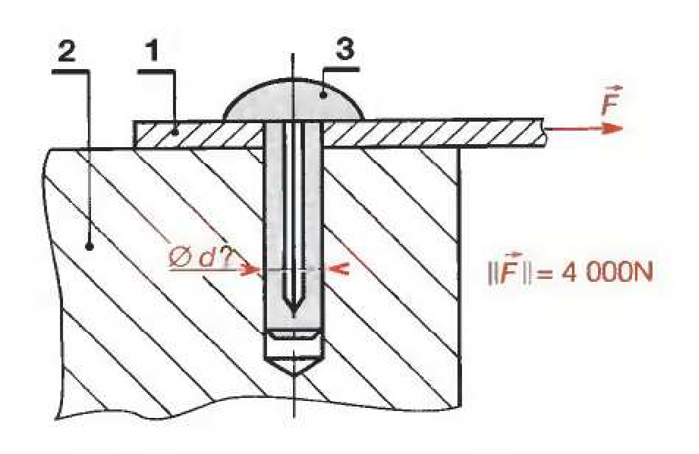
50.6 Exemples de calculs

50.61 Détermination du diamètre d'un clou cannelé CTR 1

Une tôle **1** est fixée au support **2** par un clou cannelé **3**. La force $\vec{F}$ exercée sur la tôle est de 4 000 N, dans un plan parallèle à ses faces. La résistance pratique au glissement du clou cannelé est $R_{pg} = 50$ MPa.

Calculer le diamètre du clou cannelé.

ASSEMBLAGE PAR CLOU CANNELÉ



1° Modéliser les efforts et rechercher la sollicitation :

L'isolement du clou montre qu'il est soumis à 2 forces opposées perpendiculaires à la ligne moyenne. C'est du cisaillement.

2° Calculer la contrainte, écrire la condition de résistance :

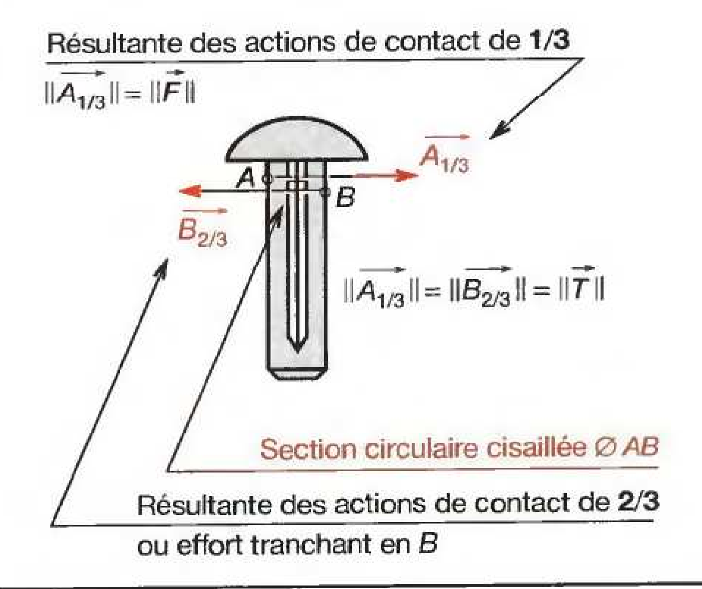
$$|\tau| = \frac{|T|}{\left(\pi \frac{d^2}{4}\right)} \ ;\ |\tau| \leqslant R_{pg} \ ;\ \frac{|T|}{\left(\pi \frac{d^2}{4}\right)} \leqslant R_{pg}$$

3° Calculer le diamètre minimal du clou :

$$d^2 \geqslant = \frac{4|T|}{\pi R_{pg}} \qquad d \geqslant \sqrt{\frac{4|T|}{\pi R_{pg}}}$$

d'où : $d \geqslant \sqrt{\frac{4 \times 4\,000}{\pi \times 50}}$ **$d \geqslant 10{,}09$ mm ; prendre $d = 12$ mm.**

ISOLEMENT DU CLOU CANNELÉ

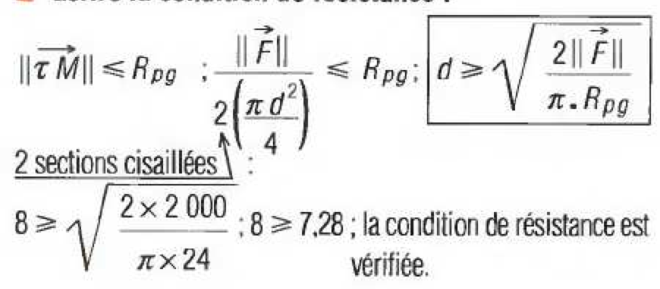


50■62 Vérification d'une goupille

La liaison en chape de **2/3** est réalisée par une goupille **1** de $d = 8$ mm de résistance pratique au cisaillement $R_{pg} = 24$ MPa. La charge appliquée est $\|\vec{F}\| = 2\,000$ N.
Vérifier si le diamètre de la goupille convient.

■ **Isoler la goupille 1** : elle est soumise à un **double cisaillement** (fig. 2) (deux sections cisaillées).

■ **Écrire la condition de résistance :**



$$\|\overrightarrow{\tau M}\| \leqslant R_{pg} \;;\; \frac{\|\vec{F}\|}{2\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} \leqslant R_{pg} ; \quad \boxed{d \geqslant \sqrt{\frac{2\|\vec{F}\|}{\pi . R_{pg}}}}$$

2 sections cisaillées :

$$8 \geqslant \sqrt{\frac{2 \times 2\,000}{\pi \times 24}} \;;\; 8 \geqslant 7{,}28$$; la condition de résistance est vérifiée.

50■63 Détermination d'une liaison collée

Déterminer la longueur minimale du cylindre de collage entre **1** et **2**, sachant que son diamètre est 20 mm, que la force $\vec{F}$ appliquée est 20 000 N et que la limite à la rupture au cisaillement de la colle est $R_{rg} = 15$ MPa*.

■ **Rechercher la sollicitation** : le film de colle est soumis à des forces opposées qui tendent à faire glisser les sections cylindriques les unes par rapport aux autres. C'est du cisaillement.

■ **Calculer la contrainte tangentielle** $\|\overrightarrow{\tau_{moy}}\|$.

$$\|\overrightarrow{\tau_{moy}}\| = \frac{\|\vec{T}\|}{S} = \frac{\|\vec{T}\|}{\pi . d . \ell_{lim}} \quad \text{avec } \|\vec{T}\| = \|\vec{F}\|$$

■ **Écrire la condition de résistance :**

$$\|\overrightarrow{\tau_{moy}}\| \leqslant R_{rg} \quad \text{d'où :} \quad \frac{\|\vec{T}\|}{\pi . d . \ell_{lim}} \leqslant R_{rg}$$

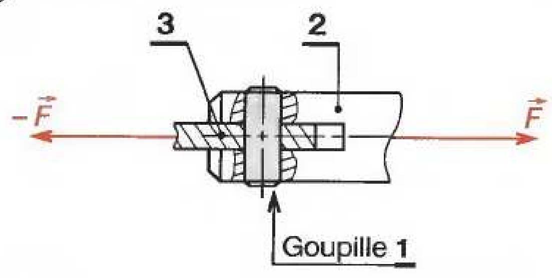
La longueur minimale de l'assemblage collé est :

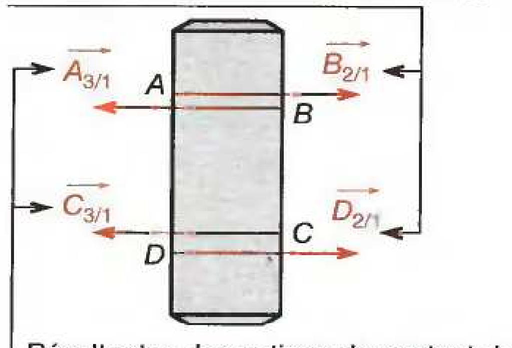
$$\boxed{\ell_{lim} = \frac{\|\vec{T}\|}{\pi . d . R_{rg}}}$$

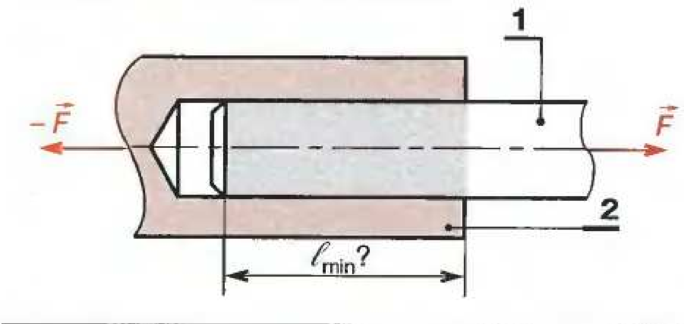
Application numérique :

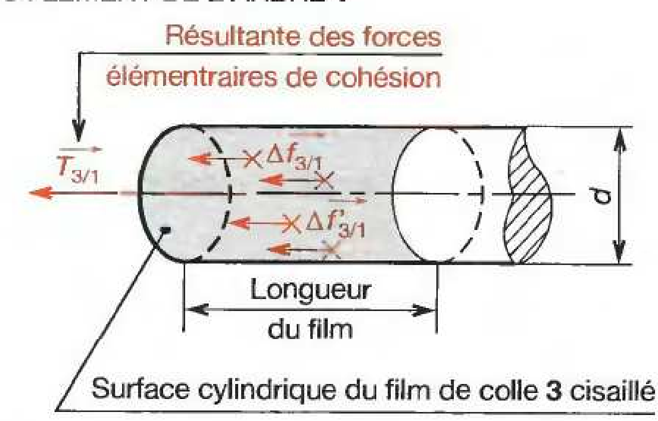
$$\ell_{min} \geqslant \frac{20\,000}{\pi \times 20 \times 15} \qquad \ell_{min} \geqslant \mathbf{21{,}2\ mm}$$











REMARQUE :

■ À la sollicitation de cisaillement viennent s'ajouter la **résistance au pelage**** qui sollicite les bords du joint de colle et la **résistance aux agents chimiques**. Il y a donc lieu de surdimensionner largement le résultat ci-dessus (ex. : le multiplier par 2).

■ Le **principe du calcul reste valable** si **1** et **2** sont liés par **brasage** et non par collage.

* 1 MPa = 1 N/mm². ** Voir G.D. chapitre 29.

APPLICATION 1 :

Détermination d'une liaison collée soumise à un couple.

La solution collée offre une alternative intéressante pour réaliser une liaison encastrement entre un pignon denté et son arbre : réduction du coût de fabrication et de montage.

Après polymérisation, la résine transmet le couple tout en assurant la démontabilité.

Toutefois, la température de fonctionnement doit rester inférieure à 150 °C.

DONNÉES :

Figure ci-contre. Couple à transmettre $C_t = 8$ N.m.

PROBLÈME :

Évaluer la faisabilité de cette solution.

RÉSOLUTION :

■ On calcule la contrainte d'utilisation par la relation :

$$\tau_W = \tau_{FT}.f_1.f_2.f_3.f_4.f_5$$

Chaque terme se relève ci-contre ; on obtient :

Résine 638 : $\tau_{FT} = 22$ à 40 MPa (effectuer deux calculs).
Matériau : $f_1 = 0{,}9$ (acier allié).
Jeu : $f_2 = 1$ (∅ 16 H8/f8 → jeu moyen = 0,043 mm).
Rugosité : $f_3 = 1$ (Ra = 1,6 μm).
Température : $f_4 = 0{,}8$ ($t = 70$ °C).
Forme : $f_5 = 0{,}9 \left(\frac{L}{D} = \frac{12}{16} = 0{,}75 \text{ et } D = 16 \text{ mm}\right)$.

On trouve $\tau_W = 14{,}2$ à 25,9 MPa.

■ Couple transmissible sans à coups :

$$C_0 = \tau_W.S.\frac{D}{2} \quad \text{avec} \quad S = \pi.D.L \text{ (surface collée).}$$

Comme $\tau_W = 14{,}2$ à 25,9 MPa, $D = 16$ mm, $L = 12$ mm ;
$C_0 = 68{,}5$ à 125 N.m.

NOTA :

Des charges dynamiques, fréquentes, conduisent à minorer ces valeurs en les ramenant, par expérience, à 33 % environ pour un couple et 12 % pour un arrachement.

On en déduit le couple dynamique transmissible :

$$C_{dyn\,min} = 22{,}8 \text{ N.m (sécurité } s = \frac{22{,}8}{8} = 2{,}85).$$

NOTA :

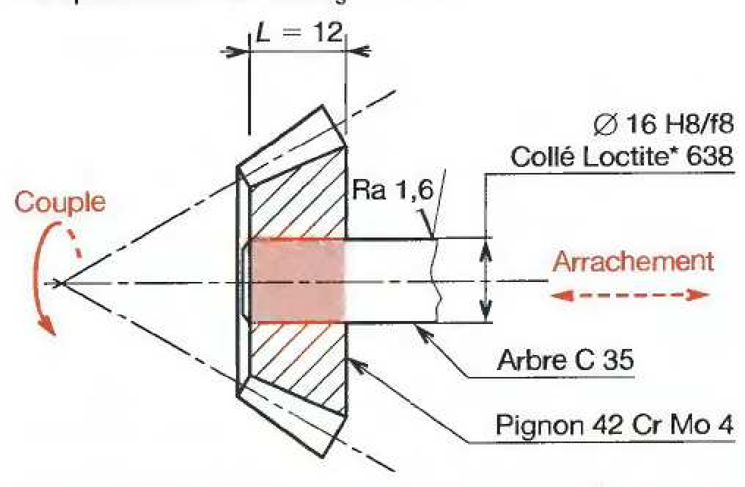
La résine supporte un effort d'arrachement N :

$$N = \tau_W.\pi.D.L.0{,}12$$
$$= 14{,}2 \times \pi \times 16 \times 12 \times 0{,}12$$
$$= 1\,028 \text{ N}.$$

* Convention de partenariat LOCTITE-ÉDUCATION NATIONALE signée en 1992.
** D'après fiche technique LOCTITE

EMMANCHEMENT COLLÉ

Température de service $t_s = 70$ °C



Résistance au cisaillement τ_{FT}**		
Résine polymérisée	603	638
τ_{FT} (MPa)	20 à 32	22 à 40

FACTEURS CORRECTIFS AVEC LOCTITE* 638			
Matériaux	f_1	**Jeu (mm)**	f_2
Acier	1	]... 0,08]	1
Acier allié	0,9	]0,08 0,15]	0,9
Acier inox	0,5		
Fontes	0,9	]0,15 0,2]	0,8
Alliages Cu, Alu	0,5	]0,2 0,25]	0,6
Revêtements zingués, cadmisés	0,45	]0,25 0,3]	0,5
Rugosité Ra (μm)	f_3	**Temps de service**	f_4
... 1,6]	1	]... 20 °C]	1
		]20 50 °C]	0,9
]1,6 5]	1,2	]50 70 °C]	0,8
		]70 80 °C]	0,7
]5 6,3]	1,4	]80 90 °C]	0,6
		]90 100 °C]	0,5
Forme f_5			

f_5 ; 1,5 ; 1 ; 0,5
L/D = 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,5 ; 0,3
5 ; 10 ; 25 ; 50 ; D = 55 mm
Pour $D > 100$ mm choisir $f_5 = 0{,}5$

APPLICATION 2 :

Détermination d'une liaison frottée-collée ou pressée-collée.

Pour transmettre un couple important, la solution consistant à réaliser un emmanchement serré renforcé par collage, réduit fortement le coût de la réalisation (suppression de clavette, cannelures, usinages moins précis...)

L'emmanchement peut s'effectuer à chaud (frotté-collé) ou à froid (pressé-collé).

La température de fonctionnement est limitée à 150 °C.

DONNÉES :

Roue sur axe (figure cotée ci-contre).

Couple à transmettre $C = 7{,}53\ \mathrm{N.m}$.

PROBLÈME :

Évaluer les couples transmissibles par le frettage seul et la solution « pressé-collé ».

SOLUTION :

- Couple transmissible par le frettage seul :

$$C_{\text{frette}} = p.S.\mu.\frac{D}{2} = p.\pi.D^2.\frac{L}{2}.\mu$$

$p = 15$ MPa (calcul ci-contre).
$S = \pi.D.L = \pi \times 10 \times 20\ \mathrm{mm}^2$.
$\mu = 0{,}2$ (facteur de frottement estimé).
D'où : $C_{\text{frette}} = 9{,}4\ \mathrm{N.m}$ (frettage seul).

- Couple transmissible par la résine 638

$$C_{\text{colle}} = \tau_W.S.\frac{D}{2}$$

où $\tau_W = \tau_{FT}.f_1.f_2.f_3.f_4.f_5.f_6$.

Les valeurs se relèvent dans les tableaux (application 1).

Résine 638 : $\tau_{FT} = 22$ à 40 MPa.
Matériau : $f_1 = 0{,}5$ (alliage de cuivre).
Jeu : $f_2 = 1$ (serrage).
Rugosité : $f_3 = 1$ (Ra = 1,6 µm).
Température : $f_4 = 0{,}8$ ($t_s = 60$ °C).
Forme : $f_5 = 1{,}2$ $\left(\frac{L}{D} = 2;\ D = 10\right)$.
Assemblage : $f_6 = 0{,}5$ (ci-contre).
On obtient $C_{\text{colle min}} = 16{,}6\ \mathrm{N.m}$.

NOTA :

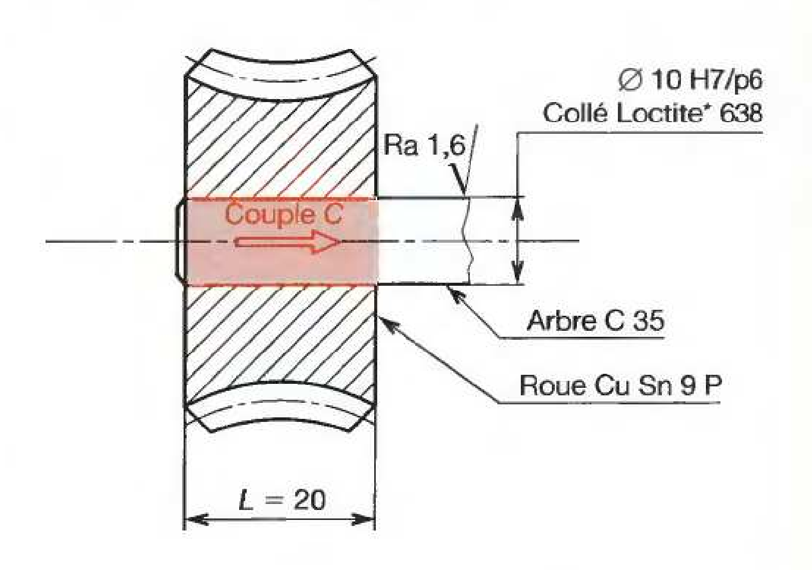
Des efforts dynamiques fréquents conduisent à minorer ces valeurs en les ramenant, par expérience, à 33 % environ pour un couple et 12 % pour un arrachement. Sécurité de l'assemblage :

$$s = \frac{(16{,}6 + 9{,}4) \times 0{,}33}{7{,}53} = 1{,}14 \text{ soit } 14\ \%.$$

* Convention de partenariat LOCTITE – ÉDUCATION NATIONALE signée en 1992.

ASSEMBLAGE PRESSÉ-COLLÉ

Température de service $t_s = 60$ °C



CALCUL D'UNE PRESSION DE FRETTAGE

1° Calcul du serrage

$$\varnothing 10\,\mathrm{H7}\begin{pmatrix}+0{,}015\\0\end{pmatrix} \qquad \varnothing 10\,\mathrm{p6}\begin{pmatrix}+0{,}015\\+0{,}006\end{pmatrix}$$

Jeu max. = ES − ei = 15 − 6 = 9 µm
Jeu min. = EI − es = 0 − 15 = − 15 µm

$$\text{Jeu moy.} = \frac{\text{jeu max.} + \text{jeu min.}}{2} = \frac{9 + (-15)}{2} = -3\ \mu\mathrm{m}.$$

Le serrage moyen vaut donc $s_{moy} = 0{,}003$ mm.

2° Calcul de la pression axe-roue :

Facteur de frottement estimé $\mu = 0{,}2$.

Avec une approximation satisfaisante, on calcule :

$$p = \frac{E.s_{moy}}{2.D}.$$

Pour le bronze (Cu Sn 8P), $E = 10^5$ MPa (voir § 48-43).

Comme $s_{moy} = 3.10^{-3}$ mm, $D = 10$ mm, on obtient :

$$p = 15\ \mathrm{MPa}.$$

Facteur d'assemblage f_6			
Liaison	pressée-collée	frettée-collée	collée
f_6	0,5	1,2	1

APPLICATION 3 :

Collage des roulements

La bague, extérieure ou intérieure d'un roulement, qui ne doit pas laminer l'alésage ou l'arbre peut, avantageusement, être :

- collée (emmanchement avec jeu) ;
- pressée-collée (emmanchement serré, à froid) ;
- frettée-collée (emmanchement serré, à chaud).

L'adhésif LOCTITE* 603, appliqué sur des surfaces seulement essuyées, convient particulièrement. La résine, une fois polymérisée, transmet un effort important, ce qui réduit le coût de fabrication (moins de pièces, états de surfaces grossiers) et augmente la durée de vie (moins de contraintes dans les roulements).

Toutefois, la température de service doit rester inférieure à 150 °C.

EXEMPLE :

Calcul de l'effort axial transmissible par la bague intérieure d'un roulement 40 BC 02 (∅ $d = 40$; $B = 18$; $r = 1,1$) monté sur un arbre en acier ordinaire C 35, ∅ 40 f 8.

Rugosité Ra = 6,3 μm ; température de service $t_s = 80$ °C .

$$A = \tau_{FT} . S . f_c \text{ où } f_c = f_1 . f_2 . f_3 ...$$

- Calcul de la surface collée $S = \pi . d . L$.

$S = \pi \times 40 \times (18 - 2 \times 1,1) = 1\,985 \text{ mm}^2$.

- On relève les diverses valeurs dans les tableaux de l'application 1 sauf f_4 et f_5 (ci-contre) ; on obtient :

Résine 603 : $\tau_{FT} = 20$ à 32 MPa .

Matériau : $f_1 = 0,9$ (acier allié du roulement).

Jeu : $f_2 = 1$ (avec $d = 40$ f 8 ou serrage).

Rugosité : $f_3 = 1,4$ (Ra = 6,3 μm).

Température : $f_4 = 0,8$ (ci-contre).

Forme : $f_5 = 1$ (estimé ci-contre).

Assemblage : $f_6 = 1$ (collé : application 2).

Charge : $f_7 = 0,3$ (ci-contre, cas probable).

- On calcule :

$f_c = 0,9 \times 1 \times 1,4 \times 0,8 \times 1 \times 1 \times 0,3 = 0,302$.

D'où l'effort axial transmissible avec :

$\tau_{FT} = 20$ MPa (sécurité) : $A = 12$ kN .

$\tau_{FT} = 32$ MPa (démontage) : $A = 19,2$ kN .

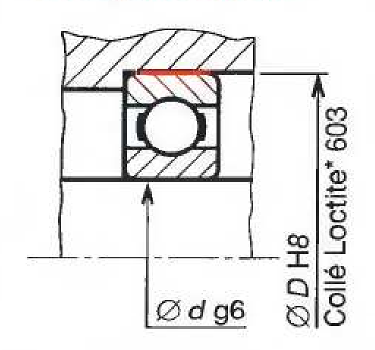
NOTA :

Pour un assemblage pressé-collé ou fretté-collé, le calcul se développe selon l'application 1 avec les caractéristiques du produit 603.

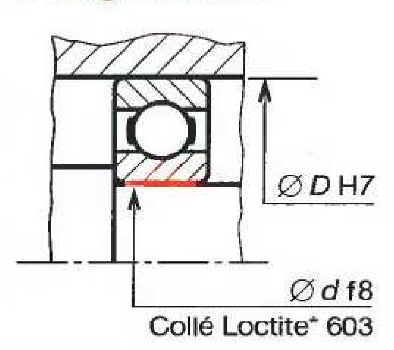
* Convention de partenariat LOCTITE – ÉDUCATION NATIONALE signée en 1992.

ROULEMENTS COLLÉS

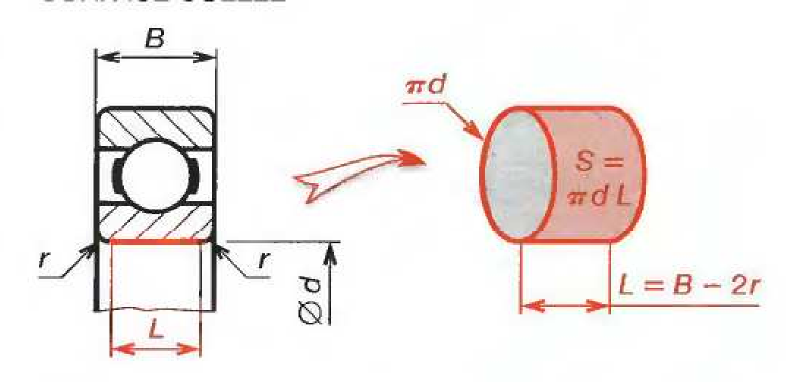
Sur bague extérieure

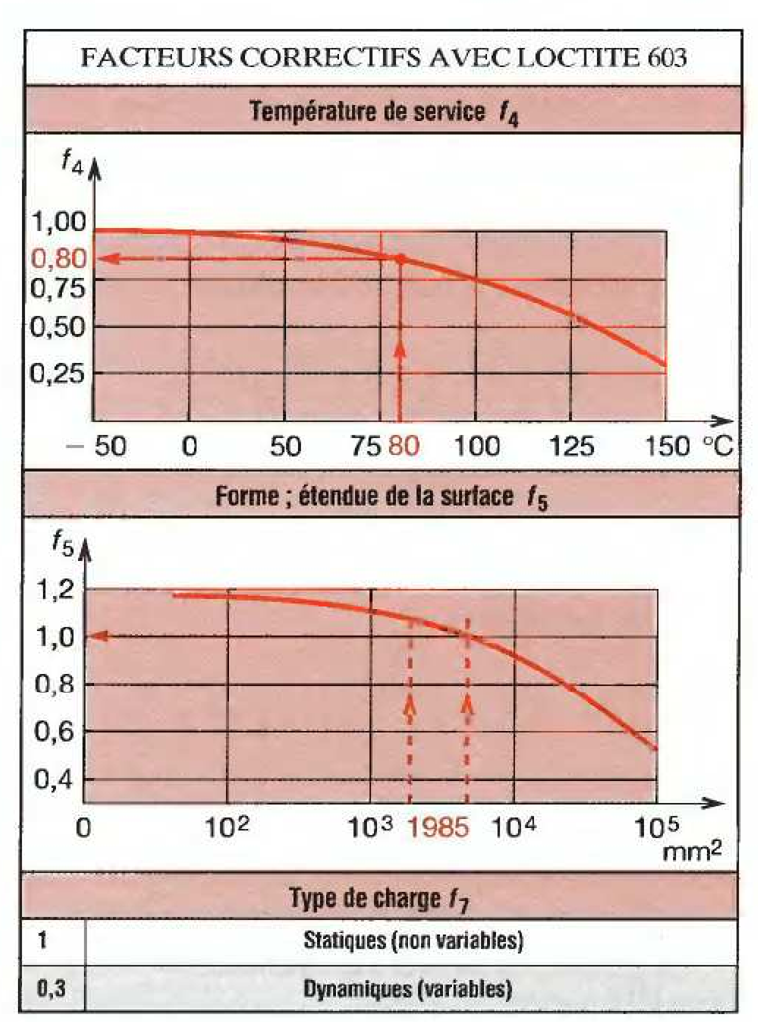


Sur bague intérieure



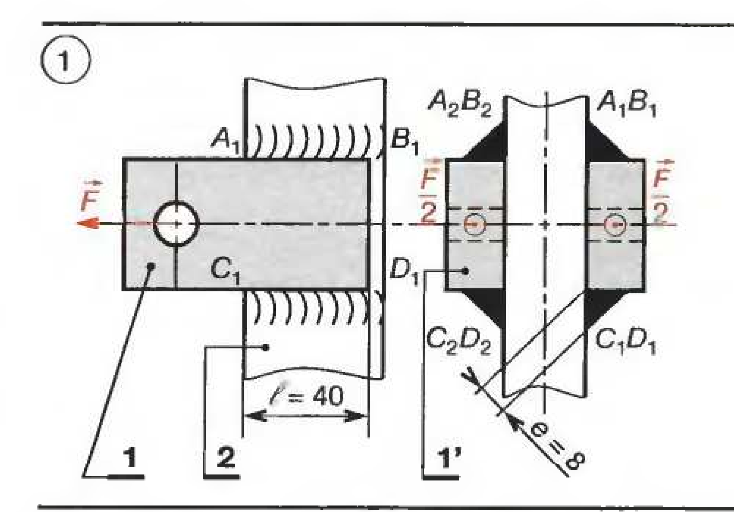
SURFACE COLLÉE





50■64 Liaison par soudage

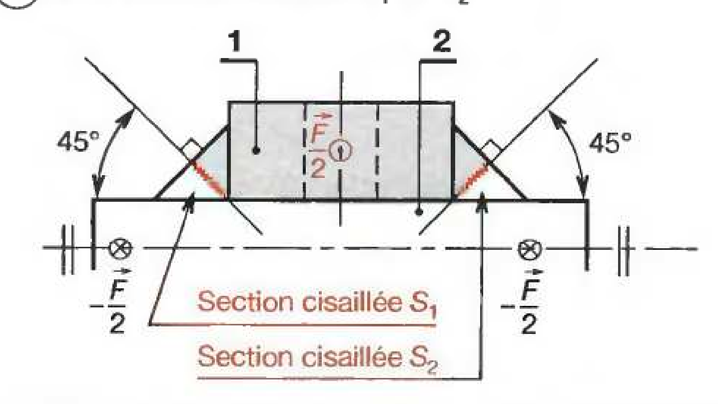
L'assemblage des pièces **1**, **1'** et **2** est réalisé par l'intermédiaire de quatre cordons de soudure A_1B_1, A_2B_2, C_1D_1, C_2D_2. L'épaisseur *e* des cordons est de 8 mm, la longueur est de 40 mm. L'électrode utilisée pour la soudure à l'arc est du type E 56 (acier dur). Le coefficient de sécurité est 3. Calculer l'effort maximal $\vec{F}$ pouvant être supporté en toute sécurité par cette liaison.



1° Rechercher la sollicitation et modéliser les efforts

Les contraintes dans un cordon de soudure sont complexes ; on peut cependant admettre que les contraintes tangentielles sont déterminantes dans les sections S_1 et S_2 inclinées à 45° (fig. 2). La résultante des efforts tangentiels dans ces sections a pour valeur :

$$|\vec{T}| = |\Sigma \Delta \vec{f}_{i(2/1)}| = \frac{|\vec{F}|}{4} \qquad \text{(fig. 3)}$$



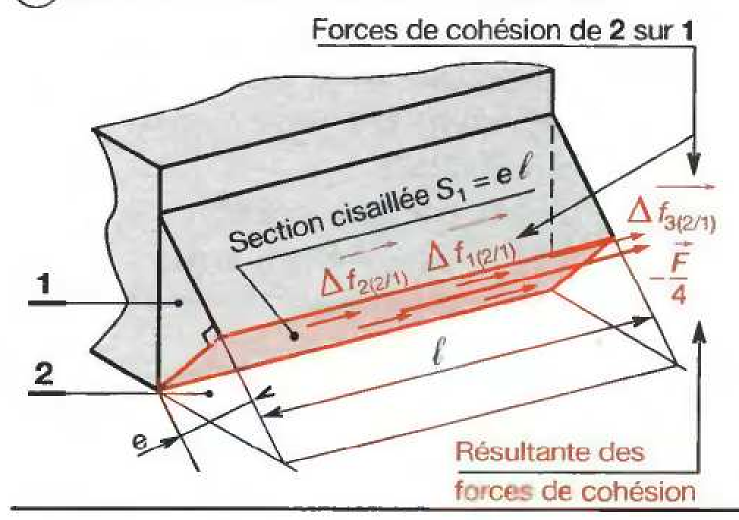
2° Calculer la contrainte tangentielle moyenne

$$|\tau_{moy}| = \frac{|\vec{T}|}{S} \; ; \; |\tau_{moy}| = \frac{\frac{|\vec{F}|}{4}}{L.e} \; ; \; |\tau_{moy}| = \frac{|\vec{F}|}{4.L.e}$$

3° Calculer la résistance pratique à la rupture R_{pr}

La norme NFA81309 nous indique que la résistance à la rupture est $R_{re} \approx 560$ MPa pour une électrode E 56 (voir tableau ci-contre).

$R_{rg} = 0{,}8\, R_{re}$ (acier dur : voir § 50.5) et $R_{pr} = \frac{0{,}8\, R_{re}}{s}$.



4° Écrire la condition de résistance et calculer $|\vec{F}|$

$$|\tau_{moy}| < R_{pr} \; ; \; \frac{|\vec{F}|}{4.L.e} < R_{pr} \; ; \; \frac{|\vec{F}|}{4.L.e} < \frac{0{,}8\, R_{re}}{s}$$

$$|\vec{F}| < \frac{3{,}2\, R_{re}}{s}.L.e$$

Application numérique

$$|\vec{F}| < \frac{3{,}2 \times 560}{3} \times 40 \times 8 \; ; \; |\vec{F}| < \mathbf{1{,}9.10^5\ N}$$

REMARQUE :

Ce résultat, dans la pratique, est à diviser par deux pour tenir compte des coefficients de qualité des soudures, des amorces de rupture aux extrémités des cordons (cratères), en plus des coefficients de sécurité habituels.

RÉSISTANCE À LA RUPTURE D'UNE ÉLECTRODE (NF A 81 309)

Type d'électrode	Résistance à la rupture (en MPa)
E 40	400 à 480
E 48	480 à 560
E 56	560 à 650

50 ■ 65 liaison par soudage par points

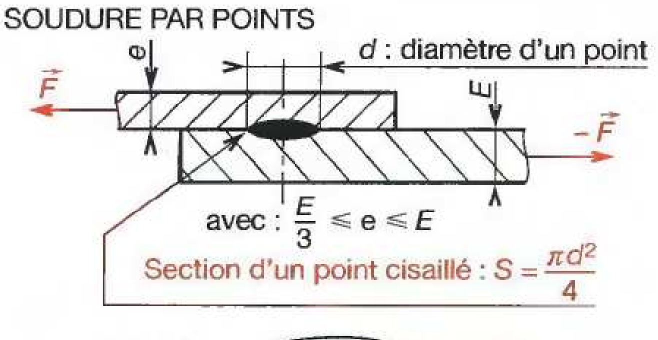
La résistance de la soudure par points ou par molette, dépend des **conditions de soudage** (points de diamètres corrects) et **des matériaux soudés.**(Une soudure entre deux pièces en acier inoxydable demi-dur supportera des efforts plus importants qu'une soudure entre deux pièces en acier doux (type A 60).)

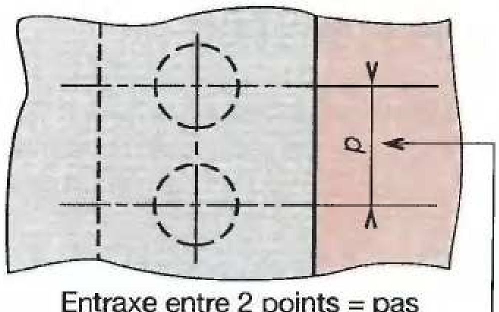
Le tableau ci-dessous donne, en fonction de l'épaisseur de la tôle la plus mince, du pas entre les points, du type d'acier soudé, **la valeur de la force $\vec{F}$ de cisaillement que peut supporter un point**

$$\|\overrightarrow{F_{totale}}\| = n.\|\vec{F}\|$$

$\|\overrightarrow{F_{totale}}\|$: force totale que peut supporter la liaison.

n : nombre de points de soudure.

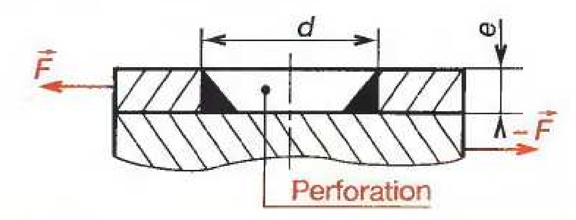




e (mm)	Entraxe entre points p (en mm)		Résistance d'un point de soudure au cisaillement $\|\vec{F}\|$ en N		Résistance d'une longueur de 1 cm de soudure à la molette		e (mm)	Distance entre points d (en mm)		Résistance d'un point de soudure au cisaillement $\|\vec{F}\|$ (en N)		Résistance d'une longueur de 1 cm de soudure à la molette	
	min	max	min acier A60	max acier inox	min acier	max acier		min	max	min acier A60	max acier inox	min acier	max acier
0,4	7	20	1 100	1 500	1 750	2 000	1,5	25	57	9 100	12 800	7 300	8 400
0,5	8	25	1 800	2 300	2 400	2 800	2	30	70	13 000	18 900	9 500	11 200
0,6	11	29	2 300	3 100	2 900	3 400	2,5	35	75	17 700	25 600	12 000	14 000
0,7	12	32	3 100	4 000	3 400	4 000	3	40	90	22 000	32 300	14 000	16 800
0,8	12	34	3 250	4 700	3 800	4 300	4	47	120	31 000	45 300	19 000	22 500
1	15	38	5 200	7 000	4 700	5 600	5	52	—	40 000	58 000	—	—

50 ■ 66 Liaison par bouchons de soudure

Le tableau ci-dessous donne, pour quelques épaisseurs de tôles, et pour deux types d'acier soudés, les valeurs de l'effort maximal $\vec{F}$ de cisaillement que peut supporter un bouchon.



Épaisseur de la tôle perforée e (mm)	Diamètre de la perforation d (mm)	Entraxe min entre bouchons p (mm)	Distance min au bord de tôle (mm)	Résistance au cisaillement d'un bouchon $\|\vec{F}\|$ (en N)	
				Acier A60	Aciers alliés
1	8	23	10	17 000	22 000
1,5	11	28	15	20 800	27 000
2	15	38	20	32 900	42 000
2,5	17	45	23	46 000	59 000
3	21	50	25	60 000	78 000
5	31	82	30	135 000	172 000
8	32	85	32	138 500	176 000
10	32	85	32	138 500	176 000

50 ■ 7 Méthodes de calculs au cisaillement

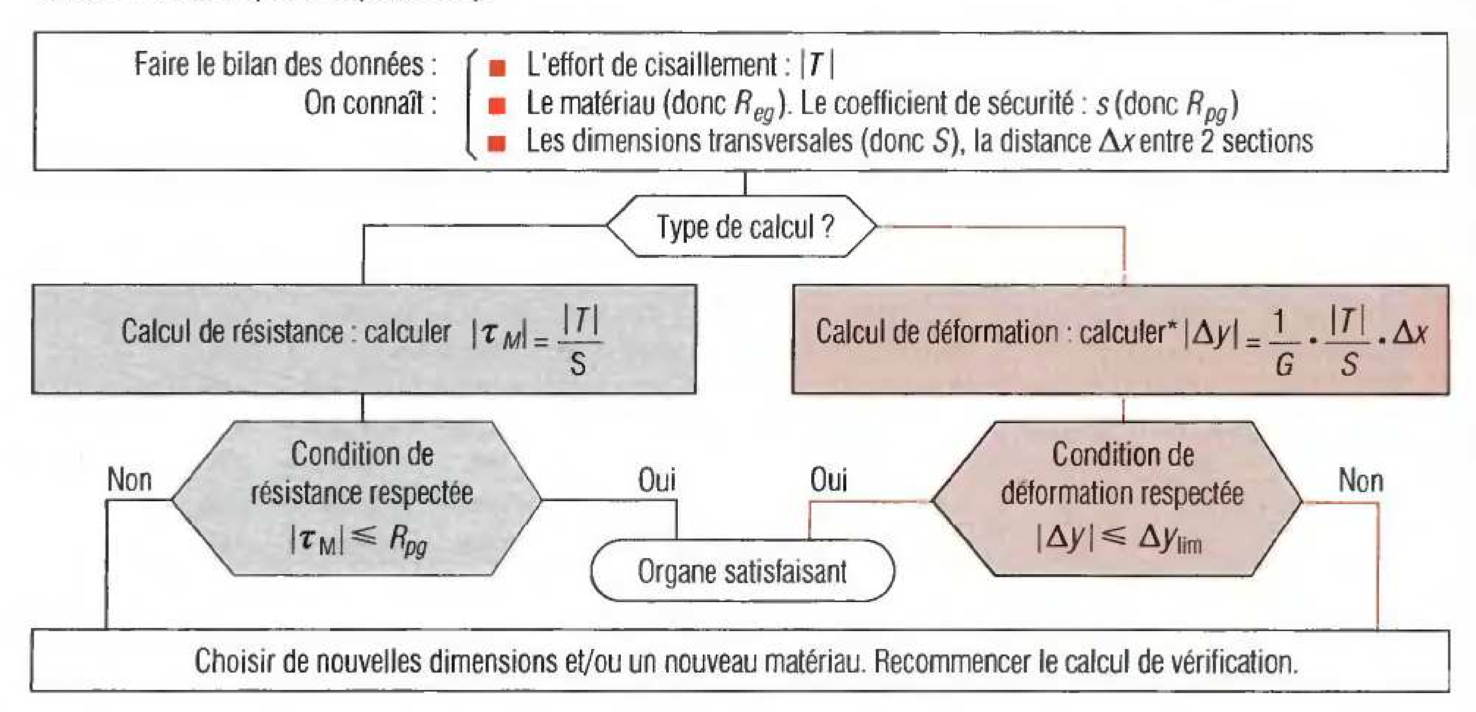
Il existe deux méthodes de calculs au cisaillement :

■ **Le calcul de vérification** : les efforts sont connus, l'organe est déterminé (dimensions, matériaux connus) et on vérifie s'il convient. Si cela n'est pas le cas, on calcule de nouvelles dimensions, et /ou on change de matériau.

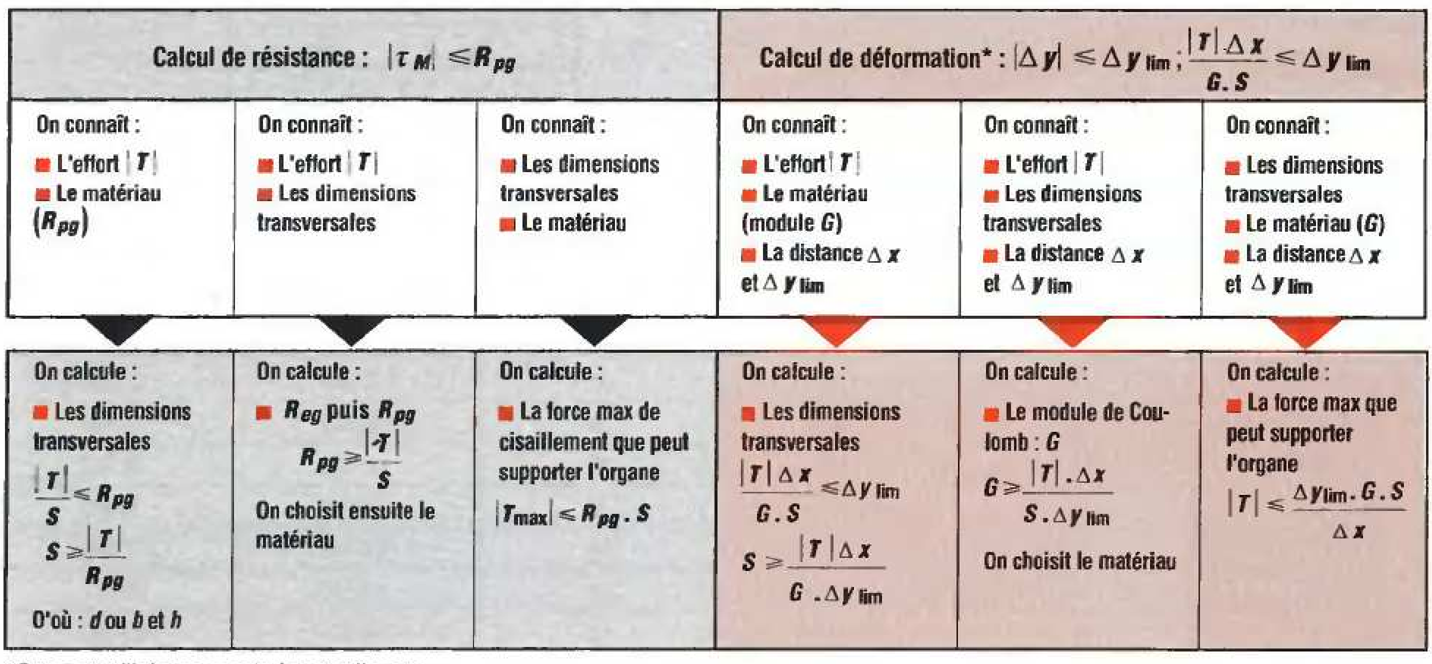
■ **Le calcul de détermination** : les efforts sont connus (par exemple), le matériau est déterminé et on calcule les dimensions.

Dans les deux cas, on peut faire soit un **calcul de résistance** (contraintes déterminantes), soit un **calcul de déformation** (déformations déterminantes), soit les deux types de calcul.

CALCUL DE VÉRIFICATION (voir exemple § 50.62) :



CALCUL DE DÉTERMINATION (voir exemple § 50.61) :



Calcul de résistance : $\lvert\tau_M\rvert \leq R_{pg}$			Calcul de déformation* : $\lvert\Delta y\rvert \leq \Delta y_{lim}$; $\frac{\lvert T\rvert \Delta x}{G.S} \leq \Delta y_{lim}$		
On connaît : ■ L'effort $\lvert T\rvert$ ■ Le matériau (R_{pg})	On connaît : ■ L'effort $\lvert T\rvert$ ■ Les dimensions transversales	On connaît : ■ Les dimensions transversales ■ Le matériau	On connaît : ■ L'effort $\lvert T\rvert$ ■ Le matériau (module G) ■ La distance Δx et Δy_{lim}	On connaît : ■ L'effort $\lvert T\rvert$ ■ Les dimensions transversales ■ La distance Δx et Δy_{lim}	On connaît : ■ Les dimensions transversales ■ Le matériau (G) ■ La distance Δx et Δy_{lim}
On calcule : ■ Les dimensions transversales $\frac{\lvert T\rvert}{S} \leq R_{pg}$ $S \geq \frac{\lvert T\rvert}{R_{pg}}$ D'où : d ou b et h	On calcule : ■ R_{eg} puis R_{pg} $R_{pg} \geq \frac{\lvert T\rvert}{S}$ On choisit ensuite le matériau	On calcule : ■ La force max de cisaillement que peut supporter l'organe $\lvert T_{max}\rvert \leq R_{pg} . S$	On calcule : ■ Les dimensions transversales $\frac{\lvert T\rvert \Delta x}{G.S} \leq \Delta y_{lim}$ $S \geq \frac{\lvert T\rvert \Delta x}{G . \Delta y_{lim}}$	On calcule : ■ Le module de Coulomb : G $G \geq \frac{\lvert T\rvert . \Delta x}{S . \Delta y_{lim}}$ On choisit le matériau	On calcule : ■ La force max que peut supporter l'organe $\lvert T\rvert \leq \frac{\Delta y_{lim} . G . S}{\Delta x}$

* Rarement utilisé dans un calcul de cisaillement.

51 Torsion simple

51.1 Hypothèses

■ **Solide idéal** : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne, de section constante et circulaire.

■ **Les actions extérieures** dans les sections extrêmes sont modélisables par deux moments opposés, portés par la ligne moyenne. La poutre est donc soumise à deux torseurs couples :

$$_A\{A_{\overline{1}/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_A \end{Bmatrix} \qquad _B\{B_{\overline{1}/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_B \end{Bmatrix}$$

51.2 Définition

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en G, barycentre de la section droite (S) à un moment perpendiculaire à (S), tel que :

$$_G\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}t} \end{Bmatrix}$$

Dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:
$N = 0$; $T_y = 0$; $T_z = 0$
$\mathcal{M}t \neq 0$; $\mathcal{M}f_{Gy} = 0$; $\mathcal{M}f_{Gz} = 0$

REMARQUE :

$$_G\{\mathrm{Coh}_{\mathrm{II/I}}\} = -{}_G\{\text{Actions ext. à gauche}/_{\mathrm{I}}\} = +{}_G\{\text{Actions ext. à droite}/_{\mathrm{II}}\}$$

d'où

$$\vec{R} = \vec{0} \qquad \vec{\mathcal{M}}_t = -\vec{\mathcal{M}}_A$$

51.3 Étude des déformations

On exerce un moment $\vec{\mathcal{M}}_{G1}$ dans la section droite (S_1) et on mesure l'angle de rotation des sections (S), (S_1) par rapport à (S_0). On constate que : $\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha_1}{\ell_{1,0}} = \ldots = \mathrm{Cte}$. On pose :

$$\theta = \frac{\alpha_1}{\ell_{1,0}} \qquad \text{si } \alpha > 0 \,; \quad \theta > 0$$

θ : angle de torsion unitaire (rad/mm).

α_1 : angle de rotation de la section $(S_1)/(S_0)$ (en rad).

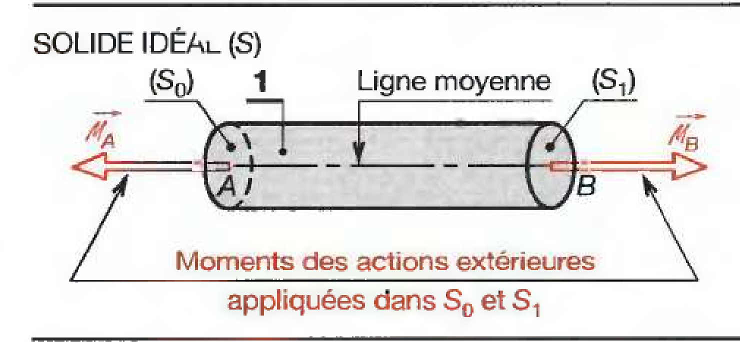
$\ell_{1,0}$: distance séparant (S_1) à la section de référence (S_0) (mm)

La courbe donnant l'angle α en fonction du moment $\vec{\mathcal{M}}_{G1}$ fait apparaître deux zones :

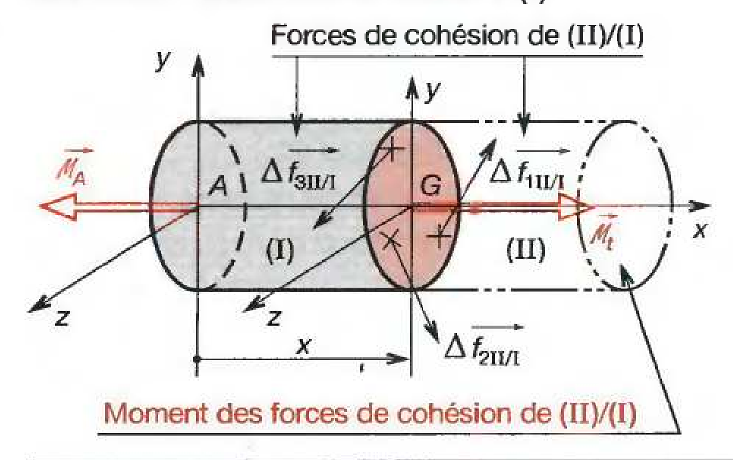
■ **La zone OA de déformation élastique**, ou domaine élastique : $\mathcal{M}_{G1} \leqslant \mathcal{M}_A$; l'angle de rotation α est proportionnel au moment appliqué.

■ **La zone AB de déformation permanente**, ou domaine plastique : $\mathcal{M}_{G1} > \mathcal{M}_A$; α n'est pas proportionnel à $\mathcal{M}_{G1}$.

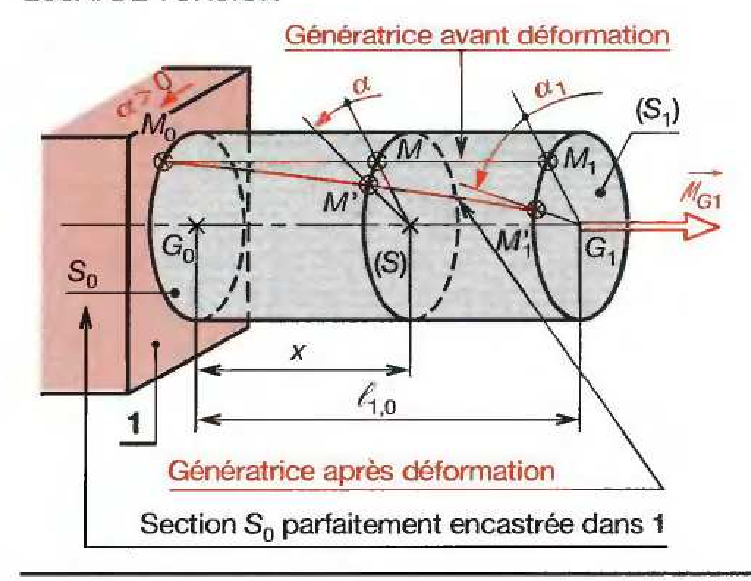
SOLIDE IDÉAL (S)



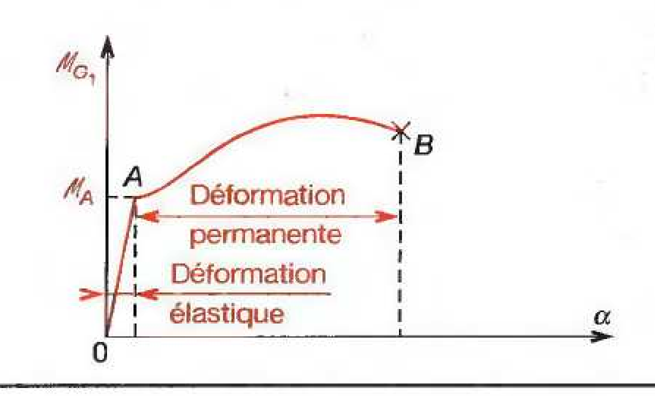
ISOLEMENT D'UNE PARTIE GAUCHE (I)



ESSAI DE TORSION



COURBE CARACTÉRISTIQUE



51 ■ 4 Répartition des contraintes dans une section droite

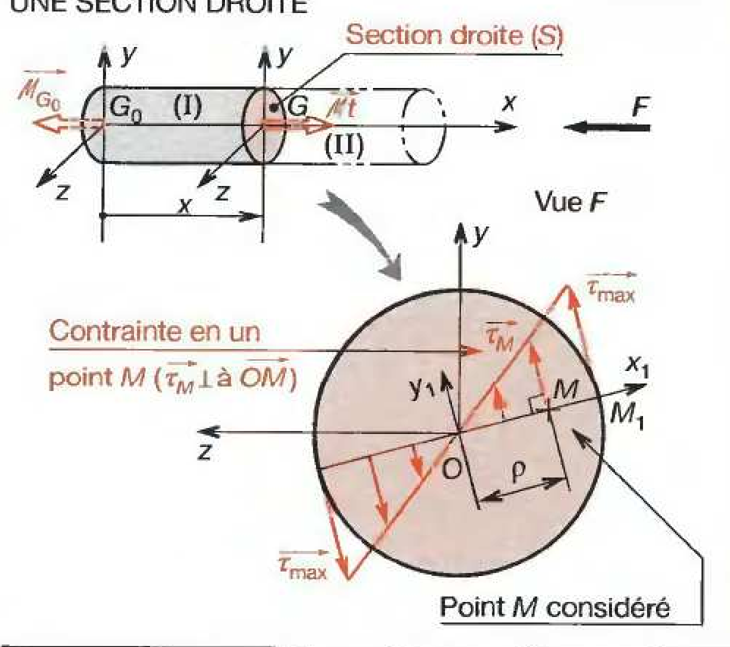
En un point M, la contrainte de torsion τ_M est proportionnelle à la distance ρ de ce point à la ligne moyenne.

$$\tau_M = G.\theta.\rho \left[\textbf{Dans } (0, \vec{x_1}, \vec{y_1}) : \tau_M > 0 \text{ si } \theta > 0 \text{ et } \rho > 0 \right]$$

τ_M : contrainte tangentielle due à la torsion (MPa).
G : module d'élasticité transversale (de Coulomb) (MPa)*.
θ : angle de torsion unitaire (rad/mm).
ρ : distance de M au centre de la section (mm).

La contrainte de torsion est nulle si M est sur la ligne moyenne ($\rho = 0$). La «fibre neutre» est confondue avec la ligne moyenne.

La contrainte de torsion est maximale si M est sur la surface du solide ($\rho = R$ = distance maximale) : $\tau_{max} = G.\theta.R$.

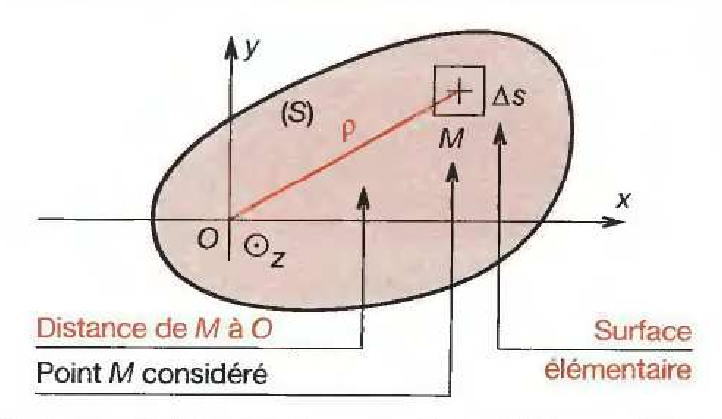


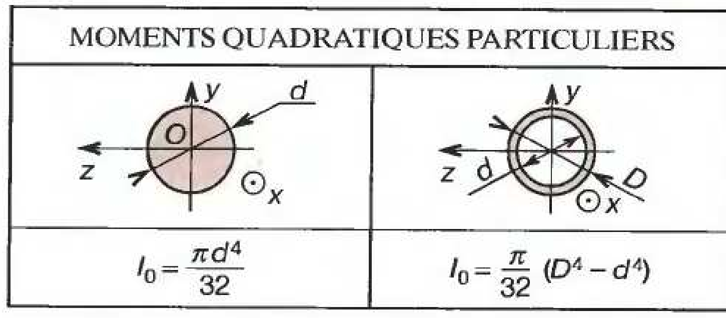
51 ■ 5 Moment quadratique polaire

Le moment quadratique polaire de la surface (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$ perpendiculaire en O au plan de cette dernière est :

$$I_0 = \sum_{(S)} (\rho^2.\Delta s)$$

I_0 : moment quadratique de (S) par rapport à $(O, \vec{z})$ (mm⁴).
ρ : distance du point M au point O (mm).
Δs : surface élémentaire entourant le point M (mm²).





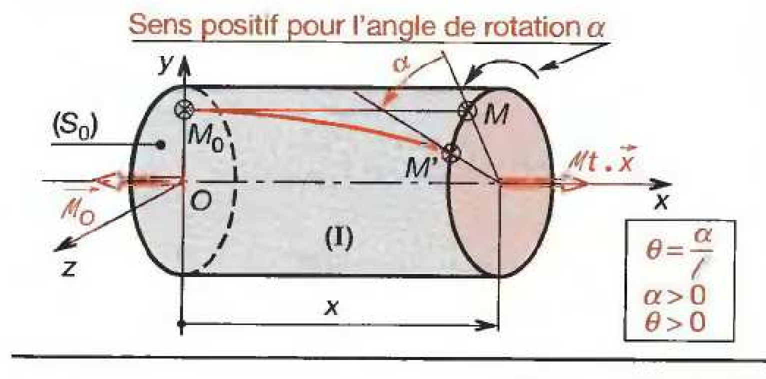
MOMENTS QUADRATIQUES PARTICULIERS	
$I_0 = \dfrac{\pi d^4}{32}$	$I_0 = \dfrac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

51 ■ 6 Équation de déformation

Dans le domaine élastique, le moment de torsion Mt est proportionnel à l'angle unitaire de torsion θ :

$$Mt = G.\theta.I_0 \qquad \text{si } \theta > 0 \quad Mt > 0$$

Mt : moment de torsion (N . mm).
G : module d'élasticité transversal (de Coulomb) (MPa).
θ : angle de torsion unitaire (rad/mm).
I_0 : moment quadratique de (S) par rapport à $(O, \vec{x})$ (mm⁴).



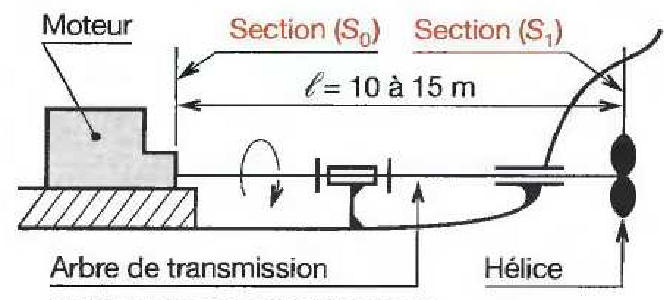
* Voir valeurs de G pour différents matériaux au § 50.42.

51 ■ 7 Condition de rigidité

Pour les arbres de grande longueur (arbres de forage de puits de pétrole, arbres de navires importants) on évite de trop grandes déformations de torsion qui risqueraient d'engendrer des vibrations trop importantes pour un fonctionnement correct. À cet effet, on impose un angle unitaire limite de torsion : θ_{lim} à ne pas dépasser (θ_{lim} : 0,25 °/m, par exemple).

$$|\theta| \leqslant \theta_{lim} \quad \text{ou} \quad \frac{|Mt|}{G \cdot I_0} \leqslant \theta_{lim}$$

Mt : moment de torsion (N . mm).
G : module d'élasticité transversale (de Coulomb) (MPa).
I_0 : moment quadratique de (S) par rapport à $(O, \vec{z})$ (mm⁴).



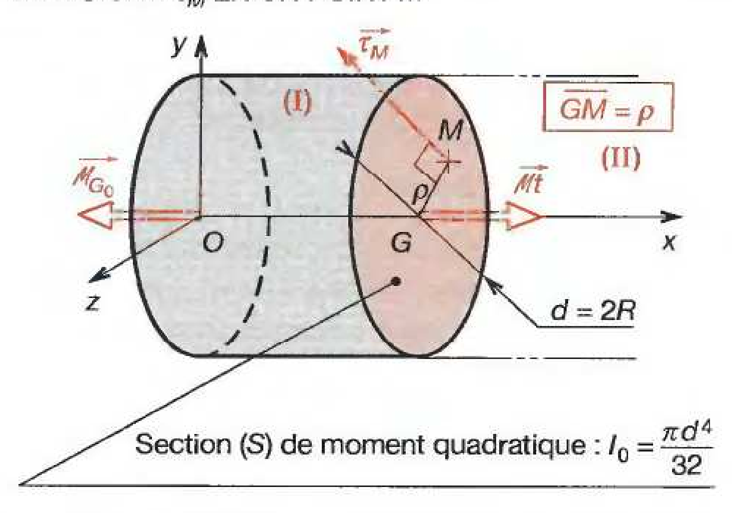
51 ■ 8 Contraintes de torsion

Contrainte de torsion en fonction de Mt

La contrainte en un point M d'une section droite est :

$$\tau_M = \frac{Mt}{I_0} \cdot \rho$$

τ_M : contrainte tangentielle due à la torsion (MPa)*.
Mt : moment de torsion (N . mm).
I_0 : moment quadratique polaire de la section droite considérée (mm⁴).
ρ : distance du point M à la fibre neutre (mm).



Contrainte maximale de torsion

Il faut rechercher la section (S) dans laquelle le moment de torsion est maximal. Dans celle-ci la contrainte est maximale au point le plus éloigné de l'axe ($\rho = R$).

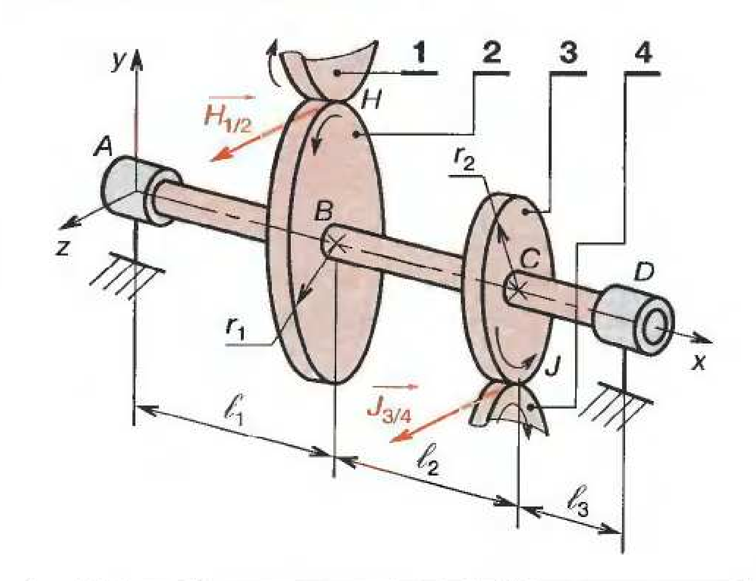
$$\tau_{max} = \frac{Mt_{max}}{I_0} \cdot R \quad \text{ou} \quad \tau_{max} = \frac{Mt_{max}}{\left(\frac{I_0}{R}\right)}$$

τ_{max} : contrainte maximale tangentielle (MPa)*.
Mt_{max} : moment de torsion maximale (N . mm).
I_0 : moment quadratique polaire de la section (S) (mm⁴).
R : distance du point le plus éloigné de la fibre neutre à cette dernière (mm).
$\frac{I_0}{R}$: module de torsion (mm³).

REMARQUE :

Ces relations sont valables uniquement pour les sections circulaires.

* 1 MPa = 1 N/mm².



De A à B : $\|\vec{Mt}\| = 0$
De B à C : $\|\vec{Mt}_{max}\| = \|\vec{H_{1/2}}\| \cdot r_1$
De C à D : $\|\vec{Mt}\| = 0$

51 ■ 9 Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte de torsion doit rester inférieure à la **résistance pratique au glissement** R_{pg} est le quotient de résistance élastique au glissement R_{eg} par **le coefficient de sécurité** s.
(Voir la relation entre R_e et R_{eg} au § 50.5.)

$$R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

R_{pg} : résistance pratique au glissement (MPa).
R_{eg} : résistance élastique au glissement (MPa).
s : coefficient de sécurité (sans unité) (voir valeurs § 48.5).

La condition de résistance est :

$$|\tau|_{max} \leq R_{pg} \quad \text{ou} \quad \frac{|Mt|_{max}}{\left(\frac{I_0}{R}\right)} \leq R_{pg}$$

51 ■ 10 Solide réel

Les arbres présentent généralement de brusques variations de sections (gorges, épaulements, rainures de clavettes...). Au voisinage de ces variations de section, la répartition des contraintes n'est pas linéaire. Il y a concentration de contrainte.

$$|\tau_{eff}|_{max} = K_t \cdot |\tau_{\text{théorique}}|$$

$\tau_{eff\,max}$: contrainte maximale effective (MPa).
$\tau_{\text{théorique}}$: contrainte théorique sans concentration (MPa).
K_t : coefficient de concentration de contrainte relatif à la torsion.

K_t est déterminé par des tableaux ou abaques (voir les valeurs expérimentales au § 51.11).

EXEMPLE DE CALCUL :

Déterminer K_t pour une rainure de clavette ayant un congé dans l'angle inférieur $r = 0,3$ (fig. 3) et pour un arbre de diamètre $d = 20$ mm.

SOLUTION :

Rechercher la profondeur de la rainure $c \approx \frac{b}{2}$

Si : $d = 20$, $b = c$ (G.D. § 38.121), $c \approx \frac{6}{2}$

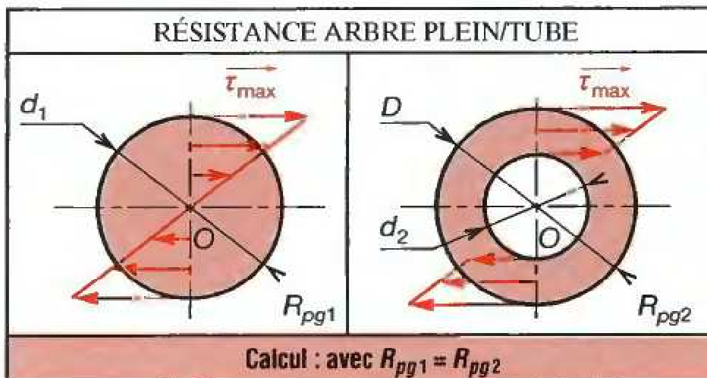
$c = 3$ d'où le rapport $\frac{r}{c} \approx \frac{0,3}{3}$; $\frac{r}{c} \approx 0,1$

Le tableau ci-contre donne : $K_t \approx 5,4$.

La condition de résistance à la torsion est :

$$5,4\,|\tau_{\text{théorique}}| \leq R_{pg}$$

RÉSISTANCE ARBRE PLEIN/TUBE



Calcul : avec $R_{pg1} = R_{pg2}$

$$\frac{|Mt|_{max}}{I_{01}} \cdot \frac{d_1}{2} = R_{pg} \qquad I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32}$$

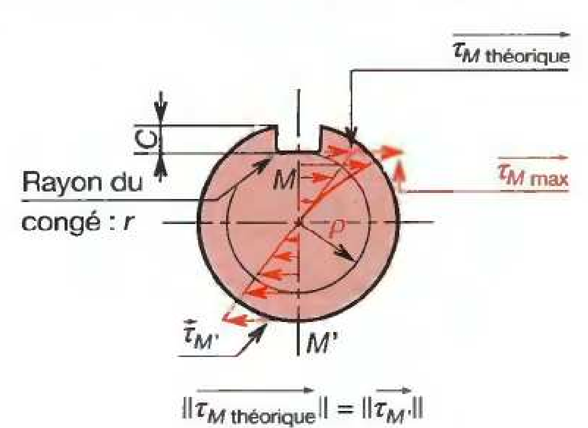
$$\frac{|Mt|_{max}}{I_{02}} \cdot \frac{D}{2} = R_{pg} \qquad I_{02} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d_2^4}{32}$$

avec : $d_2 = k.D$

$$I_{02} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - k^4)$$

Si $d = 0,8\,D$, à résistance égale, le tube est deux fois plus léger que l'arbre plein. (Proprieté importante pour les mécanismes où la légèreté est recherchée.)

(2) INFLUENCE D'UNE RAINURE DE CLAVETTE



K_t POUR RAINURES DE CLAVETTES

Rayon congé / Profondeur rainure $= \frac{r}{c}$	0,5	0,3	0,2	0,1
Coefficient K_t	2,1	2,7	3,5	5,4

MÉTHODE DE CALCUL D'UN SOLIDE RÉEL

1° Calculer τ_M ou τ_{max}.

2° Analyser la nature de la géométrie (épaulement, gorge...) et choisir la courbe ou le tableau correspondant.

3° Calculer $\frac{D}{d}, \frac{r}{d}, \frac{d}{D}$.

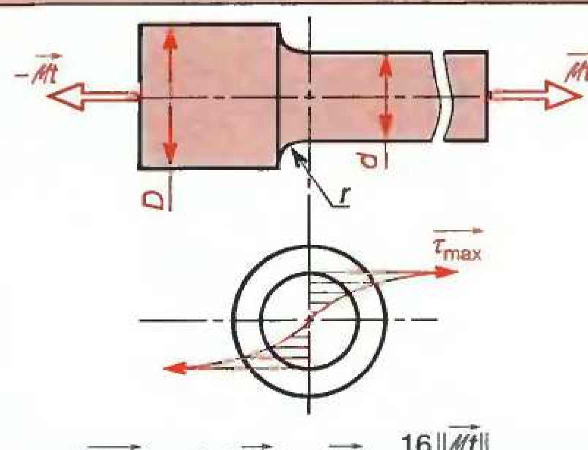
4° Déterminer la valeur de K_t correspondante.

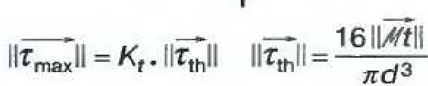
5° Calculer $|\tau_{eff}|_{max} = K_t \cdot |\tau_{\text{théorique}}|$.

6° Écrire la condition de résistance $|\tau_{eff}|_{max} \leq R_{pg}$.

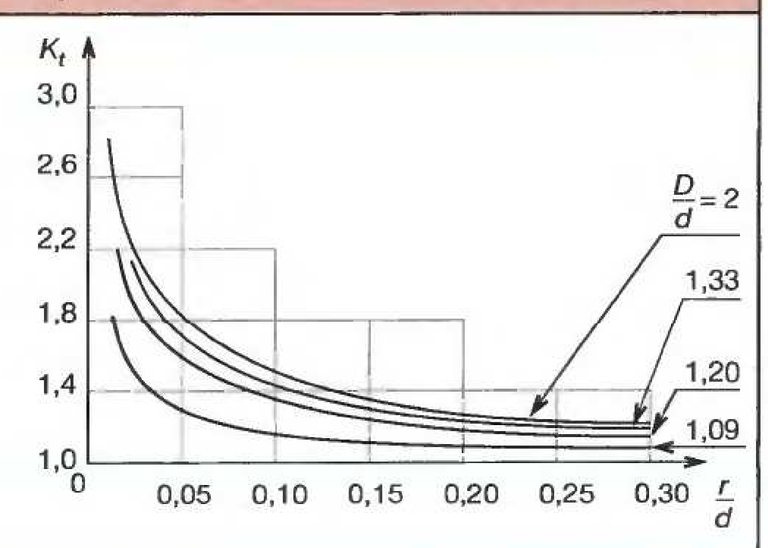
51 ■ 11 COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES K_t*

Arbre avec épaulement

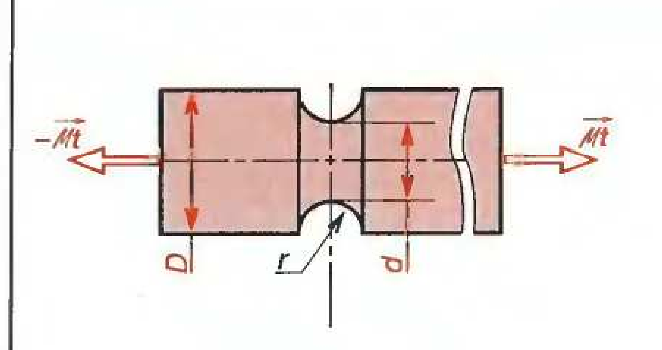




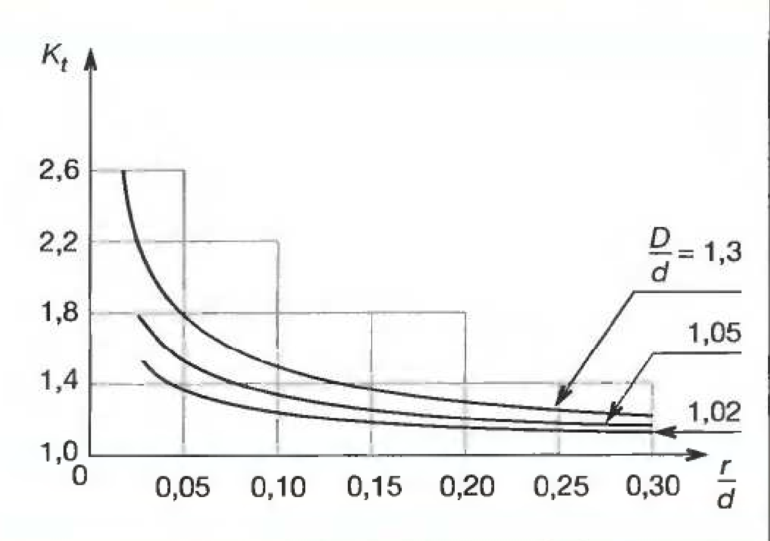
$$\|\overrightarrow{\tau_{max}}\| = K_t \cdot \|\overrightarrow{\tau_{th}}\| \qquad \|\overrightarrow{\tau_{th}}\| = \frac{16\,\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi d^3}$$



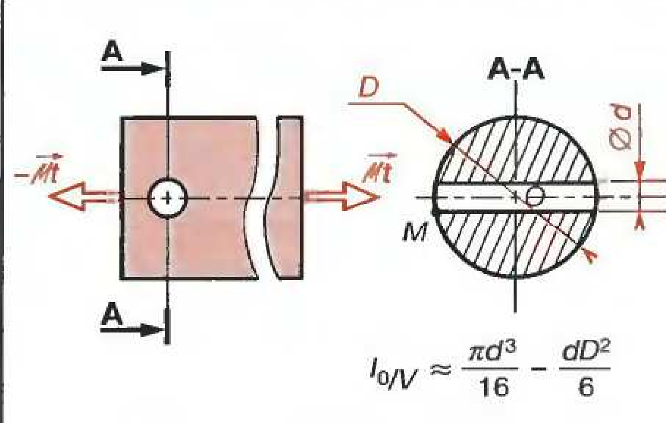
Arbre avec gorge



$$\|\overrightarrow{\tau_{max}}\| = K_t \cdot \|\overrightarrow{\tau_{th}}\| \qquad \|\overrightarrow{\tau_{th}}\| = \frac{16\,\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi d^3}$$

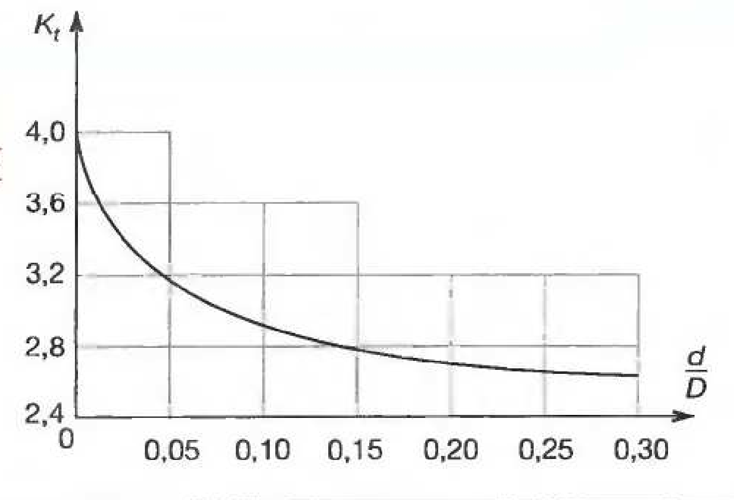


Arbre avec trou de goupille



$$I_{0/V} \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{dD^2}{6}$$

La courbe ci-contre donne la valeur de K_t pour le point M



* D'après CETIM.

51 ▪ 12 Exemples

51 ▪ 121 Arbre de transmission

Un moteur électrique **1** transmet à un renvoi d'angle **2** une puissance de 15 kW à la fréquence de rotation $n = 1\,500$ tr/min par l'intermédiaire d'un arbre de transmission **3** de diamètre d. Ce dernier est lié au moteur et au récepteur, par deux accouplements élastiques **4** compensant les défauts d'alignement dus à la déformation du support. La distance séparant les deux accouplements est de 1 m. La résistance pratique au glissement du matériau de l'arbre est $R_{pg} = 100$ MPa, le module élasticité tranversal est 80 000 MPa. Les rainures de clavette nécessitées par la liaison des accouplements élastiques avec l'arbre, provoquent une concentration de contrainte ($K_t = 5{,}4$).

1° Déterminer le diamètre de l'arbre et calculer l'angle de déformation dû à la torsion entre les deux sections S_0 et S_1 distantes de 1 m.

2° On impose une valeur limite de 0,2°/m à l'angle unitaire de torsion. Calculer le diamètre de l'arbre dans ce cas.

SOLUTION :

1° Détermination du diamètre de l'arbre

▪ **Modéliser le solide :**

Dans la zone 1, l'arbre est une poutre de section circulaire constante : c'est une poutre idéale.

Dans la zone 2, l'existence d'une rainure de clavette impose de modéliser l'arbre comme une poutre réelle.

▪ **Modéliser les actions mécaniques extérieures :**

Les accouplements élastiques éliminent les efforts normaux, tranchants, et les moments de flexion au points G_0 et G_1.

En ces points, les actions mécaniques de **4/3** et **4'/3** peuvent être modélisées par deux torseurs-couples.

$$_{G_0}\{A_{4/3}\} = {}_{G_0}\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \overrightarrow{Cm_{0(4/3)}}\end{matrix}\right\} \; ; \; _{G_1}\{B_{4'/3}\} = {}_{G_1}\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \overrightarrow{Cm_{1(4'/3)}}\end{matrix}\right\}$$

avec $\overrightarrow{Cm_{0(4/3)}} + \overrightarrow{Cm_{1(4'/3)}} = \vec{0}$; $\overrightarrow{Cm_{0(4/3)}} = -\overrightarrow{Cm_{1(4'/3)}}$.

L'arbre est donc soumis à la torsion simple.

▪ **Calculer $\|\overrightarrow{Cm}\|$:**

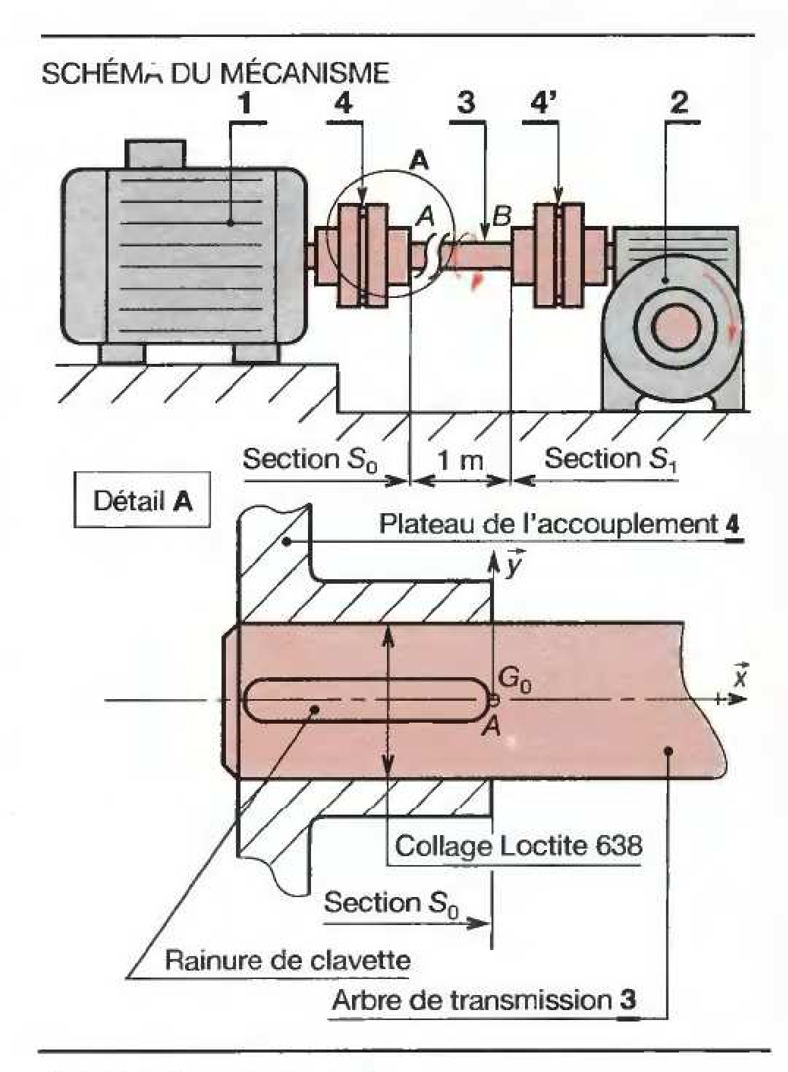
Nous savons que : $P = \|\overrightarrow{Cm}\| \cdot \omega$ (voir § 59.3)

(W) (N . m) (rad/s)

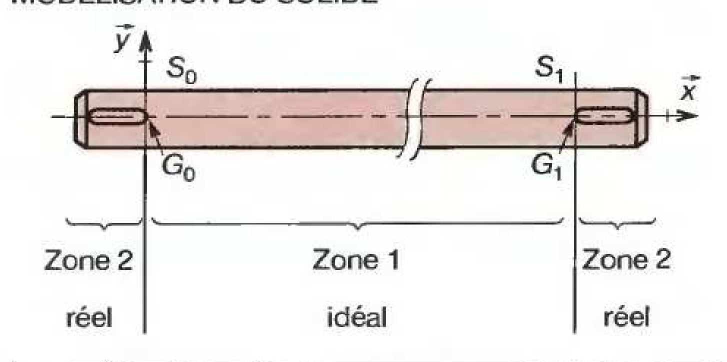
$$\|\overrightarrow{Cm}\| = \frac{15 \times 10^3}{1\,500 \times \dfrac{2\pi}{60}} \quad ; \quad \|\overrightarrow{Cm}\| \approx 95{,}5 \text{ N . m}$$

d'où : $\overrightarrow{Cm_{0(4/3)}} = -95{,}5\,\vec{x}$ et $\overrightarrow{Cm_{1(4'/3)}} = +95{,}5\,\vec{x}$ (N . m).

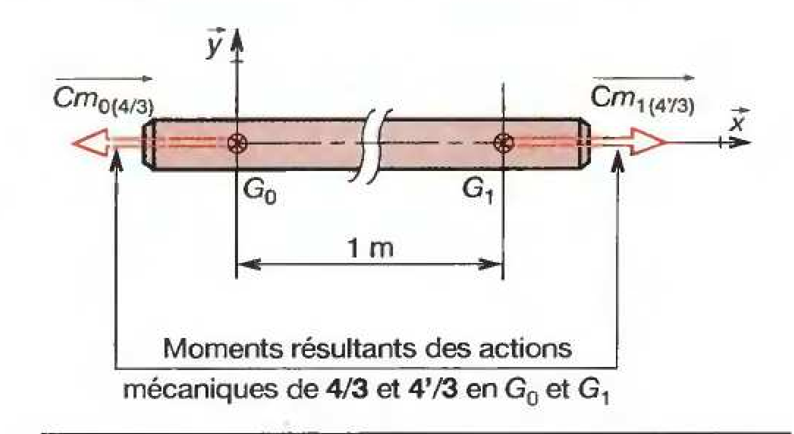
SCHÉMA DU MÉCANISME



MODÉLISATION DU SOLIDE



MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES



■ Calculer le diamètre à la résistance :

Zone 1 : solide idéal.

La condition de résistance est : $\|\overrightarrow{\tau_{max}}\| \leqslant R_{pg}$

d'où : $\dfrac{\|\overrightarrow{Mt}\|}{\dfrac{\pi . d_1^4}{32}} \times \dfrac{d_1}{2} \leqslant R_{pg}$; $\dfrac{16\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi . d_1^3} \leqslant R_{pg}$

$$\boxed{d_1 \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{16\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi . R_{pg}}}}$$

avec $\|\overrightarrow{Mt}\| = \|\overrightarrow{Cm}\|$ ← Couple moteur

Application numérique :

$$d_1 \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{16 \times 95{,}5 \times 10^3}{\pi \times 100}} \quad ; \quad \mathbf{d_1 \geqslant 16{,}9\ mm}.$$

Zone 2 : solide réel :

La condition de résistance est : $\|\overrightarrow{\tau_{eff\,max}}\| \leqslant R_{pg}$

ou : $K_t . \|\overrightarrow{\tau_{théorique}}\| \leqslant R_{pg}$; $\|\overrightarrow{\tau_{théorique}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi . d'^4_2} \times \dfrac{d'_2}{2}$

avec $\|\overrightarrow{\tau_{théorique}}\| = \dfrac{16\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi . d'^3_2}$.

d'_2 : diamètre à fond de rainure

La condition s'écrit :

$K_t . \dfrac{16\|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi . d'^3_2} \leqslant R_{pg}$

$$\boxed{d'_2 \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{16 K_t \|\overrightarrow{Mt}\|}{\pi . R_{pg}}}}$$

Application numérique :

$$d'_2 \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{16 \times 5{,}4 \times 95{,}5 \times 10^3}{\pi \times 100}} \quad ; \quad \mathbf{d'_2 \geqslant 29{,}7\ mm}.$$

On prendra pratiquement : $d'_2 \approx 30$ mm.

Diamètre d_2 de l'arbre :

$30 = d_2 - 5$ (voir G.D. 38.121) $\mathbf{d_2 = 35\ mm}$.

Vérification de la valeur du congé à fond de rainure :

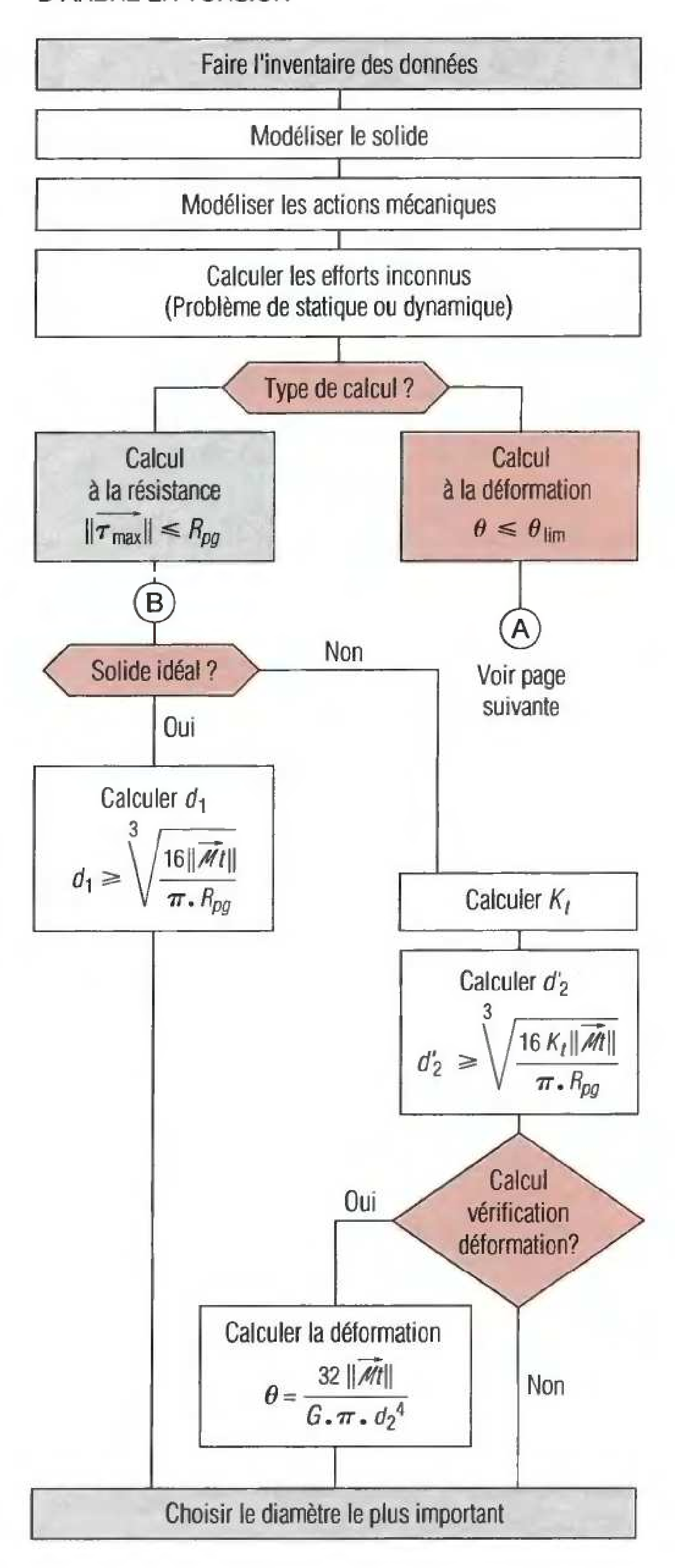
Nous savons que : $K_t = 5{,}4$ correspond à une valeur $\dfrac{r}{c} = 0{,}1$ (voir tableau § 51.10, page précédente).

$c = 5$; $\dfrac{r}{5}$; $\mathbf{r = 0{,}5}$ valeur acceptable.

REMARQUE :

Si la valeur de r avait été trop grande ou trop petite, il aurait fallu choisir une autre valeur de K_t et refaire le calcul de d_2.

ÉTAPES PRINCIPALES DU CALCUL D'UN DIAMÈTRE D'ARBRE EN TORSION



Calculer l'angle de déformation entre les 2 sections S_0 et S_1 :

La valeur de l'angle unitaire de torsion est :

$$\theta = \frac{\|\vec{Mt}\|}{G.I_0} \qquad I_0 = \frac{\pi\, d_2^4}{32} \; ; \; \theta = \frac{32\,\|\vec{Mt}\|}{G.\pi.d_2^4}$$

comme $\theta = \dfrac{\alpha_{0,1}}{\ell_{0,1}}$ $\alpha_{0,1}$: angle de déformation entre S_0 et S_1

$\ell_{0,1}$: distance entre S_0 et S_1

On peut écrire :

$$\boldsymbol{\alpha_{0,1} = \frac{32.\|\vec{Mt}\|.\,\ell_{0,1}}{G.\pi.\,d_2^4}}$$

Application numérique :

$$\alpha = \frac{32 \times 95{,}5 \times 10^3 \times 10^3}{80\,000 \times \pi \times 35^4} \qquad \alpha = 0{,}008 \text{ rad/mm}$$

Valeur de α en degrés : $\alpha = 0{,}008 \times \dfrac{180}{\pi}$ $\quad \boldsymbol{\alpha = 0{,}4°}$

2° Calcul du diamètre de l'arbre à la déformation

La condition de déformation est : $\theta \leqslant \theta_{lim}$

d'où : $\dfrac{\|\vec{Mt}\|}{G.I_0} \leqslant \theta_{lim}$ $\qquad I_0 = \dfrac{\pi.d_3^4}{32}$

$$\frac{32\,\|\vec{Mt}\|}{G.\pi.d_3^4} \leqslant \theta_{lim} \qquad \boxed{d_3 \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\,\|\vec{Mt}\|}{G.\pi.\theta_{lim}}}}$$

Application numérique : $\theta_{lim} = 0{,}2$ °/m

$$\theta_{lim} = 0{,}2 \times \frac{\pi}{180} \times 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

$$d_3 \geqslant \sqrt[4]{\frac{32 \times 95{,}5 \times 10^3}{80000 \times \pi \times 0{,}2 \times \frac{\pi}{180} \times 10^{-3}}} \; ; \; d_3 \geqslant 43{,}2 \text{ mm}$$

On prendra pratiquement : $\boldsymbol{d_3 = 44}$ **mm**.

Choix du diamètre :

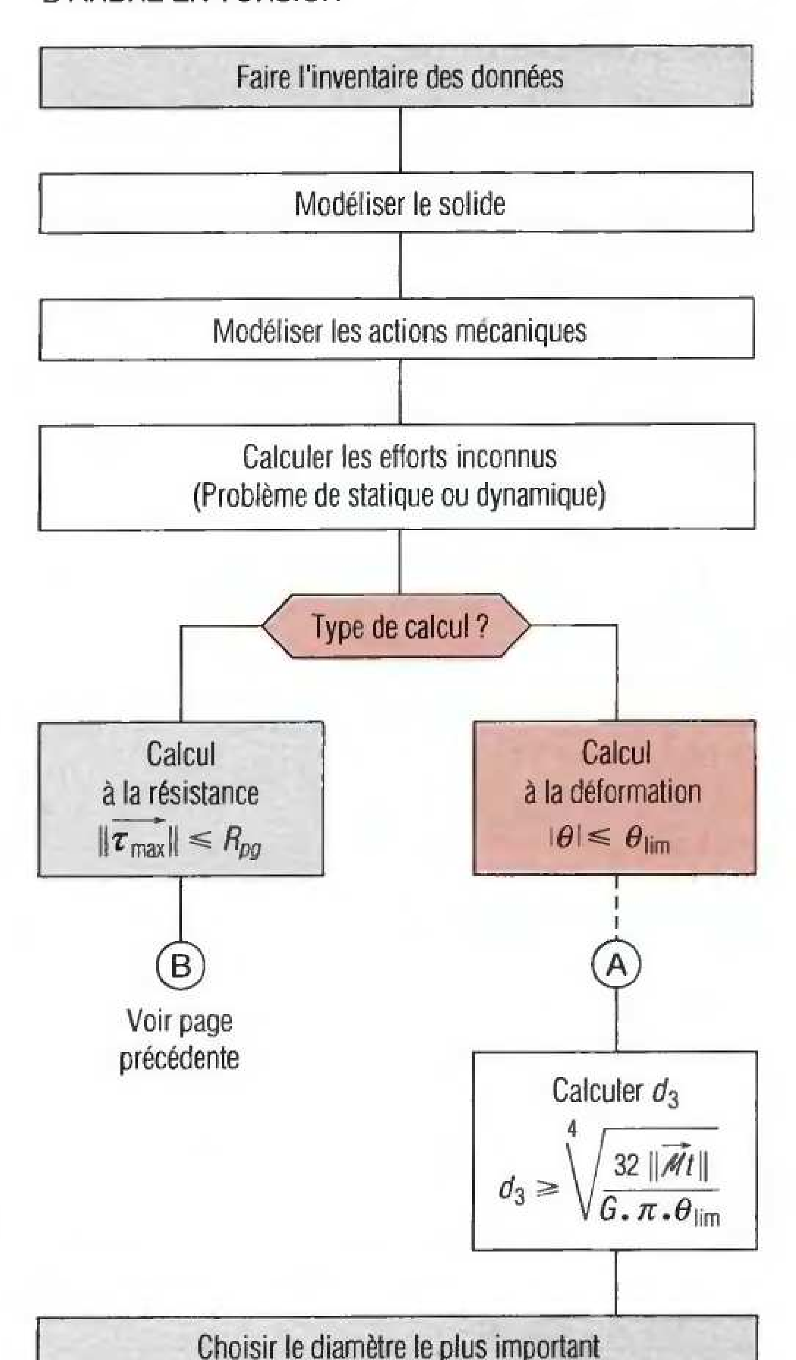
- Le calcul de résistance sans concentration de contrainte donne un diamètre $d_1 \geqslant 16{,}9$ mm ; $d_1 = 18$ mm.
- Le calcul de résistance avec concentration de contrainte donne : $d_2 = 35$ mm.
- Le calcul à la déformation donne un diamètre : $d_3 = 44$ mm.

Choisir le diamètre d_3 (cas le plus défavorable). $d_3 = 44$ mm.

REMARQUE :

Dans la majorité des cas, **la condition de déformation $\theta_{lim} = 0{,}1$°/m est la condition déterminante** par rapport à la condition de résistance, en ce sens qu'elle donne un diamètre supérieur à celui calculé à la résistance.

ÉTAPES PRINCIPALES DU CALCUL D'UN DIAMÈTRE D'ARBRE EN TORSION



CONSEIL POUR LES UNITÉS D'ANGLES

Soit à convertir $\alpha = 0{,}1$ ° en radian : afin d'éviter des erreurs, il est conseillé de procéder de la façon suivante :

$$180° = \pi \text{ rad}$$

$$\text{donc} \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{et } 1 \times 0{,}1° = \frac{\pi}{180} \times 0{,}1 \text{ rad}$$

$$0{,}1° = \frac{0{,}1 \times \pi}{180} \text{ rad}$$

51 ■ 122 Ressorts hélicoïdaux à fil rond

SOLLICITATIONS DANS UN RESSORT :

Le ressort **1** est soumis à deux résultantes opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ portées par l'axe du ressort. En effectuant une coupure (*S*) et en isolant le tronçon supérieur, on calcule les éléments de réduction en *G* du torseur des forces de cohésion (fig. 2).

- Effort normal : $\|\vec{N}\| = \|\vec{F}\| \sin \alpha$.
- Effort tranchant : $\|\vec{T}\| = \|\vec{F}\| \cos \alpha$.
- Moment de torsion : $\|\vec{Mt}\| = \|\vec{F}\| \cdot R \cdot \cos \alpha$ (avec $2R = D$).
- Moment de flexion : $\|\vec{Mf}\| = \|\vec{F}\| \cdot R \cdot \sin \alpha$

α, angle d'inclinaison de l'hélice étant faible (5 à 6°), on peut écrire que : $\sin \alpha \approx 0$ et $\cos \alpha \approx 1$.

$\|\vec{N}\|$ et $\|\vec{Mf}\|$ sont donc négligeables. Il reste $\|\vec{T}\| = \|\vec{F}\|$: la sollicitation de cisaillement donne une contrainte négligeable.

$\|\vec{Mt}\| = \|\vec{F}\| \cdot R$: la sollicitation de torsion est la sollicitation déterminante.

CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS:

L'application des relations fondamentales de torsion aux ressorts hélicoïdaux à fil rond conduisent aux relations suivantes avec (voir fig. 1 et 3) :

D : diamètre d'enroulement de l'hélice moyenne (mm).
d : diamètre du fil (normalisé) (en mm).
n : nombre de spires utiles (spires capables de se déformer).
ℓ_0 : longueur libre du ressort (non comprimé) (en mm).
G : module d'élasticité transversale (de Coulomb) (en MPa)*.
$\|\vec{F}\|$: force appliquée sur le ressort.

La flèche *f* du ressort sous l'action de $\|\vec{F}\|$ est (en mm) :

$$f = \frac{8\|\vec{F}\| \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$

La rigidité *k* du ressort est (en N/mm) :

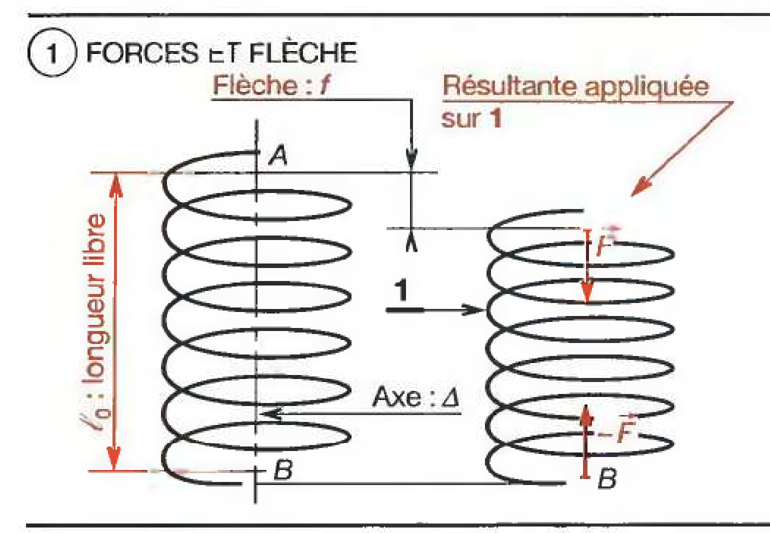
$$k = \frac{\|\vec{F}\|}{f} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

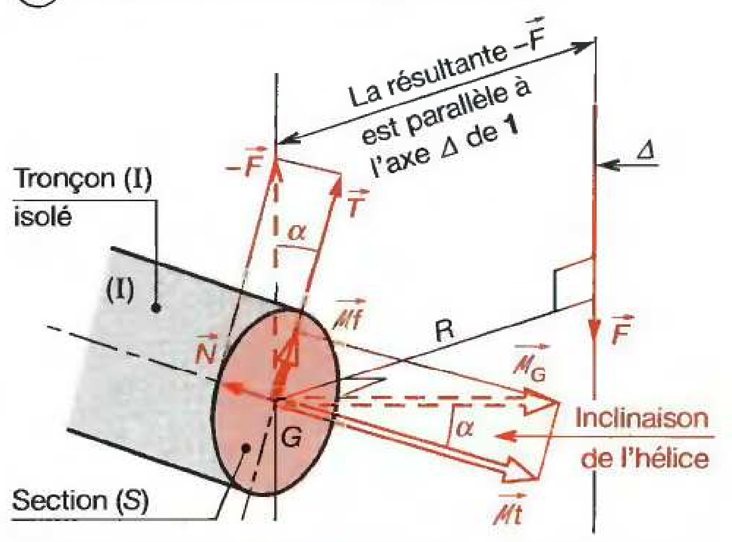
La contrainte maximale de torsion dans le fil est (en MPa) :

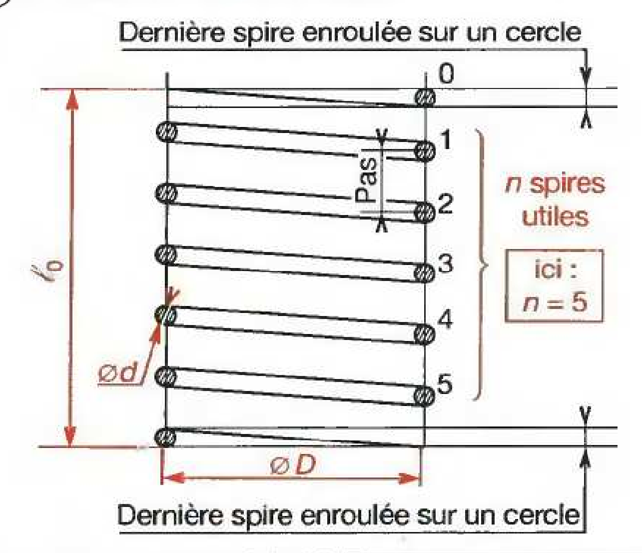
$$\|\vec{\tau_{max}}\| = \frac{8\|\vec{F}\| \cdot D}{\pi \cdot d^3}$$

Pour que le ressort résiste, dans les conditions de sécurité imposées, il faut que la contrainte maximale reste inférieure à la résistance pratique au glissement R_{pg}.

$$\frac{8\|\vec{F}\| \cdot D}{\pi \cdot D^3} \leq R_{pg}$$







Pour obtenir un appui plan perpendiculaire à l'axe du ressort, on prévoit toujours deux spires supplémentaires qui sont meulées. La longueur libre est donc supérieure à celle calculée (1 pas environ).

EXEMPLE :

Un ressort hélicoïdal à fil rond doit supporter une charge $\|\vec{F}\| = 450$ N avec une flèche de 30 mm. Il est en acier allié de résistance élastique au glissement $R_{eg} = 560$ MPa et de module de Coulomb $G = 82\,000$ MPa. Le coefficient de sécurité est : $s = 2$ (bonne construction, voir tableau § 48.5). Calculer les caractéristiques D, d, n, ℓ_0 du ressort.

SOLUTION :

1° Choisir le diamètre d'enroulement D : Des contraintes d'encombrements imposent souvent D. Ici : $D = 50$ mm.

2° Calculer le diamètre du fil d :

$$\frac{8\|\vec{F}\|.D}{\pi.d^3} \leqslant R_{pg} \; ; \; d \geqslant \sqrt[3]{\frac{8\|\vec{F}\|.D}{\pi.R_{pg}}} \; ; \; R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s} = \frac{560}{2}$$

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{8 \times 450 \times 50}{\pi \times 280}} \quad ; \quad d \geqslant 5{,}89 \text{ mm}$$

Adoptons $\mathbf{d = 6}$ **mm**.

3° Calculer le nombre de spires :

$$k = \frac{\|\vec{F}\|}{f} \; ; \; k = \frac{450}{30} \; ; \; k = 15 \text{ N/mm}.$$

$$k = \frac{G.d^4}{8.D_3.n} \; ; n = \frac{G.d^4}{8.D^3.k} \; ; n = \frac{82\,000 \times 6^4}{8 \times 50^3 \times 15} \; ; n = 7{,}08.$$

On peut choisir $n = 7{,}5$ spires.*

4° Calculer la longueur du ressort sous charge maximale : Les spires ne doivent pas être jointives quand le ressort est chargé au maximum. Soit un intervalle de 1,5 mm entre chaque spire. Longueur libre du ressort sous charge maximale :

$$\ell_1 = n(d + 1{,}5) \; ; \; \ell_1 = 7{,}5\,(6 + 1{,}5) \; ; \; \boldsymbol{\ell_1 \approx 56} \textbf{ mm}.$$

Longueur libre du ressort :

$$\ell_0 = \ell_1 + f \; ; \; \ell_0 = 56 + 30 \; ; \; \boldsymbol{\ell_0 = 86} \textbf{ mm}.$$

Pas d'hélice à l'état libre (non comprimé) :

$$p = \frac{\ell_0}{n} \; ; \; p = \frac{80}{7{,}5} \; ; \; \boldsymbol{p = 11{,}4} \textbf{ mm}.$$

5° Modifications dues à la fabrication du ressort : Adoptons pour le pas une valeur plus simple à réaliser. Par exemple : $p = 12$ mm. Dans ces conditions :

La longueur libre est : $\ell_0 = p \times n = 12 \times 7{,}5$. $\ell_0 = 90$ mm.

La longueur sous charge max est : $\ell_1 = \ell_0 - f$; $\ell_1 = 90 - 30$

$\boldsymbol{\ell_1 = 60}$ **mm**.

L'intervalle i entre deux spires sous charge max est :

$$\ell_1 = n(d + i) \; ; \; i = \frac{\ell_1}{n} - d \; ; \; i = \frac{60}{7{,}5} - 6 \; ; \; \boldsymbol{i = 2} \textbf{ mm}.$$

PRINCIPALES ÉTAPES DE CALCUL D'UN RESSORT HÉLICOÏDAL

Faire l'inventaire des données :
- Force $\|\vec{F}\|$ connue (résolution du problème de statique préalable)
- Encombrement diamétral imposé
- Course imposée (par exemple)

↓

Choisir D (d'après contrainte d'encombrement)

↓

Choisir le matériau du ressort (R_e) et déterminer R_{eg} et R_{pg}

↓

Écrire la condition de résistance $|\tau|_{max} < R_{pg}$

$$\frac{8\|\vec{F}\|.D}{\pi.d^3} \leqslant R_{pg}$$

Calculer le diamètre : d du fil

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{8\|\vec{F}\|.D}{\pi.R_{pg}}}$$

↓

Choisir un diamètre d de fil normalisé et vérifier que $\frac{D}{d}$ est correct du point de vue de la faisabilité**

↓

Choisir la flèche f. Un critère fonctionnel (course par exemple) impose une flèche

↓

Écrire l'équation de déformation :

$$f = \frac{8\|\vec{F}\|.D^3.n}{G.d^4}$$

Calculer le nombre de spires : n

$$n = \frac{f.G.d^4}{8\|\vec{F}\|.D^3}$$

↓

Choisir le nombre de spires (en général un multiple de 0,5)

↓

Choisir l'intervalle : i entre deux spires comprimées

↓

Calculer la longueur comprimée $\ell_1 = n(d + i)$
Calculer la longueur libre $\ell_0 = \ell_1 + f$

↓

Vérifier le non flambage du ressort**
Si le risque existe, guider le ressort sur toute la longueur

* Sans tenir compte du meulage des extrémités. ** Consulter des ouvrages spécialisés.

51 ▪ 13 Méthodes de calculs en torsion

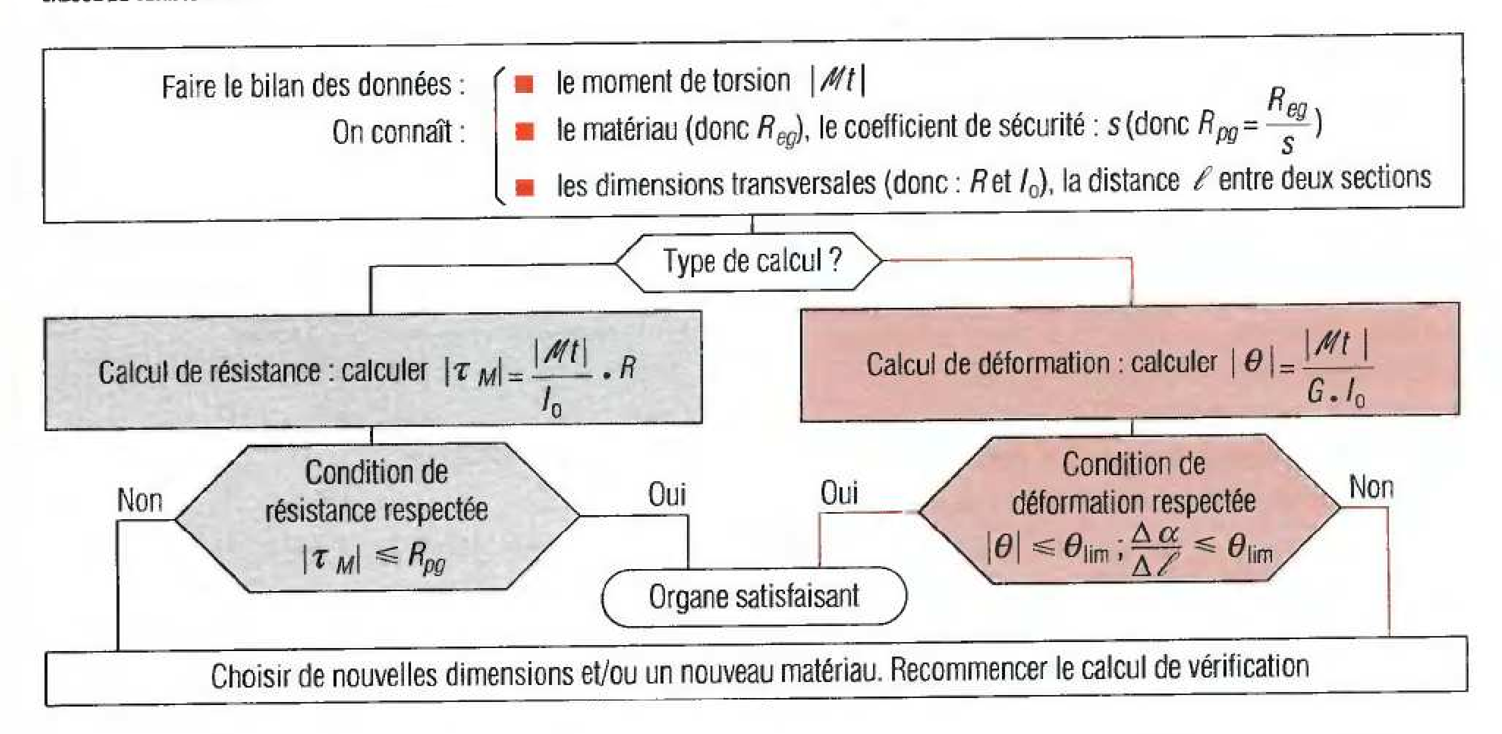
Il existe deux méthodes de calculs en torsion :

▪ **Le calcul de vérification** : le moment de torsion est connu, l'organe est déterminé (dimensions, matériaux connus) et on vérifie s'il convient. Si cela n'est pas le cas, on calcule de nouvelles dimensions, et/ou on change de matériau.

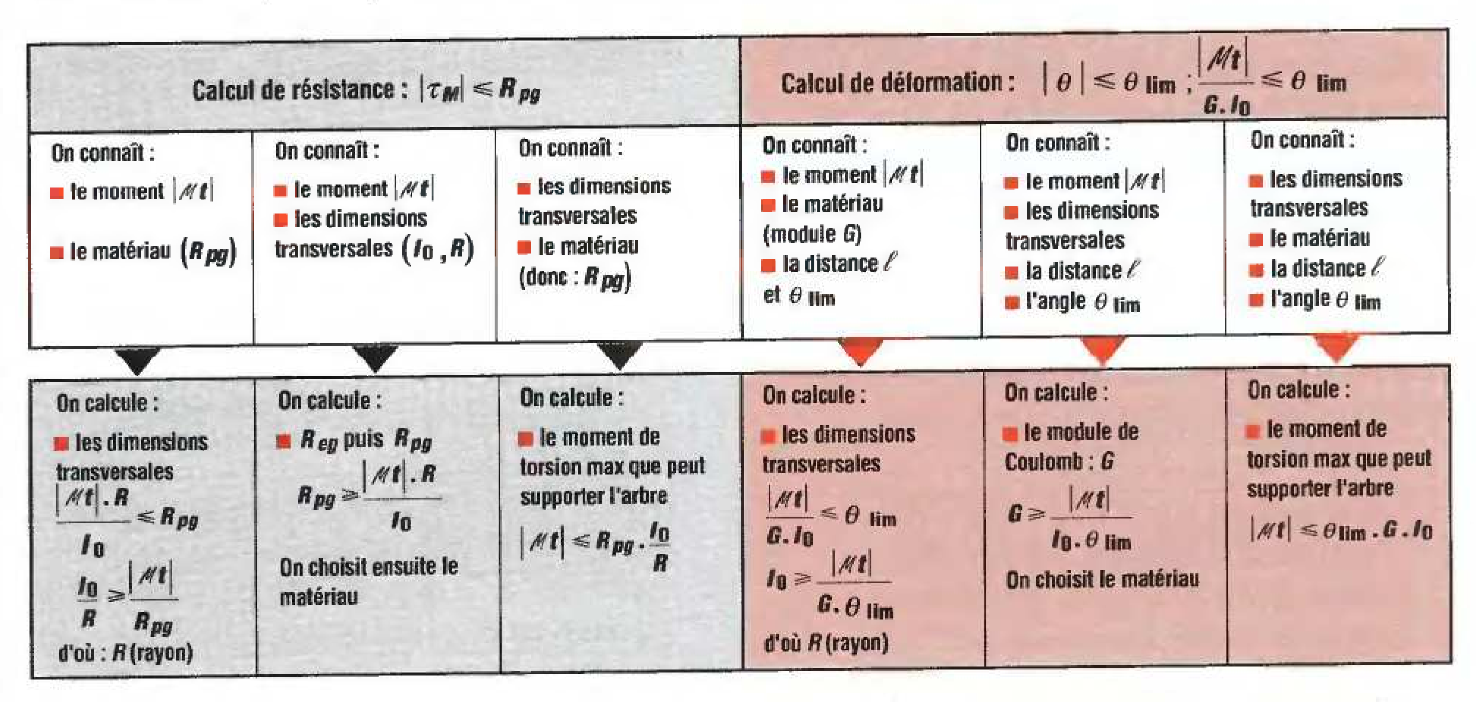
▪ **Le calcul de détermination** : le moment de torsion est connu (par exemple), le matériau est déterminé et on calcule les dimensions.

Dans les deux cas, on peut faire soit un **calcul de résistance** (contraintes déterminantes), soit un **calcul de déformation** (déformations déterminantes), soit les deux types de calcul.

CALCUL DE VÉRIFICATION :



CALCUL DE DÉTERMINATION (voir exemple § 51.121) :



Calcul de résistance : $\lvert\tau_M\rvert \leq R_{pg}$			**Calcul de déformation : $\lvert\theta\rvert \leq \theta_{lim}$; $\frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert}{G \cdot I_0} \leq \theta_{lim}$**		
On connaît : ▪ le moment $\lvert\mathcal{M}t\rvert$ ▪ le matériau (R_{pg})	On connaît : ▪ le moment $\lvert\mathcal{M}t\rvert$ ▪ les dimensions transversales (I_0, R)	On connaît : ▪ les dimensions transversales ▪ le matériau (donc : R_{pg})	On connaît : ▪ le moment $\lvert\mathcal{M}t\rvert$ ▪ le matériau (module G) ▪ la distance ℓ et θ_{lim}	On connaît : ▪ le moment $\lvert\mathcal{M}t\rvert$ ▪ les dimensions transversales ▪ la distance ℓ ▪ l'angle θ_{lim}	On connaît : ▪ les dimensions transversales ▪ le matériau ▪ la distance ℓ ▪ l'angle θ_{lim}
On calcule : ▪ les dimensions transversales $\frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert \cdot R}{I_0} \leq R_{pg}$ $\frac{I_0}{R} \geq \frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert}{R_{pg}}$ d'où : R (rayon)	On calcule : ▪ R_{eg} puis R_{pg} $R_{pg} \geq \frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert \cdot R}{I_0}$ On choisit ensuite le matériau	On calcule : ▪ le moment de torsion max que peut supporter l'arbre $\lvert\mathcal{M}t\rvert \leq R_{pg} \cdot \frac{I_0}{R}$	On calcule : ▪ les dimensions transversales $\frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert}{G \cdot I_0} \leq \theta_{lim}$ $I_0 \geq \frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert}{G \cdot \theta_{lim}}$ d'où R (rayon)	On calcule : ▪ le module de Coulomb : G $G \geq \frac{\lvert\mathcal{M}t\rvert}{I_0 \cdot \theta_{lim}}$ On choisit le matériau	On calcule : ▪ le moment de torsion max que peut supporter l'arbre $\lvert\mathcal{M}t\rvert \leq \theta_{lim} \cdot G \cdot I_0$

52 Flexion simple

52.1 Hypothèses

■ **Le solide est idéal** : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne, des sections constantes avec plan de symétrie.

■ **Les actions extérieures** sont modélisables par des résultantes contenues dans le plan de symétrie (*P*) et perpendiculaires à la ligne moyenne :

$$_A\{A_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad _C\{C_{4/1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \overrightarrow{C_{4/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ etc.}$$

avec $\overrightarrow{A_{2/1}} = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| . \vec{y}$ et $\overrightarrow{C_{4/1}} = -\|\overrightarrow{C_{4/1}}\| . \vec{y}$ etc.

52.2 Définition

Une poutre est sollicitée à la flexion si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) de la poutre sur la partie gauche (I), peut se réduire en *G*, barycentre de la section droite (*S*), à une **résultante contenue dans le plan de symétrie** et **un moment perpendiculaire à ce dernier.**

$_G\{\text{Coh}_{II/I}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{T_y} \\ \overrightarrow{Mf_{Gz}} \end{Bmatrix}$	**Dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:** $N = 0$; $T_y \neq 0$; $T_z = 0$; $Mt = 0$; $Mf_{Gy} = 0$; $Mf_{Gz} \neq 0$

REMARQUE :

$$_G\{\text{Coh}_{II/I}\} = -\{\text{Actions ext. à gauche}/_I\}$$
$$= +\{\text{Actions ext. à droite}/_{II}\}$$

52.3 Contraintes normales

Lorsque la poutre fléchit, la section droite et plane (S_2), par exemple, pivote d'un angle $\Delta\varphi$ autour de l'axe ($G_2, \vec{z}$) perpendiculaire au plan de symétrie. On constate que :

■ Les fibres contenues dans le plan passant par les barycentres *G* des sections (S_1) ne changent pas de longueur, les contraintes $\overrightarrow{\sigma_M}$ sont donc nulles en ces points.

■ Les autres fibres s'allongent ou se raccourcissent. Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à l'ordonnée qui les séparent du plan des fibres neutres, d'où :

$$\sigma_M = -E.y.\theta$$

σ_M : contrainte normale au point *M* due à la flexion (MPa)*.

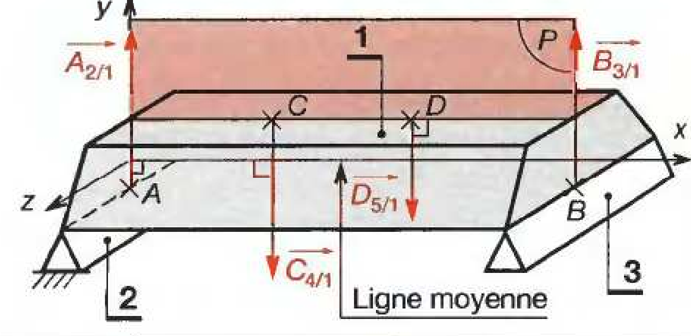
E : module d'élasticité longitudinal (d'Young) (MPa).

y : ordonnée du point *M* / au plan de la fibre neutre (mm).

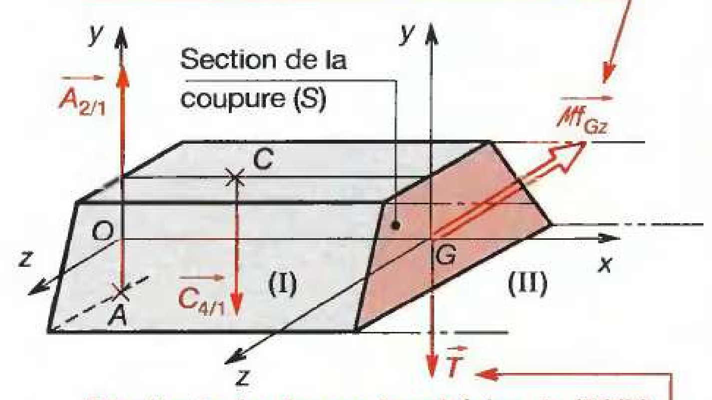
θ : angle unitaire de flexion (rad/mm) avec $\theta = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}$.

* 1 MPa = 1 N / mm².

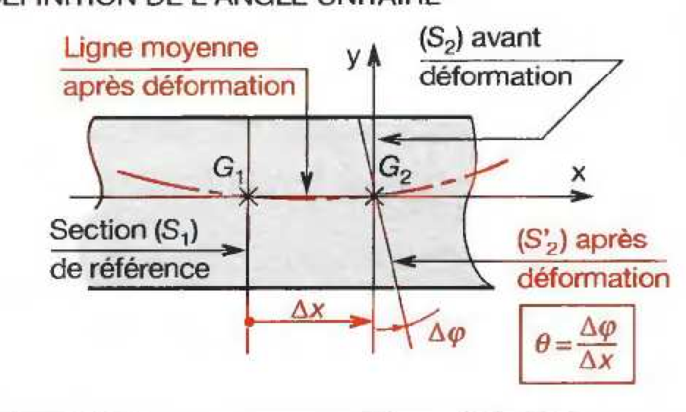
SOLIDE IDEAL



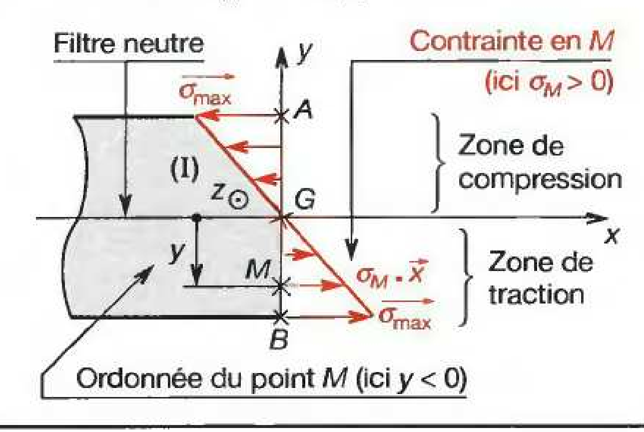
ISOLEMENT D'UNE PARTIE GAUCHE (I)



DÉFINITION DE L'ANGLE UNITAIRE



RÉPARTITION DES $\overrightarrow{\sigma_M}$ DANS (S)



52.4 Valeurs des contraintes normales

En un point quelconque M, de la section droite (S), on a (fig. 3) :

$$\sigma_M = -\frac{Mf_{Gz}}{I_{Gz}} \cdot y$$

σ_M : contrainte normale en M due à la flexion (MPa).
Mf_{Gz} : moment de flexion selon $(G, \vec{z})$ dans (S) (N . mm).
I_{Gz} : moment quadratique de la section droite (S) / à $(G, \vec{z})$ (mm^4) (voir définition et valeurs § 52.5).
y : ordonnée du point M dans $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (mm).

VALEUR DE LA CONTRAINTE NORMALE :
En un point M, le plus éloigné de $(G, \vec{z})$, on écrit que :

$$|\sigma|_{max} = \frac{|Mf_{Gz}|}{I_{Gz}} \cdot |y|_{max} \quad ; \quad |\sigma|_{max} = \frac{|Mf_{Gz}|}{\left(\frac{I_{Gz}}{|y|_{max}}\right)}$$

$|y|_{max} = v$: ordonnée du point le plus éloigné de $(G, \vec{z})$ (mm).
$\frac{I_{Gz}}{|y|_{max}} = \frac{I_{Gz}}{v}$: module de flexion de la section droite (S) (mm^3).

REMARQUE :
La flexion simple provoque des contraintes normales $\overrightarrow{\sigma_M}$, des contraintes tangentielles transversales $\overrightarrow{\tau_M}$, des contraintes longitudinales $\overrightarrow{\tau'_M}$ (voir (52.8). Le calcul σ_M est, en général, suffisant (exception : poutres très chargées, de grande hauteur par rapport à leur longueur et au voisinage de certains appuis).

52.5 Moment quadratique d'une section

52.51 Définition

Le moment quadratique d'une section par rapport à un axe contenu dans son plan est :

$$I_{Oz} = \sum_{(S)} (y^2 . \Delta S) = \int_{(S)} y^2 \, dS$$

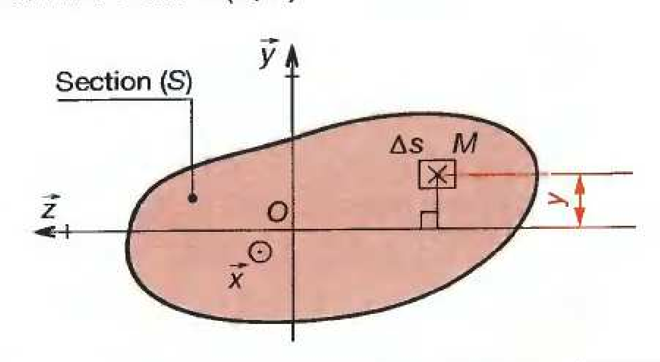
I_{Oz} : moment quadratique de (S) par rapport à $(O, \vec{z})$ (mm^4).
y : distance du point M à l'axe $(O, \vec{z})$ (mm).
Δs : surface élémentaire entourant le point M (mm^2).

REMARQUE :
Le moment quadratique polaire (voir § 51.5) d'une section (S) par rapport à $(O, \vec{x})$ perpendiculaire en O à son plan est égal à la somme des moments quadratiques de (S) par rapport à deux axes perpendiculaires contenus dans le plan de (S), passant par O (fig. 2).

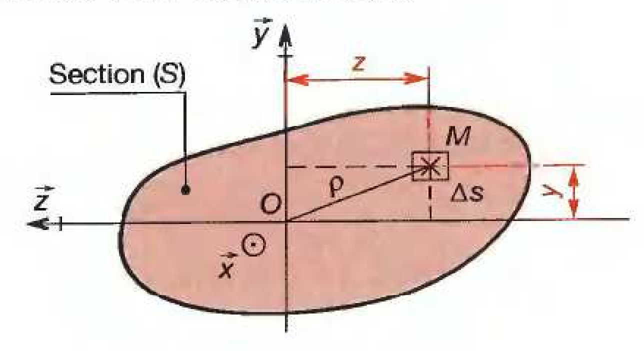
CONTRAINTES NORMALES

Point le plus éloigné de l'axe $(G, \vec{z})$
Ordonnée de M_1 (ici $y_1 > 0$)
(I) (II) M_1 M_2 M_3 Δs_1 Δs_3 G $\overrightarrow{\sigma_{M1}}$ $\overrightarrow{\sigma_{M2}}$ $\overrightarrow{\sigma_{max}}$ $y_{max} = v$ $\overrightarrow{Mf_{Gz}} . \vec{z}$ y_1 y_2 $\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$ $\vec{T_y}$
Section droite (S)
Ordonnée de M_2 (ici $y_2 < 0$)

MOMENT QUADRATIQUE DE (S) PAR RAPPORT À $(O, \vec{z})$



MOMENT QUADRATIQUE DE (S) PAR RAPPORT À $(O, \vec{y})$ ET $(O, \vec{x})$



$$I_{Oy} = \sum_{(S)} (z^2 . \Delta S)$$

Comme $\rho^2 = z^2 + y^2$

$$\sum_{(S)} (\rho^2 \Delta s) = \sum_{(S)} (z^2 \Delta s) + \sum_{(S)} (y^2 \Delta s)$$

$$I_O = I_{Oy} + I_{Oz}$$

EXEMPLE DE CALCUL :

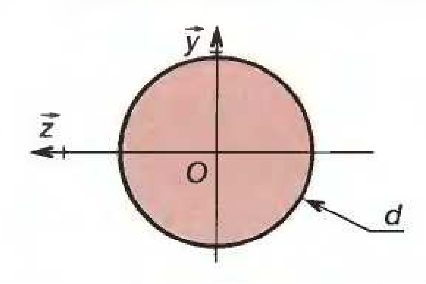
Déterminer I_{Oz} pour une section circulaire de diamètre d, sachant que le moment quadratique polaire est : $I_O = \frac{\pi d^4}{32}$

SOLUTION :

$I_O = I_{Oy} + I_{Oz}$ comme $I_{Oy} = I_{Oz}$ (symétrie)

$I_O = 2 I_{Oz}$ $\quad I_{Oz} = I_O / 2 = \pi d^4 / 64$.

MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SECTION CIRCULAIRE



52.52 Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une section par rapport à un axe contenu dans son plan est égal au moment quadratique de cette section par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son barycentre, augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

$$I_{Oy} = I_{Gy} + S \cdot d^2$$

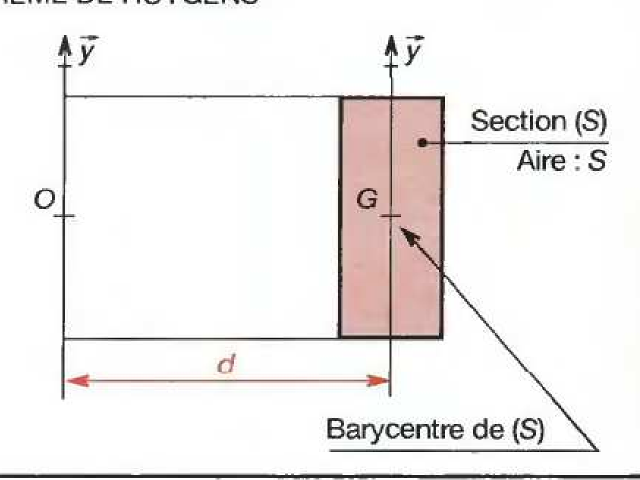
I_{Oy} : moment quadratique de (S) par rapport à $(O, \vec{y})$ (mm⁴).

I_{Gy} : moment quadratique de (S) par rapport à $(G, \vec{y})$ (mm⁴).

S : aire de la section (S) (mm²).

d : distance entre les axes $(O, \vec{y})$ et $(G, \vec{y})$ (mm).

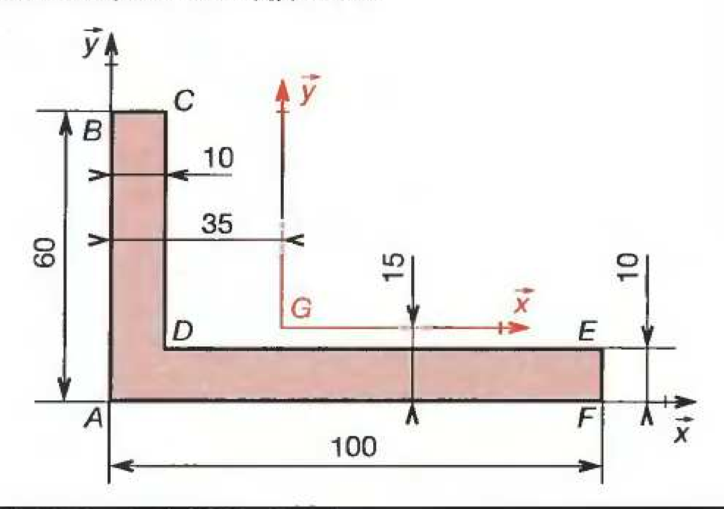
THÉORÈME DE HUYGENS



EXEMPLE :

On donne la section plane (S) en forme d'équerre et la position de son barycentre G dans le repère $(A, \vec{x}, \vec{y})$ $\overrightarrow{AG}$: (35,15) (dimensions en mm). On demande de calculer I_{Gx} de (S) :

DIMENSIONS DE L'ÉQUERRE



SOLUTION :

Décomposer (S) en deux rectangles *AKEF* et *BCDK*.

Moment quadratique par rapport à $(G_1, \vec{x})$ de *AKEF* :

$$I_{1\,G1x} = \frac{100 \times 10^3}{12} \qquad \text{(d'après § 52.521)}$$

Moment quadratique par rapport à $(G, \vec{x})$ de *AKEF*.

$$I_{1\,Gx} = I_{1\,G1x} + S_1 \cdot d_1^2 \qquad \text{(théorème de Huygens)}$$

$$I_{1\,Gx} = \frac{100 \times 10^3}{12} + (100 \times 10) \times 10^2 = \frac{10^5}{12} + 10^5$$

Moment quadratique par rapport à $(G_2, \vec{x})$ de *BCDK* :

$$I_{2\,G2x} = \frac{10 \times 50^3}{12} \qquad \text{(d'après § 52.521)}$$

Moment quadratique par rapport à $(G, \vec{x})$ de *BCDK* :

$$I_{2\,Gx} = \frac{10 \times 50^3}{12} + (50 \times 10) \times 20^2 = \frac{125 \times 10^4}{12} + 20 \times 10^4$$

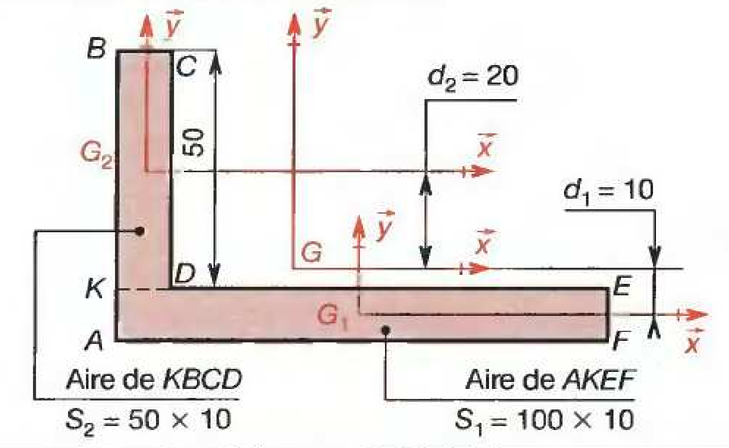
Moment quadratique de (S) :

$$I_{Gx} = I_{1\,Gx} + I_{2\,Gx}$$

$$I_{Gx} = \left(\frac{10^5}{12} + 10^5\right) + \left(\frac{125 \times 10^4}{12} + 20 \times 10^4\right)$$

$$\boldsymbol{I_{Gx} = 41{,}2 \times 10^4 \text{ mm}^4.}$$

DÉCOMPOSITION DE L'ÉQUERRE



52 ■ 52 VALEURS DE MOMENTS QUADRATIQUES PARTICULIERS

52 ■ 521 SECTIONS PRÉSENTANT UNE SYMÉTRIE CENTRALE

Sections (S) / Caractéristiques						
I_{Gy}	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{hb^3 - h'b'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0{,}784\ ab^3$
I_{Gz}	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$0{,}784\ a^3 b$
$I_0 = I_G$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$\frac{a^4}{6}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$
Module de flexion * μ_{Gy}	$\frac{hb^2}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6b}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4)$	$0{,}784\ ab^2$
Module de flexion * μ_{Gz}	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi}{32D}(D^4 - d^4)$	$0{,}784\ ba^2$

52 ■ 521 SECTIONS NE PRÉSENTANT PAS UNE SYMÉTRIE CENTRALE

Sections (S) / Caractéristiques			
u	$\frac{(a^2 + ea - e^2)}{(4a - 2e)}$		
v	$\frac{(a^2 + ea - e^2)}{(4a - 2e)}$	$\frac{2a^2e + (b - 2e)e_1^2}{2[2ae + (b - 2e)e_1]}$	$\frac{a^2 + (b - e)(2a - e)}{2\ (a + b - e)}$
I_{Gy}	$\frac{1}{2}\left[e(a - v)^3 + av^3 - (a - e)(v - e)^3\right]$	$\frac{ab^3}{12} - \frac{(a - e_1)\,b'^3}{12}$	$\frac{eb^3 - (a - e)e^3}{12}$
I_{Gz}	$\frac{1}{3}\left[e(a - v)^3 + av^3 - (a - e)(v - e)^3\right]$	$\frac{ba^3}{3} - \frac{b'(a - e_1)^3}{3}$ ... ... $+ (2ae + b'e_1)\,.\,(a - v)^2$	$\frac{e}{3}\left[be^2 + a^3 - e^3 \right.$ ... ... $\left. - \frac{3}{4}\ \frac{(a^2 + eb - e^2)^2}{a + b - e}\right]$
I_G	$2\,.\,I_{Gz}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$	$I_{Gy} + I_{Gz}$
Module de flexion * μ_{Gy}	$\frac{I_{Gy}}{a - u}$	$\frac{2.I_{Gy}}{b}$	$\frac{e}{6}\left[b^2 + \frac{(a - e)e^2}{b}\right]$
Module de flexion * μ_{Gz}	$\frac{I_{Gz}}{a - v}$	$\frac{I_{Gz}}{a - v}$	$\frac{I_{Gz}}{v}$

* Voir définition § 52.4 et le choix des axes § 52.323.

52 ■ 523 Sections de poutrelles IPN — NF A 45 - 209

Choix de l'axe de calcul :

① Prendre les valeurs relatives à l'axe *Gx*

② Prendre les valeurs relatives à l'axe *Gy*

Dimensions (mm)				Sections (cm^2)	Masses* linéiques (kg/m)	Moments quadratiques (cm^4)		Modules de flexion (cm^3)		Rayons de giration (cm)	
H	B	E	E'	s	p	I_{Gx}	I_{Gy}	$\frac{I_{Gx}}{v_x}$	$\frac{I_{Gy}}{v_y}$	r_x	r_y
80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	77,8	6,29	19,5	3,00	3,20	0,91
100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	171	12,2	34,2	4,88	4,01	1,07
120	58	5,1	7,7	14,2	11,2	328	21,5	54,7	7,41	4,81	1,23
140	66	5,7	8,6	18,3	14,4	573	35,2	81,9	10,7	5,61	1,40
160	74	6,3	9,5	22,8	17,9	935	54,7	117	14,8	6,40	1,55
180	82	6,9	10,4	27,9	21,9	1 450	81,3	161	19,8	7,20	1,71
200	90	7,5	11,3	33,5	26,3	2 140	117	214	26,0	8,00	1,87
220	98	8,1	12,2	39,6	31,1	3 060	162	278	33,1	8,80	2,02
240	106	8,7	13,1	46,1	36,2	4 250	221	354	41,7	9,59	2,20
260	113	9,4	14,1	53,4	41,9	5 740	288	442	51,0	10,4	2,32
280	119	10,1	15,2	61,1	48,0	7 590	364	542	61,2	11,1	2,45
300	125	10,8	16,2	69,1	54,2	9 800	451	653	72,2	11,9	2,56
320	131	11,5	17,3	77,8	61,1	12 510	555	782	84,7	12,7	2,67
340	137	12,2	18,3	86,8	68,1	15 700	674	923	98,4	13,5	2,80
360	143	13	19,5	97,1	76,2	19 610	818	1 090	114	14,2	2,90
400	155	14,4	21,6	118	92,6	29 210	1 160	1 460	149	15,7	3,13
450	170	16,2	24,3	147	115	45 850	1 730	2 040	203	17,7	3,48
500	185	18	27,0	180	141	68 740	2 480	2 750	268	19,6	3,72

52 ■ 524 Sections de poutrelles UPN et UPS — NF A 45 - 202

Choix de l'axe de calcul

① Prendre les valeurs relatives à l'axe *Gx*

② Prendre les valeurs relatives à l'axe *Gy*

Dimensions (mm)				Sections (cm^2)	Masses* linéiques (kg/m)	Positions de G (cm)		Moments quadratiques (cm^4)		Modules de flexion (cm^3)		Rayons de giration (cm)	
H	B	E	E'	s	p	D_1	D_2	I_{Gx}	I_{Gy}	$\frac{I_{Gx}}{v_x}$	$\frac{I_{Gy}}{v_y}$	r_x	r_y
UPN — PROFILS NORMAUX													
80	45	6	8	11,00	8,64	1,45	3,05	106	19,4	26,5	6,36	3,1	1,33
100	50	6	8,5	13,50	10,60	1,55	3,45	206	29,3	41,2	8,49	3,91	1,47
120	55	7	9	17,00	13,40	1,6	3,9	364	43,2	60,7	11,1	4,62	1,59
140	60	7	10	20,40	16,00	1,75	4,25	605	62,7	86,4	14,8	5,45	1,75
160	65	7,5	10,5	24,00	18,80	1,84	4,66	925	85,3	116	18,3	6,21	1,89
180	70	8	11	28,00	22,00	1,92	5,08	1 350	114	150	22,4	6,95	2,02
200	75	8,5	11,5	32,20	25,30	2,01	5,49	1 910	148	191	27	7,7	2,14
220	80	9	12,5	37,40	29,40	2,14	5,86	2 690	197	245	33,6	8,48	2,26
240	85	9,5	13	42,30	33,20	2,23	6,27	3 600	248	300	39,6	9,22	2,42
260	90	10	14	48,30	37,90	2,36	6,64	4 820	317	371	47,7	9,99	2,56
300	100	10	16	58,80	46.20	2,7	7,3	8 030	495	535	67,8	11,7	2,90
UPN — PROFILS SPÉCIAUX													
250	80	10	11,5	41,37	32,48	1,93	6,07	3 533	199	282	32,9	9,2	2,21
250	100	10	16	53,80	42,23	2,96	7,04	5 166	475	412	67	9,80	2,97

* Les masses linéiques sont calculées en admettant pour l'acier une masse volumique de 7,85 kilogrammes par décimètre cube.

52 ■ 6 Condition de résistance

Pour des **raisons de sécurité**, la contrainte normale due à la flexion doit rester inférieure à la **résistance pratique à l'extension**. On définit R_{pe} par le quotient de la résistance élastique à l'extension R_e par le coefficient de sécurité : s (voir valeurs de s au § 48.5).

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

R_{pe} : résistance pratique à l'extension (en MPa).
R_e : résistance élastique à l'extension (en MPa).
s : coefficient de sécurité (sans unité).

La condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma|_{max} \leqslant R_{pe} \quad \text{ou} \quad \frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{\left(\frac{I_{Gz}}{|y|_{max}}\right)} \leqslant R_{pe}$$

DÉFINITION :

si on pose $|y|_{max} = v$ et $\frac{I_{Gz}}{v} = \mu_{Gz}$

μ_{Gz} est le **module de flexion**.

Ces grandeurs sont souvent données dans les catalogues de constructeurs de profilés.

EXEMPLE 1 : CALCUL DE VÉRIFICATION

La bride **2**, modélisée comme une poutre, est soumise à de la flexion simple (voir identification de la sollicitation § 46.5).
Le diagramme de flexion ci-contre montre que :

$$Mf_{Gz\,max} = 36\,000 \text{ N.mm}.$$

Les dimensions de la section droite en F sont définies sur la section G-G. On adopte pour résistance pratique de l'acier :

$$R_{pe} = 150 \text{ MPa}.$$

Vérifier que la bride résiste à la flexion en considérant le solide comme parfait (voir hypothèses § 52.1).

SOLUTION :

1° Calculer la contrainte max en *A*

$$|\sigma|_{max} = \frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{I_{Gz}} \times |y|_{max} \qquad \text{(d'après § 52.4)}$$

Calculer I_{Gz} : $I_{Gz} = I_{Gz\,ABCD} - I_{Gz\,HIJK} - 2 \times I_{Gz\,LMNO}$

$$I_{Gz} = \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{b'h^3}{12} - \frac{2 \times ed^3}{12}\right) \qquad \text{(d'après § 52.531)}$$

$$I_{Gz} = \left(\frac{26 \times 15^3}{12} - \frac{14 \times 15^3}{12} - \frac{2 \times 6 \times 8^3}{12}\right)$$

$$I_{Gz} = 2\,863 \text{ mm}^4$$

La contrainte $|\sigma|_{max}$ est :

$$|\sigma|_{max} = \frac{3\,600}{2\,863} \times 7{,}5$$

$$|\sigma|_{max} = 94{,}3 \text{ MPa}$$

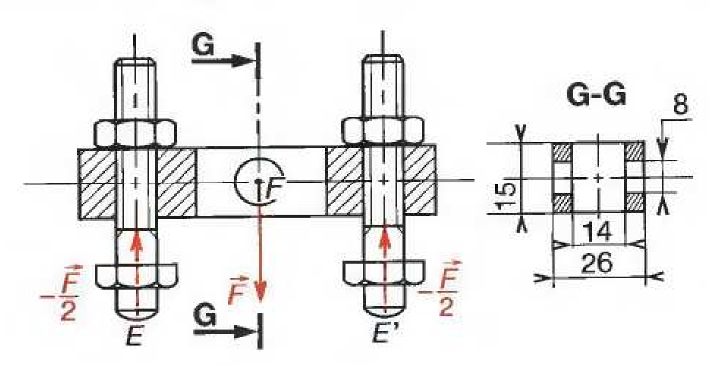
2° Écrire la condition de résistance

$|\sigma|_{max} \leqslant R_{pe}$

$94{,}3 \leqslant 150$ condition vérifiée.

La poutre comporte un alésage en F, c'est donc un solide réel (§ 52.7). Il faut maintenant déterminer le coefficient de concentration de contrainte et vérifier que $\|\overrightarrow{\sigma_{eff}}\| \leqslant R_{pe}$

BRIDE EN FLEXION



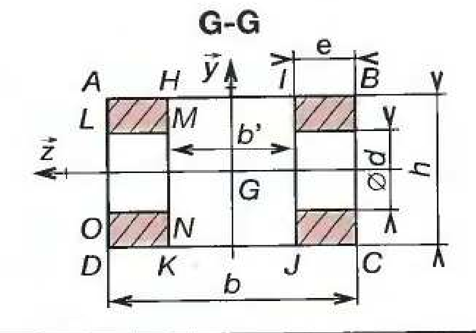
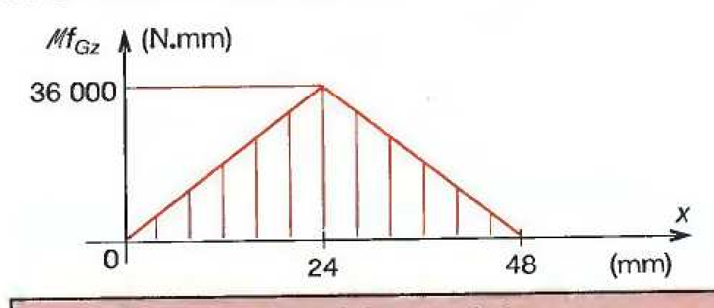


DIAGRAMME DU MOMENT DE FLEXION



Méthode générale de calcul

1° Modéliser le solide, les liaisons et calculer les actions inconnues par la statique.

2° Déterminer les sollicitations (T, Mf...) en effectuant des coupures. Calculer $|Mf|_{max}$.

3° Calculer la contrainte $|\sigma|_{max}$.

4° Vérifier la condition de résistance.

EXEMPLE 2 : CALCUL DE DIMENSIONNEMENT

Une poutre **1**, encastrée dans **2**, est constituée par un IPN de longueur 1,5 m. Elle supporte une charge uniformément répartie de coefficient p = 1 800 N/m. Sa résistance pratique est R_{pe} = 100 MPa. Déterminer la hauteur minimale de l'IPN.

SOLUTION :

- **Rechercher la section dans laquelle Mf est maximal.**

L'étude du diagramme Mf (voir § 52.933) montre de Mf est maximal en B, dans la section d'encastrement. Sa valeur est $|Mf_{Gz}|_{max} = 2\,025 \times 10^3$ N . mm

On pose $\mu_{Gz} = I_{Gz} / v = I_{Gz} / |y|_{max}$ (module de flexion).

- **Calculer la contrainte maximale :**

$$|\sigma_{max}| = \frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{\mu_{Gz}}$$

- **Écrire la condition de résistance et calculer μ_{Gz} :**

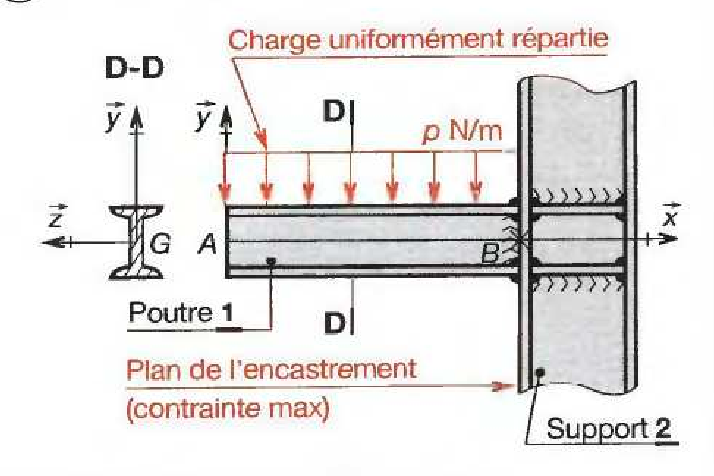
$$\frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{\mu_{Gz}} \leqslant R_{pe} \quad ; \quad \text{d'où } \mu_{Gz} \geqslant \frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{R_{pe}}$$

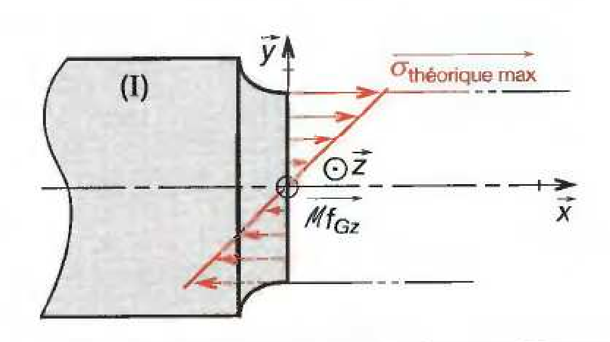
$$\mu_{Gz} \geqslant \frac{2\,025 \times 10^3}{100} \quad ; \quad \mu_{Gz} \geqslant 20\,250 \text{ mm}^3$$

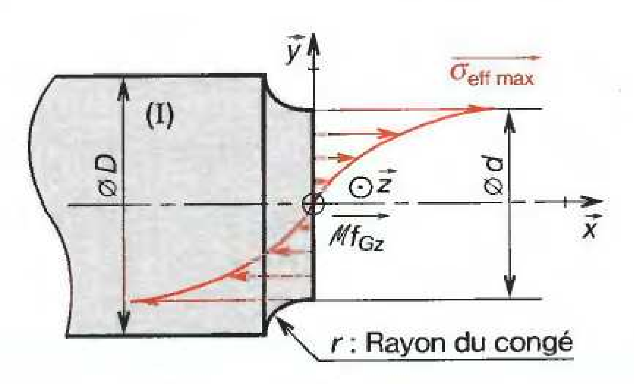
- **Convertir μ_{Gz} en cm^3** : (le tableau § 52.523 donne la valeur de μ_{Gz} en cm^3). On trouve : $\mu_{Gz} \geqslant 20{,}25$ cm^3.

- **Choisir l'IPN dans le tableau :**

L'IPN 100 a un module d'inertie μ_{Gz} = 34,2 cm^3 ; 34,2 ⩾ 20,2 ; **L'IPN 100 convient.**







52.7 Solide réel

Les poutres présentent souvent de brusques variations de sections. Dans les zones proches de ces variations, les formules précédentes ne s'appliquent plus. La répartition des contraintes n'est plus linéaire. **Il y a concentration de contrainte.**

$$|\sigma_{eff}|_{max} = K_f \, |\sigma_{théorique}|$$

$\sigma_{eff\,max}$: contrainte maximale effective (MPa).

$\sigma_{théorique}$: contrainte théorique sans concentration (MPa).

K_f : coefficient de concentration de contrainte relatif à la flexion.

K_f est déterminé par tableaux ou abaques (§ 52.7).

EXEMPLE :

Déterminer K_f pour un arbre épaulé tel que : D = 45, d = 30, rayon du congé r = 3.

SOLUTION :

$$\text{Calculer } \frac{D}{d} = \frac{45}{30} = 1{,}5 \quad ; \quad \text{calculer } \frac{r}{d} = \frac{3}{30} = 0{,}1$$

La courbe correspondante donne : K_f = 1,7.

Méthode de calcul d'un solide réel

1° Calculer $|\sigma_{théorique}|$.

2° Analyser la nature de la géométrie (épaulement, gorge...) et choisir la courbe correspondante.

3° Calculer $\frac{D}{d}$, $\frac{r}{d}$ ou $\frac{d}{h}$.

4° Déterminer la valeur de K_f correspondante.

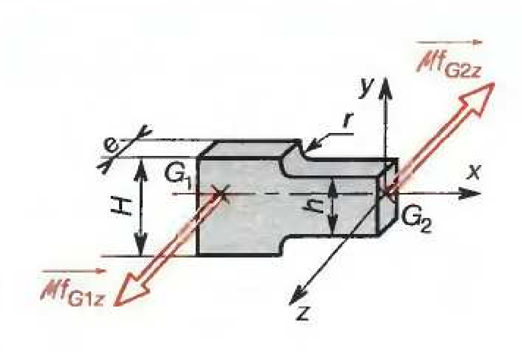
5° Calculer $|\sigma_{eff}|_{max} = K_f |\sigma_{théorique}|$.

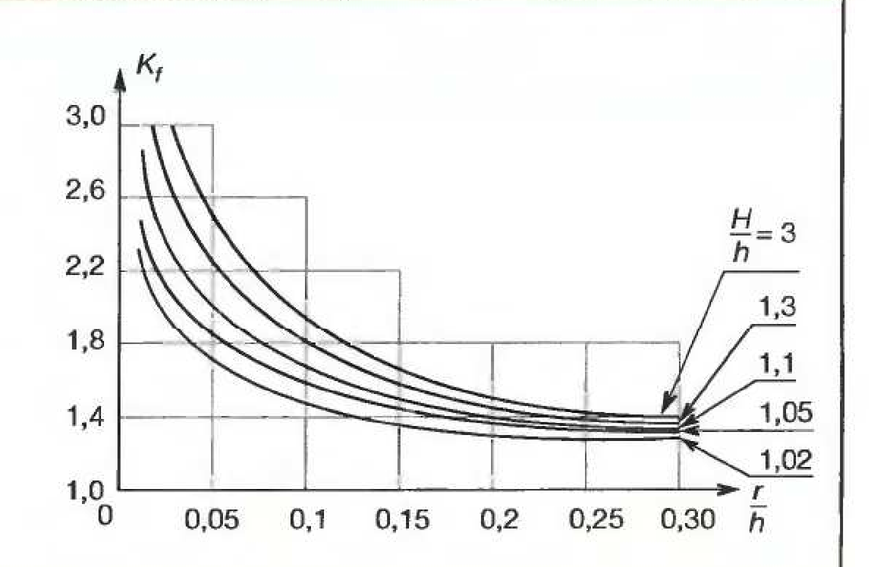
6° Écrire la condition de résistance.

$K_f |\sigma_{théorique}| \leqslant R_{pe}$.

VALEURS DES COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES K_f*

Plaque à section variable

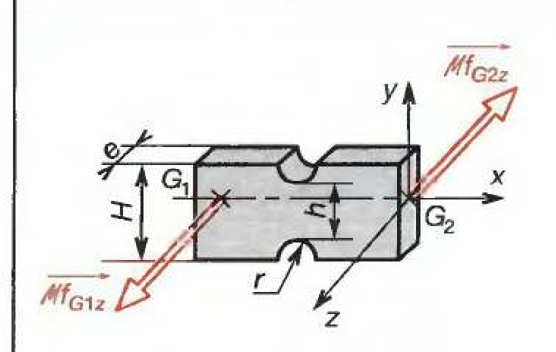


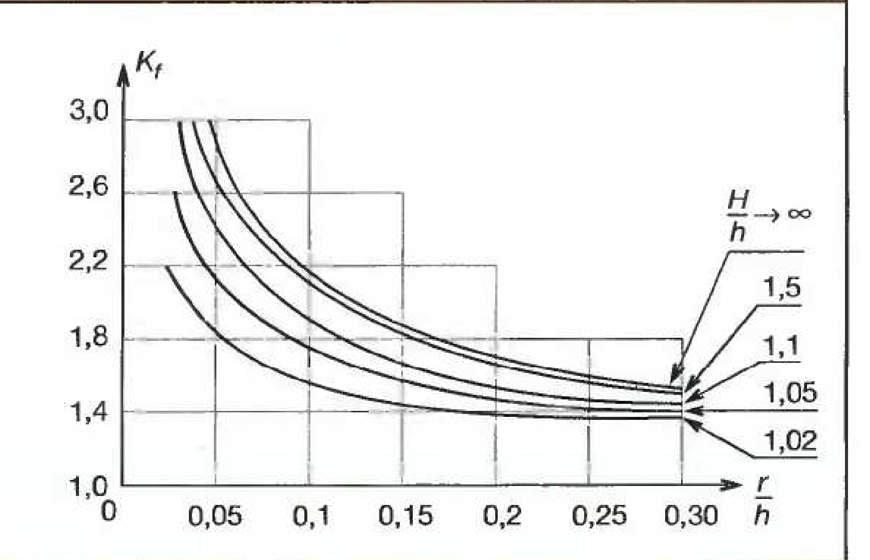


$\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = K_f \cdot \|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\|$

$\|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot \dfrac{h}{2}$; $I_{Gz} = \dfrac{eh^3}{12}$

Plaque avec saignées

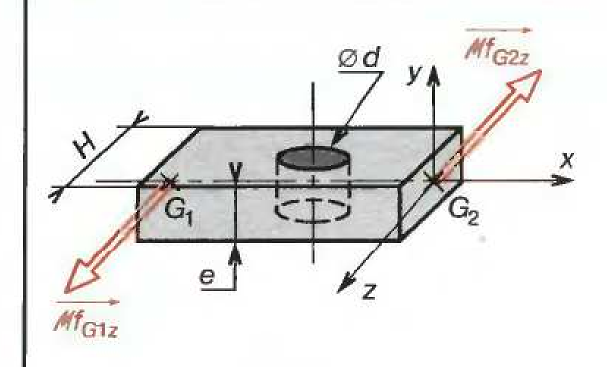


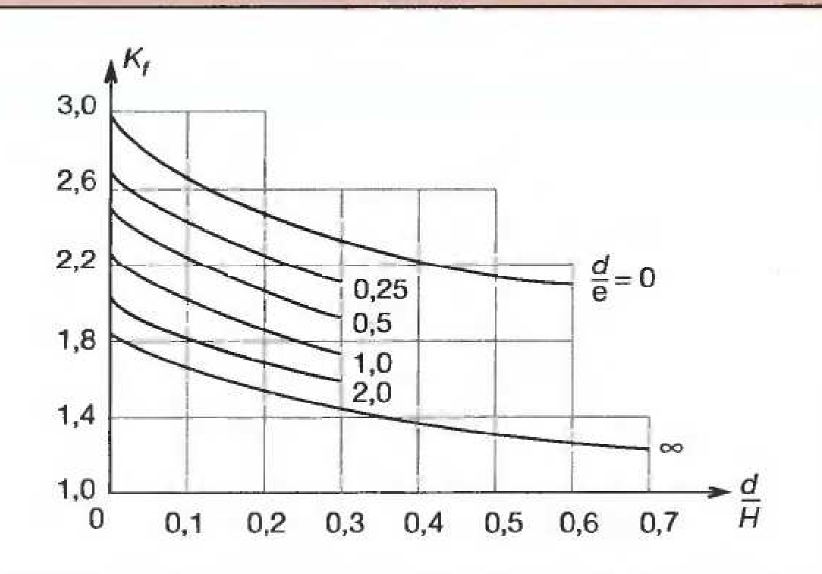


$\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = K_f \cdot \|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\|$

$\|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot \dfrac{h}{2}$; $I_{Gz} = \dfrac{eh^3}{12}$

Plaque percée d'un trou



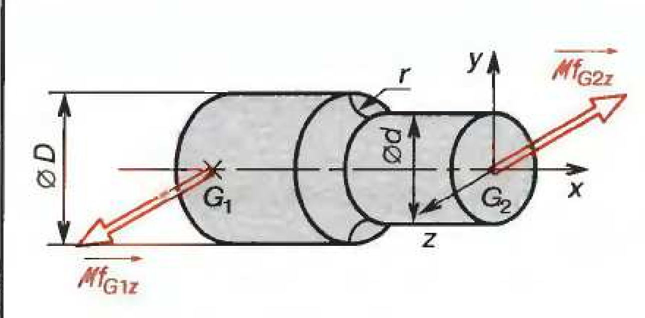


$\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = K_f \cdot \|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\|$

$\|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot \dfrac{e}{2}$; $I_{Gz} = \dfrac{(H-d)e^3}{12}$

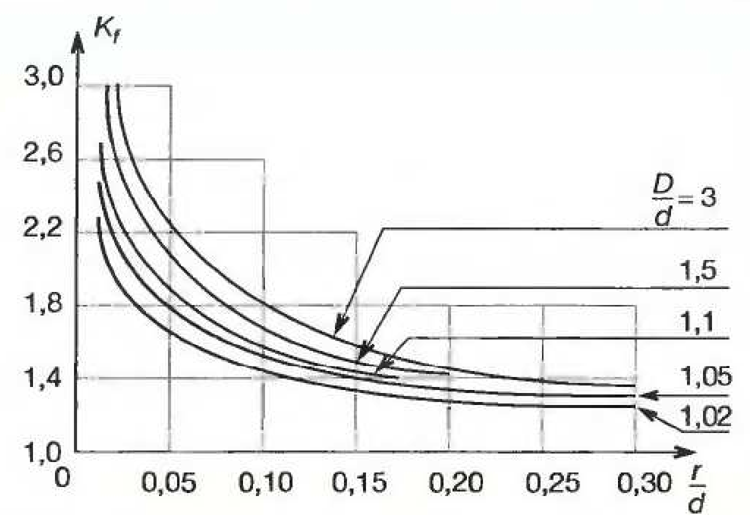
* D'après CETIM.

Arbre épaulé

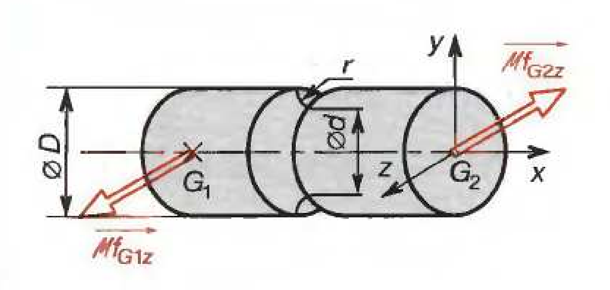


$$\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = K_f \cdot \|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\|$$

$$\|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\| = \frac{32 \cdot \|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{\pi d^3}$$

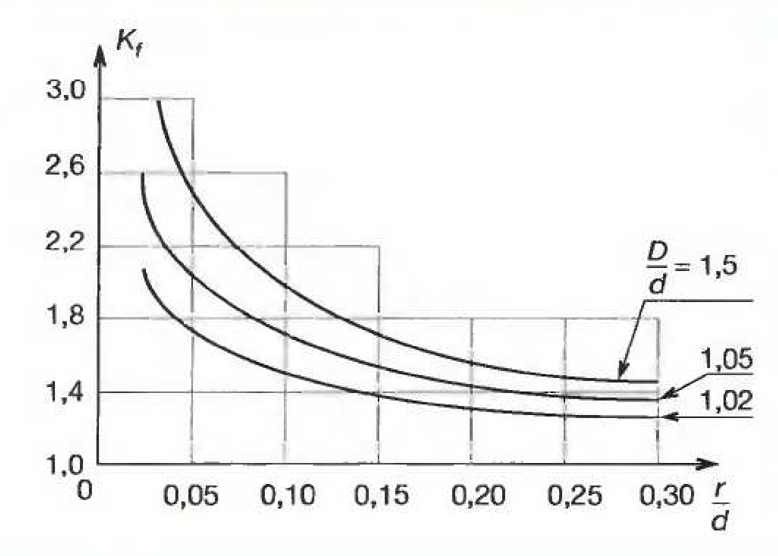


Arbre avec gorge

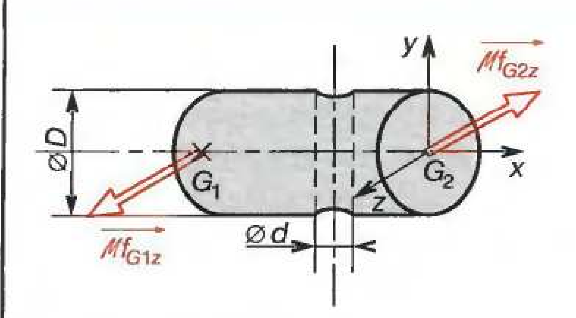


$$\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = K_f \cdot \|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\|$$

$$\|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\| = \frac{32 \cdot \|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{\pi d^3}$$



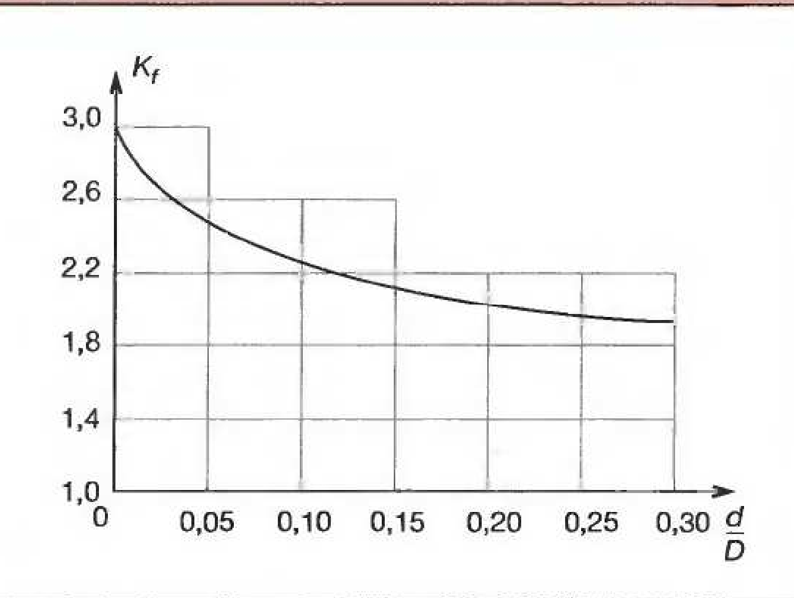
Arbre percé d'un trou



$$\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = K_f \cdot \|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\|$$

$$\|\overrightarrow{\sigma_{théorique}}\| = \frac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{\left(\frac{I_{Gz}}{v}\right)} \; ; \; \frac{I_{Gz}}{v} = \frac{\pi D^3}{32} - \frac{dD^2}{6}$$

$$v = \frac{D}{2}$$



52.8 Contraintes tangentielles

52.81 Dans une section droite

Le glissement transversal provoque dans la section droite (S) des contraintes $\overrightarrow{\tau_M}$. La théorie de l'élasticité permet de démontrer la **réciprocité des contraintes tangentielles transversales $\overrightarrow{\tau_M}$ et des contraintes tangentielles longitudinales $\overrightarrow{\tau'_M}$**. La figure 2 montre que $\overrightarrow{\tau_M}$ et $\overrightarrow{\tau'_M}$ sont :

- orientées perpendiculairement à l'intersection IJ des deux facettes, dans le même sens par rapport à IJ (elles s'éloignent toutes les deux, par exemple) ;
- égales en norme : $\|\overrightarrow{\tau_M}\| = \|\overrightarrow{\tau'_M}\|$

Il suffit donc de calculer $\overrightarrow{\tau'_M}$ pour connaître $\overrightarrow{\tau_M}$ (voir paragraphe suivant).

52.82 Contraintes tangentielles longitudinales

Le glissement des lames indépendantes constituant la poutre **1** met en évidence le **glissement longitudinal**. Dans une poutre **1** monobloc, les efforts de cohésion longitudinaux s'opposent à ce glissement. **Il apparaît des contraintes tangentielles longitudinales $\overrightarrow{\tau'_M}$**, selon II' (fig. 4) :

$$\tau'_M = -\frac{T_y \cdot A_{Gz}}{\lambda \cdot I_{Gz}}$$

T_y : effort tranchant dans la section d'abscisse x (N).
A_{Gz} : moment statique par rapport à l'axe Gz de $IJDC$, portion de section droite limitée par la corde d'ordonnée y_0 (mm³).

On rappelle que $A_{Gz} = \int_v^{y_0} y \cdot ds$

λ : longueur de la corde IJ de la section droite d'ordonnée y_0 (mm).
I_{Gz} : moment quadratique de (S) par rapport à $(G, \vec{z})$ (mm⁴).

EXEMPLE DE CALCUL :

- **Pour une poutre de section droite rectangulaire** de largeur b, de hauteur h, quelle est l'expression de τ'_M ?

On pose $ds = b \cdot dy$, d'où :

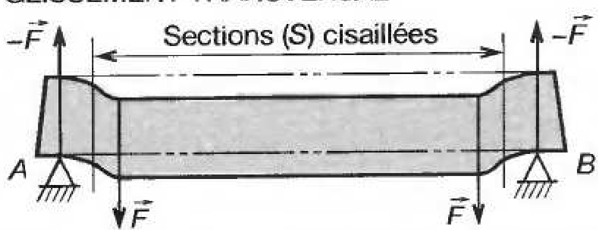
$A_{Gz} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y\right)$; $I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$

$$\tau'_M = \frac{6\,T_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

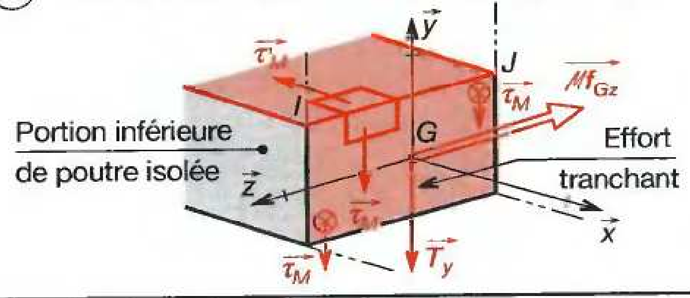
τ'_M est fonction de y^2 (parabole).
Pour $y = \pm\frac{h}{2}$ $\boxed{\tau' = 0}$; pour $y = 0$ $\boxed{|\tau'_M|_{max} = \frac{3\,|T_y|}{2 \cdot S}}$

- **Pour une poutre de section droite circulaire**, un calcul de même type donne : $|\tau'_M|_{max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|T_y|}{S}$

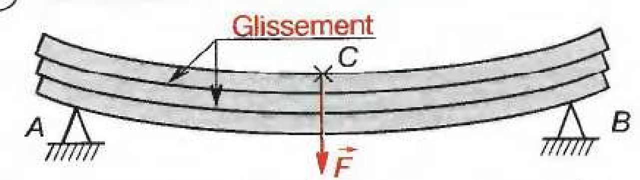
1 GLISSEMENT TRANSVERSAL



2 RÉCIPROCITÉ DES CONTRAINTES $\overrightarrow{\tau_M}$ ET $\overrightarrow{\tau'_M}$



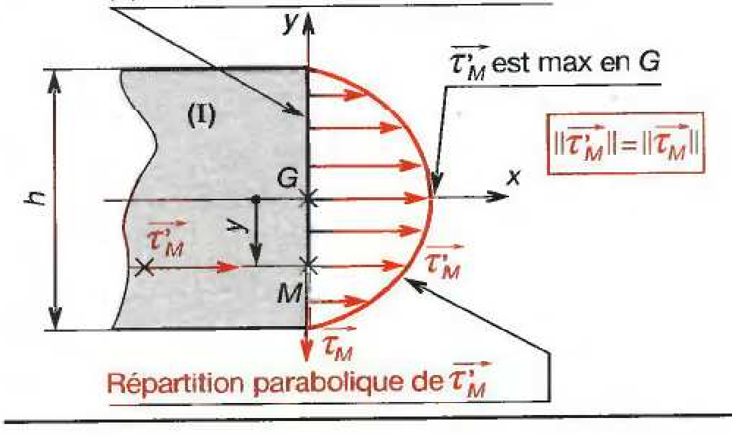
3 GLISSEMENT LONGITUDINAL



4 ISOLEMENT D'UN TRONÇON CII'C'

Force tangentielle longitudinale de cohésion

5 RÉPARTITION DES CONTRAINTES $\overrightarrow{\tau'_M}$



52.9 Déformations en flexion

52.91 Angle de déformation

L'angle $\Delta\varphi$ est l'angle dont a tourné la section droite (S_2) autour de $(G_2, \vec{z})$ par rapport à (S_1) distante de Δx (fig. 1) au cours de la déformation de la poutre.
On définit l'angle unitaire de flexion $\theta = \varphi'_x$ (en rad/m).

$$\varphi'_{(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{Mf_{Gz}(x)}{E.I_{Gz}}$$

$\Delta\varphi$: angle de rotation de $(S_2)/(S_1)$ autour de $(G_2, \vec{z})$ (rad).
Δx : distance entre (S_2) et (S_1) (mm).
$Mf_{Gz}(x)$: moment de flexion à / $(G_2, \vec{z})$ d'abscisse x (N.mm).
E : module d'élasticité longitudinal (MPa).
I_{Gz} : moment quadratique de (S_2) / $(G_2, \vec{z})$ (mm^4).

L'angle de rotation d'une section (S) par rapport à (S_0) distante de : ℓ, se calcule par la relation :

$$\varphi_{(0,\ \ell)} = -\frac{1}{E.I_{Gz}} \int_0^{\ell} Mf_{Gz}(x).dx \qquad E = \text{Cte} \quad I_{Gz} = \text{Cte}$$

CONDITION DE DÉFORMATION ANGULAIRE :

On calcule $\varphi_{(0,\ \ell)}$ entre deux sections S_0 et S_1 et on vérifie qu'il reste inférieur à un angle limite $\varphi_{\lim}$ (fig. 2).

$$\varphi_{(0,\ \ell)} \leq \varphi \lim$$

Ce calcul est important pour les arbres guidés par des roulements, par exemple. On calcule $\varphi_{(0,\ \ell)}$ pour un état de charges donné et on vérifie que cette valeur est inférieure au double de l'angle de rotulage donné par le constructeur $\alpha_{r\max}$*.

- Si $\varphi_{(0,\ \ell)} < 2\alpha_{r\max}$: l'arbre peut se déformer librement.
- Si $\varphi_{(0,\ \ell)} > 2\alpha_{r\max}$: lorsque l'arbre se déforme, apparaît un moment de déversement au palier.

52.92 Rayon de courbure

On pose que $\overline{G_1 I} = R$ (fig. 1) est le rayon de courbure de la déformée. En un point d'abscisse x, on peut écrire :

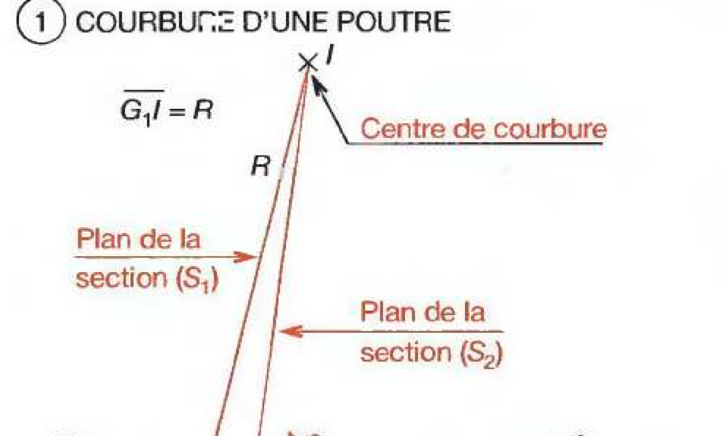
$$\frac{1}{R} = -\frac{Mf_{Gz}(x)}{E.I_{Gz}}$$

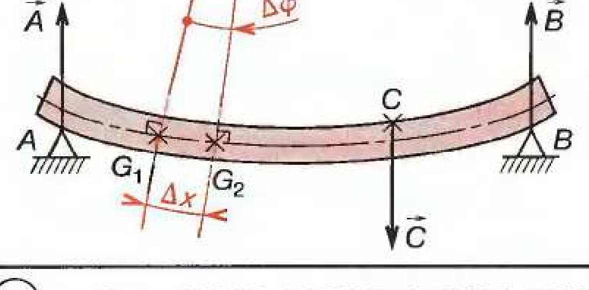
R : rayon de courbure de la ligne moyenne (mm).
Mf_{Gz} : moment de flexion dans la section considérée (N.mm).
E : module d'élasticité longitudinal (MPa).
I_{Gz} : moment quadratique de (S) / $(G_2, \vec{z})$ (mm^4).

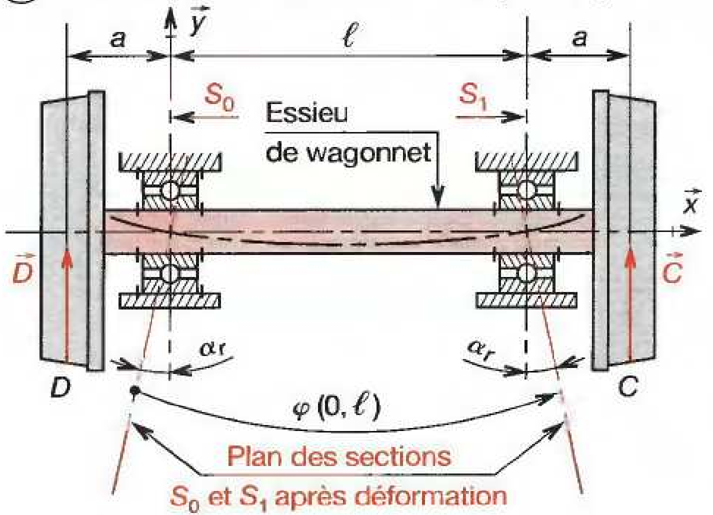
REMARQUE :

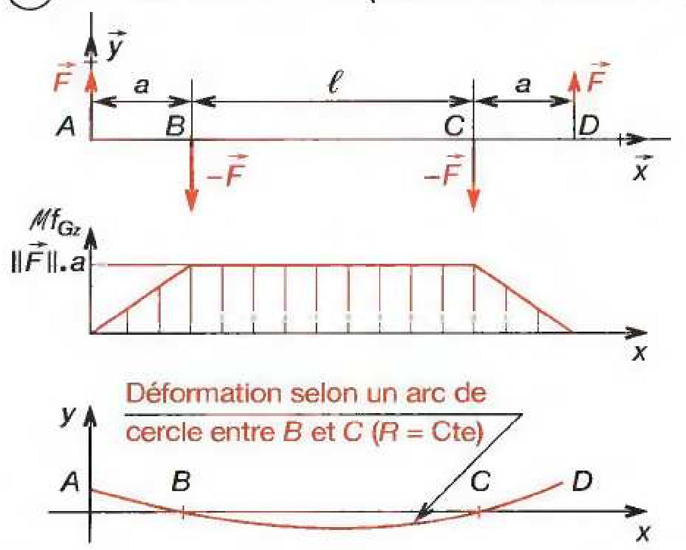
Entre B et C : Mf_{Gz} = Cte d'où $\frac{1}{R}$ = Cte : flexion circulaire (fig. 3).

* Voir définition et valeurs du rotulage § 19.7.









52 ■ 93 Flèche en un point

La poutre est modélisée par sa ligne moyenne. Elle se déforme sous l'action des charges contenues dans le plan de symétrie $(A, \vec{x}, \vec{y})$ (fig. 2 et 3).

52 ■ 931 Définitions

On appelle **déformée**, la courbe de la ligne moyenne dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ après déformation (fig. 3). À tout point C d'abscisse x_C, correspond une ordonnée y_C représentant la distance du point C avant déformation au point C' après déformation.

Cette ordonnée y_C s'appelle la flèche en C.

L'équation de la déformée est : $y = f(x)$ dans $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

Les dérivées première et seconde de l'équation de la déformée seront notées y' et y''.

> **REMARQUE IMPORTANTE :**
> **Ne pas confondre y : flèche en C dans l'équation de la déformée avec y : distance d'un point M de la section droite à la couche neutre dans l'expression de la contrainte en un point M (voir § 52.4).**

52 ■ 932 Condition de flèche maximale

On calcule généralement la flèche max : f_{max} en un point B d'abscisse x_B à partir de son expression donnée par un formulaire (voir chapitre 53) ou d'un logiciel de résistance des matériaux.

On vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite : f_{lim} imposée par le type de construction ou les contraintes technologiques (fig. 4).

$$|y|_{max} \leq f_{lim}$$

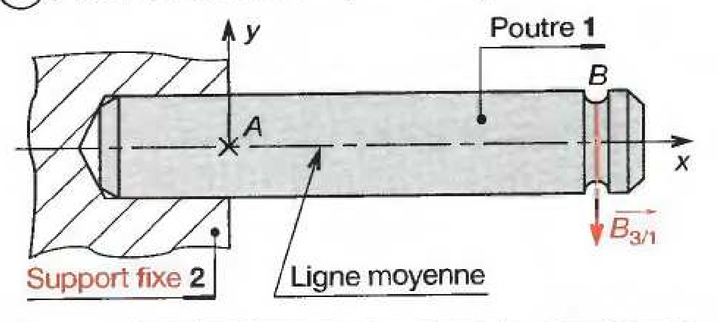
52 ■ 933 Relation entre déformation et moment de flexion

Si la modélisation des charges et des liaisons ne correspondent à aucun cas des formulaires, on peut calculer la flèche à partir de l'équation de la déformée, déterminée par double intégration de $\mathcal{M}f_{Gz}$.

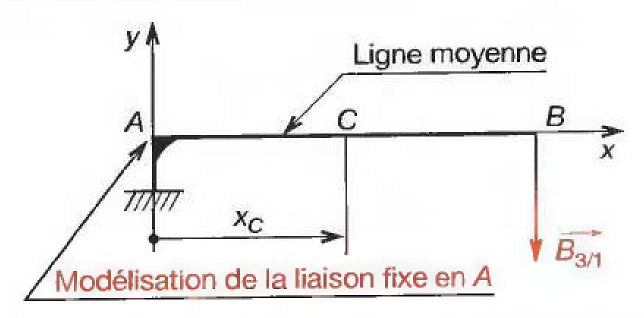
$$E \cdot I_{Gz} \cdot y''(x) = \mathcal{M}f_{Gz}$$

E : module d'élasticité longitudinal (MPa).
I_{Gz} : moment quadratique de la section (S) d'abscisse x (mm^4).
$y''(x)$: dérivée seconde de l'équation de la déformée.
$\mathcal{M}f_{Gz}$: moment de flexion dans la section (S) (N . mm).

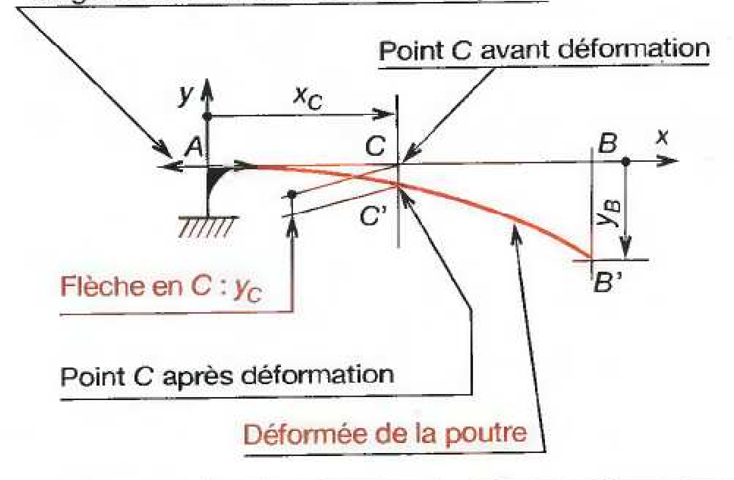
1 POUTRE EN FLEXION (EXEMPLE)



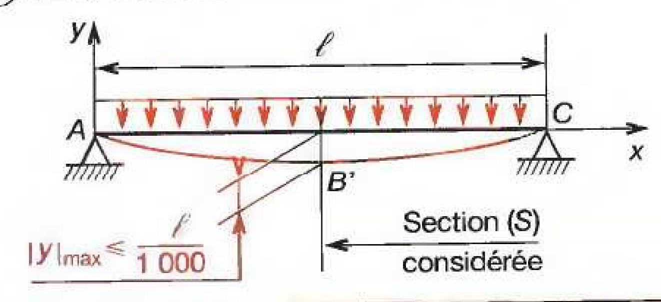
2 MODÉLISATION DE LA POUTRE



3 DÉFINITION DE LA DÉFORMÉE



4 VÉRIFICATION DE LA FLÈCHE MAXIMALE



$f_{limite} = \frac{\ell}{500}$	Poutres de bâtiments
$f_{limite} = \frac{\ell}{1\,000}$	Poutres de ponts roulants

EXEMPLE DE CALCUL DE FLÈCHE :

Une poutre **1**, encastrée dans **2**, est constituée par un IPN 100, déterminé par un calcul préalable de résistance (voir § 52.6). Sa longueur est $\ell = 1{,}5$ m et elle supporte une charge uniformément répartie de coefficient p = 1 800 N/m. Son module d'élasticité longitudinal est $E = 2 \times 10^5$ MPa. On demande de :

1° Déterminer les actions mécaniques de **2** sur **1** en B.

2° Déterminer l'expression des sollicitations le long de AB.

3° Tracer les diagrammes de $T(x)$ et $\mathcal{M}f_{Gz}(x)$.

4° Calculer la flèche en A et vérifier que $f_{max} \leqslant \dfrac{\ell}{500}$

SOLUTION :

1° Étudier l'équilibre statique de la poutre 1 isolée :

■ **Recenser les actions mécaniques sur 1 :**

$$_C\{C_{3/1}\} = {}_C\begin{Bmatrix} -p\ell\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\,700\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} ; \ _B\{B_{2/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{2/1}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B\,2/1}} \end{Bmatrix}$$

■ **Écrire le théorème fondamental de la statique :**

$$_B\{C_{3/1}\} + {}_B\{B_{2/1}\} = \{0\} \qquad \text{(voir § 31.5)}$$

■ **Calculer $\{C_{3/1}\}$ au nouveau point de réduction B :**

$$_B\begin{Bmatrix} -2\,700\,\vec{y} \\ \overrightarrow{BC} \times (-2\,700\,\vec{y}) \end{Bmatrix} ; \overrightarrow{BC} \times (-2\,700\,\vec{y}) : \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2\,700 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times (-2\,700\,\vec{y}) : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,025 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } {}_B\{C_{3/1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} -2\,700\,\vec{y} \\ 2\,025\,\vec{z} \end{Bmatrix}$$

■ **Écrire le théorème de la résultante statique :**

$$-2\,700\,\vec{y} + \overrightarrow{B_{2/1}} = \vec{0} \quad \text{d'où : } \quad \mathbf{\overrightarrow{B_{2/1}} = 2\,700\,\vec{y}}.$$

■ **Écrire le théorème du moment statique :**

$$-2\,025\,\vec{z} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{B\,2/1}} = \vec{0} \quad \text{d'où : } \quad \mathbf{\overrightarrow{\mathcal{M}_{B\,2/1}} = 2\,025\,\vec{z}}.$$

2° Étudier les sollicitations dans AB ; réaliser une coupure entre A et B : $0 \leqslant x \leqslant 1{,}5$ **et isoler la partie gauche (I) :**

$$_G\{\text{Coh}\} = -{}_G\begin{Bmatrix} -1\,800\,.\,x\,.\,\vec{y} \\ \dfrac{1\,800\,x^2}{2}\,.\,\vec{z} \end{Bmatrix} \qquad \text{(voir fig. 2)}$$

d'où : $\vec{R} = 1\,800\,.\,x\,.\,\vec{y}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_G} = -900\,.\,x^2\,.\,\vec{z}$.

Dans le repère local de définition des sollicitations $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$Ty = 1\,800\,x$; pour $x = 0$ $Ty = 0$; pour $x = 1{,}5$ $Ty = 2\,700$ N.

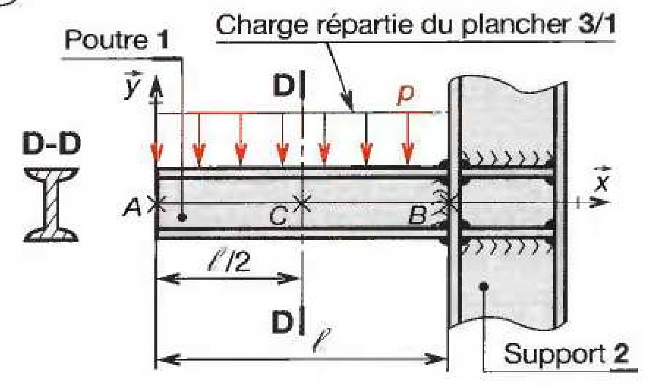
$\mathcal{M}f_{Gz} = -900x^2$; si $x = 0$ $\mathcal{M}f_{Gz} = 0$; si $x = 1{,}5$ $\mathcal{M}f_{Gz} = -2025$ N.m

3° Calculer la flèche en A ; le formulaire (§ 53.1) donne :

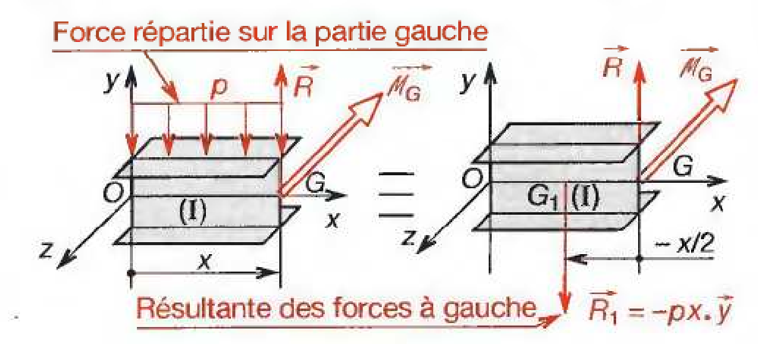
$y_A = -\dfrac{p\ell^4}{8\,.\,E\,.\,I_{Gz}}$. Pour un IPN 100 : $I_{Gz} = 171$ cm^4 (§ 52.523),

$$y_A = -\frac{1{,}8 \times 1\,500^4}{8 \times 2 \times 10^5 \times 171 \times 10^4} \qquad \mathbf{y_A = -3{,}3\ mm}.$$

* $\times$ est le signe normalisé du produit vectoriel.

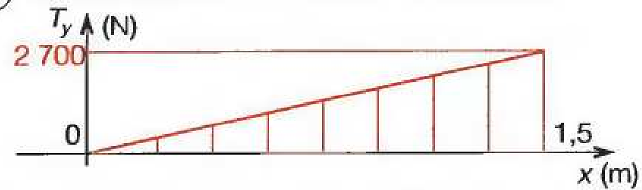


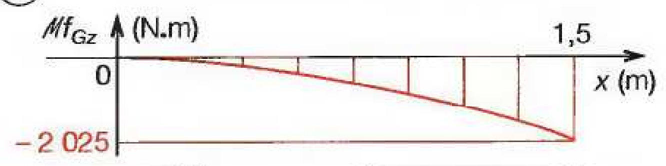
RÈGLE : **En statique** nous pouvons remplacer la charge répartie par une résultante $\vec{R} = p\ell.\vec{y}$ appliquée en C, d'abscisse $x = \frac{\ell}{2}$.
En R.d.M. il faut revenir au système réel § 45.3.

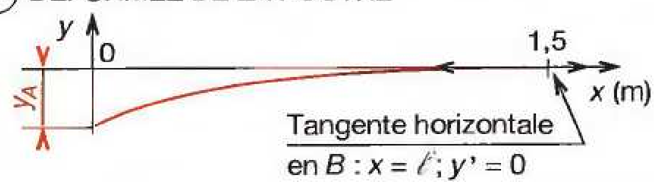


$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G} = -[\overrightarrow{GG_1} \times (-px.\vec{y})] = -[(-\tfrac{x}{2}.\vec{x}) \times (-px.\vec{y})]^*$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G} = -\frac{px^2}{2}(\vec{x} \times \vec{y}) \quad ; \vec{x} \times \vec{y} = \vec{z} ; \text{ d'où } \overrightarrow{\mathcal{M}_G} = -\frac{px^2}{2}.\vec{z}$$







La condition de déformation s'écrit :

$$|y|_{max} \leqslant \frac{\ell}{500} \quad ; \quad \text{or } 3{,}3 > \frac{1500}{500}$$

La condition n'est pas vérifiée (alors que la condition de résistance l'est !). L'IPN 100 ne convient pas.

Adoptons un IPN 120. $I_{Gz} = 328 \text{ cm}^4 = 328 \times 10^4 \text{ mm}^4$

d'où : $|y_A| = \dfrac{1{,}8 \times 1500^4}{8 \times 2 \times 10^5 \times 328 \times 10^4}$; $|y_A| = 1{,}7$ **mm.**

1,7 < 3. **La condition de déformation est vérifiée, l'IPN 120 convient.**

Approfondissement : calcul de y_A sans formulaire

Nous savons que $E.I_{Gz}.y'' = Mf_{Gz}$ **d'où** $E.I_{Gz}y'' = -\dfrac{p\,x^2}{2}$

La première primitive nous donne :

$$E.I_{Gz}.y' = -\frac{p\,x^3}{6} + C_1.$$

Pour calculer C_1, nous écrivons que y' est nulle pour $x = \ell$ (encastrement parfait en B) ; d'où $0 = -\dfrac{p\ell^3}{6} + C_1$; $C_1 = +\dfrac{p\ell^3}{6}$.

Nous pouvons écrire :

$$E.I_{Gz}.y' = -\frac{px^3}{6} + \frac{p\ell^3}{6}.$$

La deuxième primitive nous donne :

$$E.I_{Gz}.y = -\frac{p\,x^4}{24} + \frac{p\ell^3}{6}.x + C_2.$$

Pour calculer C_2, nous écrivons que y (la flèche) est nulle à l'appui en B pour $x = \ell$.

d'où : $0 = -\dfrac{p\ell^4}{24} + \dfrac{p\ell^4}{6} + C_2$; $C_2 = -\dfrac{p\ell^4}{8}$.

L'équation générale de la déformée est donc :

$$y = \frac{1}{E.I_{Gz}}\left(-\frac{px^4}{24} + \frac{p\ell^3}{6}x - \frac{p\ell^4}{8}\right).$$

La flèche en A est la valeur de $y(x)$ lorsque $x = 0$.

$$y_A = -\frac{p\ell^4}{8.E.I_{Gz}}.$$

EXEMPLE DE CALCUL D'UNE DENT D'ENGRENAGE :

- La dent est modélisée comme une poutre encastrée dans le moyeu de la roue dentée*.
- La résultante $\vec{F}$, l'action de la dent voisine en A, est verticale (angle de pression négligé).
- Les effets dynamiques, les chocs, les concentrations de contraintes à la base de la dent, sont négligés.

On demande de calculer le module m de la dent.

SOLUTION :

Le moment quadratique I_{Gz} de la section $BCDE$ est :

$$I_{Gz} = b.h^3/12 \ ; \ I_{Gz} = -\ \ell.h_1^3/12 \approx k.m.e^3/12.$$

La valeur de la contrainte maximale est :

$$|\sigma|_{max} = \frac{|Mf_{Gz}|_{max}}{I_{Gz}}.|y|_{max} = \frac{\|\vec{F}\|.h}{k.m.e^3/12}.e/2.$$

* Hypothèse assez éloignée de la réalité.

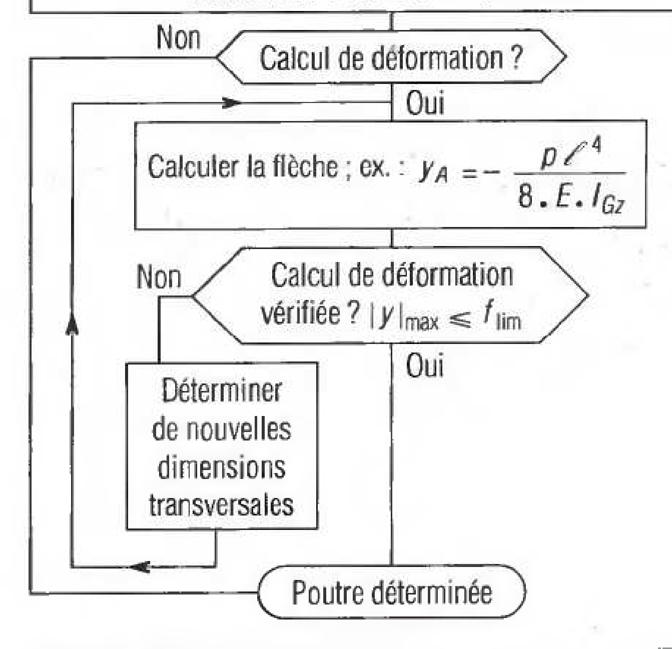
MÉTHODE DE DIMENSIONNEMENT D'UNE POUTRE

Modéliser la poutre, les liaisons et les charges
Calculer les actions inconnues
par la résolution de l'équilibre statique

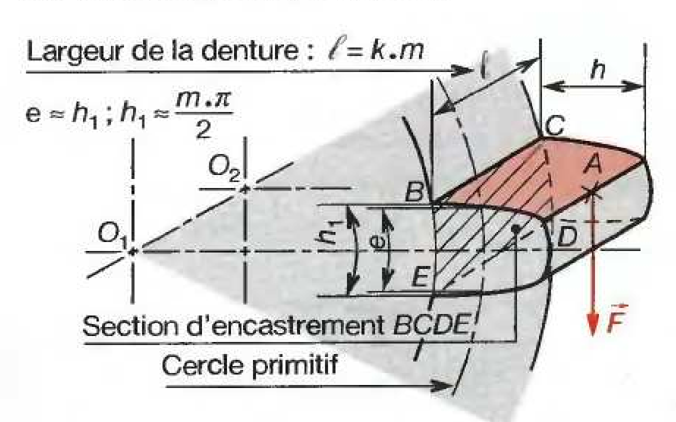
Déterminer les sollicitations T et Mf le long de la poutre
puis $\|\overrightarrow{Mf_{Gz\,max}}\|$

Calcul de résistance : $\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz\,max}}\|}{I_{Gz}} . |y|_{max}$

Écrire la condition de résistance $\|\overrightarrow{\sigma_{max}}\| \leqslant R_{pe}$
Calculer les dimensions tranversales



REPRÉSENTATION D'UNE DENT



$$|\sigma|_{max} = \frac{5{,}47.\|\vec{F}\|}{k.m^2} \ ; \ |\sigma|_{max} \leqslant R_{pe}$$

$$m \geqslant 2{,}34\sqrt{\frac{\|\vec{F}\|}{k.R_{pe}}}$$

52 ■ 10 Méthodes de calculs en flexion

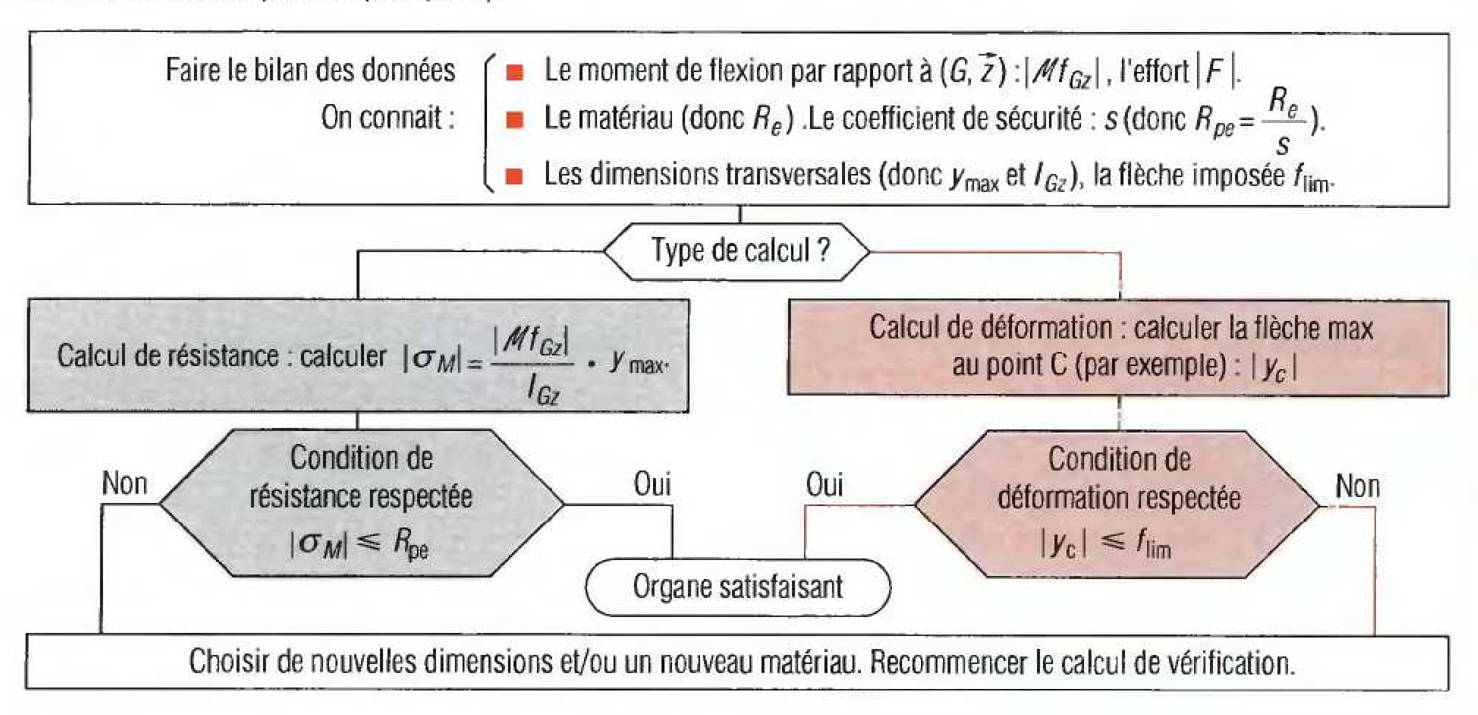
Il existe deux méthodes de calculs en flexion :

■ **Le calcul de vérification** : le moment de flexion est connu, l'organe est déterminé (dimensions, matériaux connus) et on vérifie s'il convient. Si cela n'est pas le cas, on calcule de nouvelles dimensions, et/ou on change de matériau.

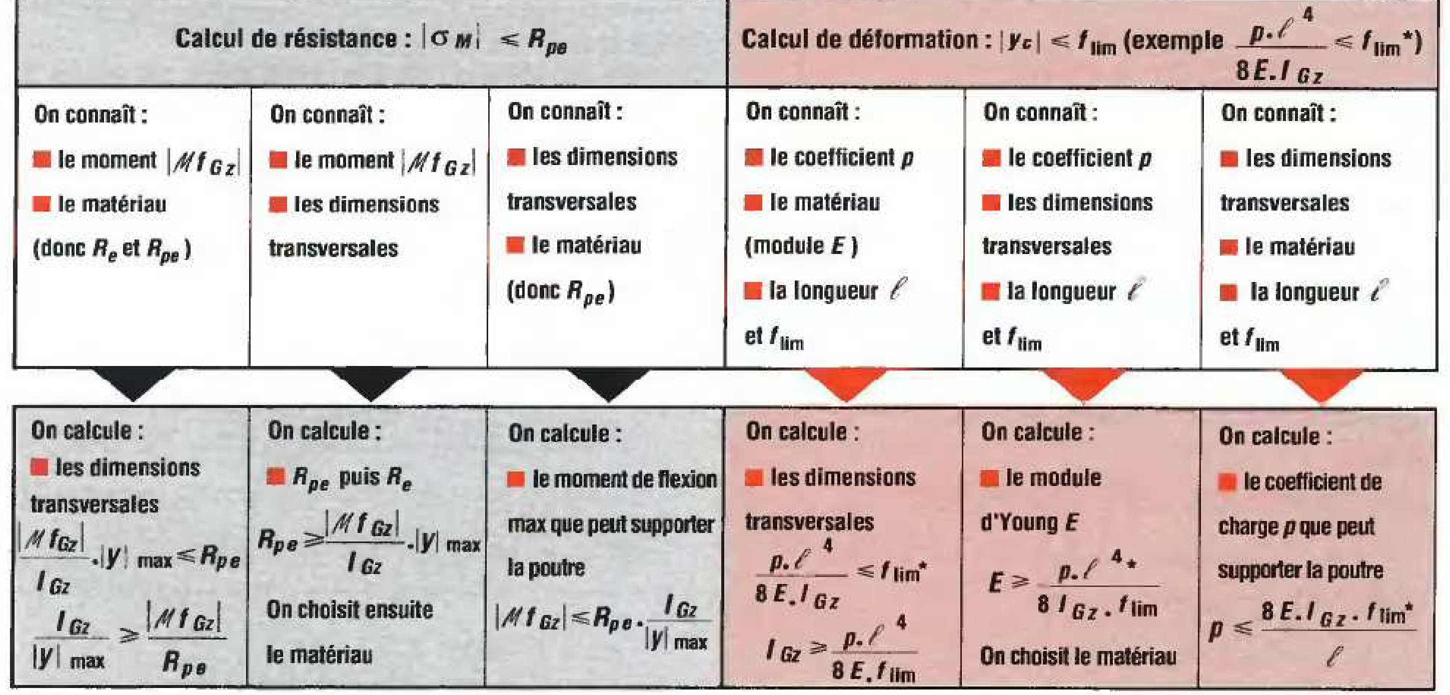
■ **Le calcul de détermination** : le moment de flexion est connu (par exemple), le matériau déterminé, on calcule les dimensions.

Dans les deux cas, on peut faire soit un **calcul de résistance** (contraintes déterminantes), soit un **calcul de déformation** (déformations déterminantes) soit les deux types de calculs.

CALCUL DE VÉRIFICATION : (voir exemple 1 § 52.6).



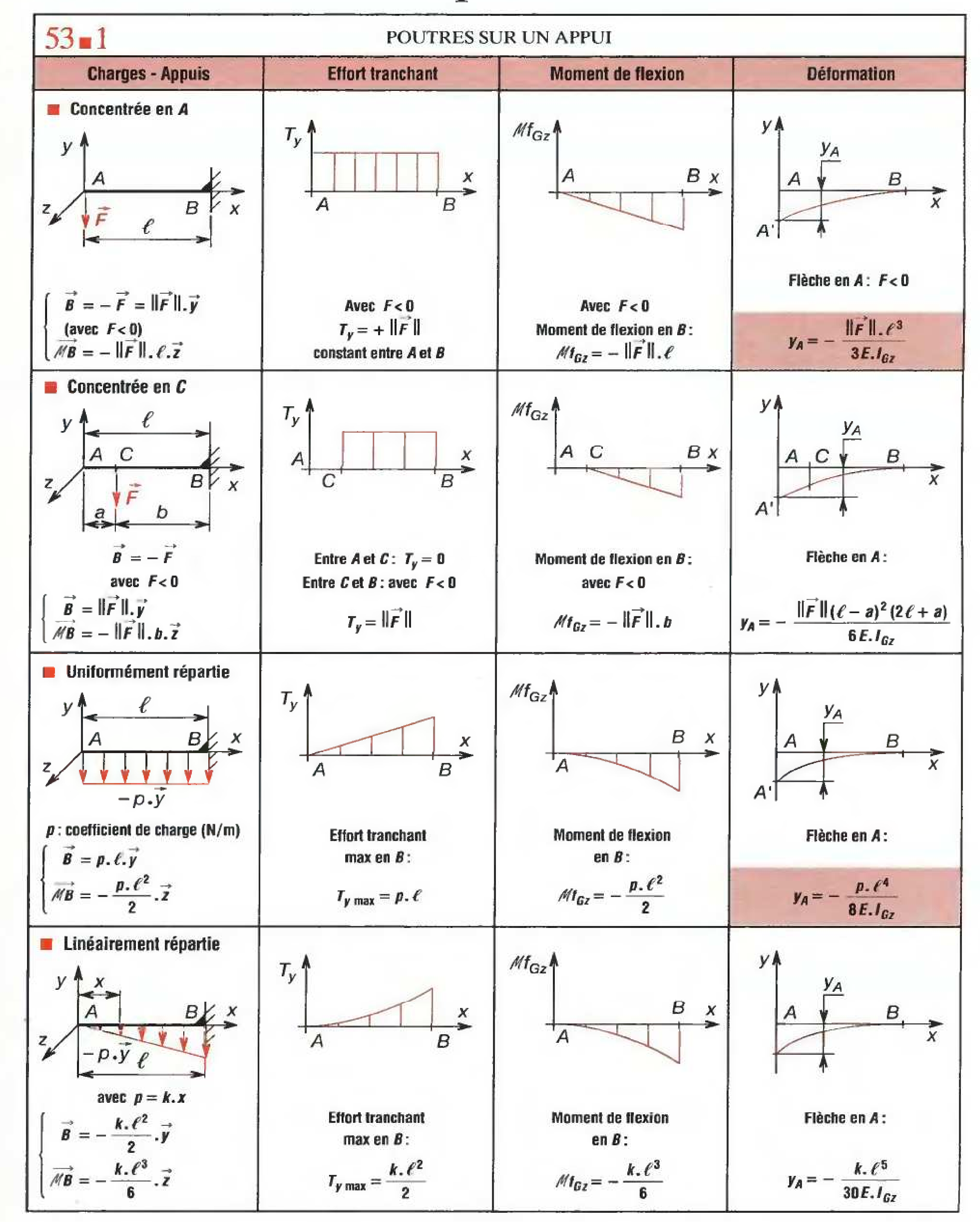
CALCUL DE DÉTERMINATION : (voir exemple 2 § 52.6).



Calcul de résistance : $|\sigma_M| \leqslant R_{pe}$			**Calcul de déformation : $|y_c| \leqslant f_{lim}$ (exemple $\frac{p.\ell^4}{8E.I_{Gz}} \leqslant f_{lim}$*)**		
On connaît : ■ le moment $|Mf_{Gz}|$ ■ le matériau (donc R_e et R_{pe})	**On connaît :** ■ le moment $|Mf_{Gz}|$ ■ les dimensions transversales	**On connaît :** ■ les dimensions transversales ■ le matériau (donc R_{pe})	**On connaît :** ■ le coefficient p ■ le matériau (module E) ■ la longueur ℓ et f_{lim}	**On connaît :** ■ le coefficient p ■ les dimensions transversales ■ la longueur ℓ et f_{lim}	**On connaît :** ■ les dimensions transversales ■ le matériau ■ la longueur ℓ et f_{lim}
On calcule : ■ les dimensions transversales $\frac{|Mf_{Gz}|}{I_{Gz}} \cdot |y|_{max} \leqslant R_{pe}$ $\frac{I_{Gz}}{|y|_{max}} \geqslant \frac{|Mf_{Gz}|}{R_{pe}}$	**On calcule :** ■ R_{pe} puis R_e $R_{pe} \geqslant \frac{|Mf_{Gz}|}{I_{Gz}} \cdot |y|_{max}$ On choisit ensuite le matériau	**On calcule :** ■ le moment de flexion max que peut supporter la poutre $|Mf_{Gz}| \leqslant R_{pe} \cdot \frac{I_{Gz}}{|y|_{max}}$	**On calcule :** ■ les dimensions transversales $\frac{p.\ell^4}{8E.I_{Gz}} \leqslant f_{lim}$* $I_{Gz} \geqslant \frac{p.\ell^4}{8E.f_{lim}}$	**On calcule :** ■ le module d'Young E $E \geqslant \frac{p.\ell^4}{8I_{Gz}.f_{lim}}$* On choisit le matériau	**On calcule :** ■ le coefficient de charge p que peut supporter la poutre $p \leqslant \frac{8E.I_{Gz}.f_{lim}}{\ell}$*

* Cas d'une poutre encastrée à une extrémité, supportant une charge répartie de coefficient p.

53 Formulaire des poutres

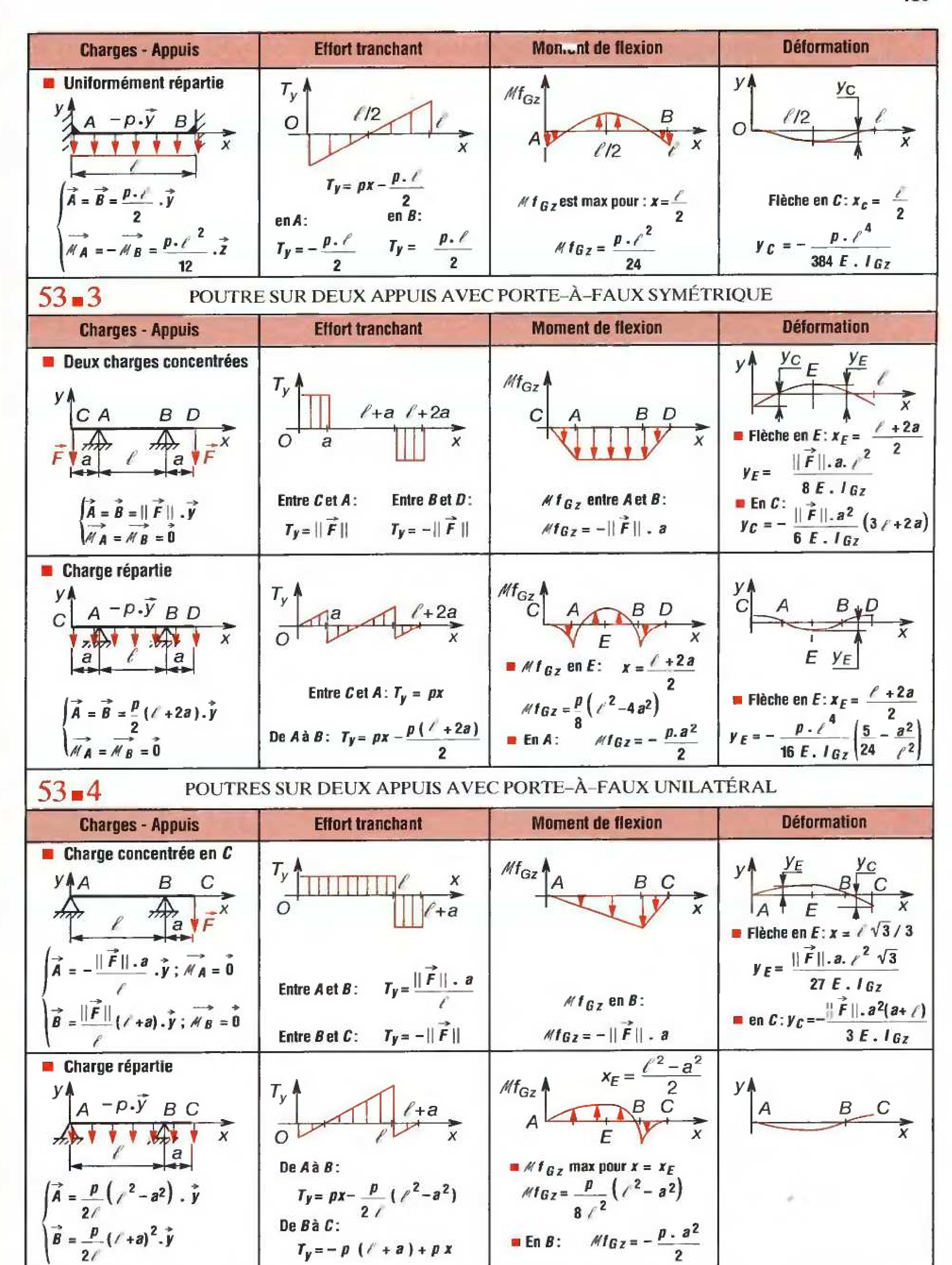


53 ▪ 1 POUTRES SUR UN APPUI

Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
Concentrée en A $\vec{B} = -\vec{F} = \Vert\vec{F}\Vert.\vec{y}$ (avec $F<0$) $\vec{M_B} = -\Vert\vec{F}\Vert.\ell.\vec{z}$	Avec $F<0$ $T_y = +\Vert\vec{F}\Vert$ constant entre A et B	Avec $F<0$ Moment de flexion en B : $Mf_{Gz} = -\Vert\vec{F}\Vert.\ell$	Flèche en A : $F<0$ $y_A = -\frac{\Vert\vec{F}\Vert.\ell^3}{3E.I_{Gz}}$
Concentrée en C $\vec{B} = -\vec{F}$ avec $F<0$ $\vec{B} = \Vert\vec{F}\Vert.\vec{y}$ $\vec{M_B} = -\Vert\vec{F}\Vert.b.\vec{z}$	Entre A et C : $T_y = 0$ Entre C et B : avec $F<0$ $T_y = \Vert\vec{F}\Vert$	Moment de flexion en B : avec $F<0$ $Mf_{Gz} = -\Vert\vec{F}\Vert.b$	Flèche en A : $y_A = -\frac{\Vert\vec{F}\Vert(\ell-a)^2(2\ell+a)}{6E.I_{Gz}}$
Uniformément répartie $-p.\vec{y}$ p : coefficient de charge (N/m) $\vec{B} = p.\ell.\vec{y}$ $\vec{M_B} = -\frac{p.\ell^2}{2}.\vec{z}$	Effort tranchant max en B : $T_{y\,max} = p.\ell$	Moment de flexion en B : $Mf_{Gz} = -\frac{p.\ell^2}{2}$	Flèche en A : $y_A = -\frac{p.\ell^4}{8E.I_{Gz}}$
Linéairement répartie $-p.\vec{y}$ avec $p = k.x$ $\vec{B} = -\frac{k.\ell^2}{2}.\vec{y}$ $\vec{M_B} = -\frac{k.\ell^3}{6}.\vec{z}$	Effort tranchant max en B : $T_{y\,max} = \frac{k.\ell^2}{2}$	Moment de flexion en B : $Mf_{Gz} = -\frac{k.\ell^3}{6}$	Flèche en A : $y_A = -\frac{k.\ell^5}{30E.I_{Gz}}$

53■2 POUTRES SUR DEUX APPUIS AUX EXTRÉMITÉS

Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ **Concentrée en C** $\vec{A} = \frac{\|\vec{F}\|.b}{\ell}.\vec{y}$; $\vec{\mathcal{M}A} = \vec{0}$ $\vec{B} = \frac{\|\vec{F}\|.a}{\ell}.\vec{y}$; $\vec{\mathcal{M}B} = \vec{0}$	De A à C : $T_y = -\frac{\|\vec{F}\|}{}.b$ De C à B : $T_y = +\frac{\|\vec{F}\|}{}.a$	■ Pour $x = a$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{\|\vec{F}\|.a.b}{}$ ■ Si $a = \ell/2$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{\|\vec{F}\|.\ell}{4}$	■ Pour $x = a$ $y_C = -\frac{\|\vec{F}\|.a^2.b^2}{3E.I_{Gz}.\ell}$ ■ Si $a = \ell/2$ $y_C = -\frac{\|\vec{F}\|.\ell^3}{48E.I_{Gz}}$
■ **Uniformément répartie** $\vec{A} = \vec{B} = \frac{p.\ell}{2}.\vec{y}$; $\vec{\mathcal{M}A} = \vec{0}$ $\vec{\mathcal{M}A} = \vec{\mathcal{M}B} = \vec{0}$; $\vec{\mathcal{M}B} = \vec{0}$	$T_y = +px - p.\ell/2$ En A : $T_y = -p.\ell/2$ En B : $T_y = p.\ell/2$	$\mathcal{M}f_{Gz}$ est maximal pour $x = \ell/2$ $\mathcal{M}f_{Gz/max} = \frac{p.\ell^2}{8}$	Flèche en C : $x_C = \ell/2$ $y_C = -\frac{5p.\ell^4}{384\,E.I_{Gz}}$
■ **Concentrée en C** $\vec{A} = -\frac{5\|\vec{F}\|}{16}.\vec{y}$ $\vec{B} = -\frac{11\|\vec{F}\|}{16}.\vec{y}$ $\vec{\mathcal{M}B} = -\frac{3\|\vec{F}\|.\ell}{16}.\vec{z}$	De A à C : $T_y = -\frac{5\|\vec{F}\|}{16}$ De C à B : $T_y = -\frac{11\|\vec{F}\|}{16}$	$\mathcal{M}f_{Gz}$ est maximal pour $x = \ell/2$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{5\|\vec{F}\|.\ell}{32}$	Flèche en C : $y_C = -\frac{7\|\vec{F}\|.\ell^3}{768\,E.I_{Gz}}$
■ **Uniformément répartie** $\vec{A} = -\frac{3p.\ell}{8}.\vec{y}$ $\vec{B} = -\frac{5p.\ell}{8}.\vec{y}$ $\vec{\mathcal{M}B} = -\frac{p.\ell^2}{8}.\vec{z}$	$T_y = px - 3p.\ell/8$ En A : $T_y = -3p.\ell/8$ En B : $T_y = 5p.\ell/8$	$\mathcal{M}f_{Gz}$ est maximal pour $x = 3\ell/8$ $\mathcal{M}f_{Gz/max} = \frac{9p.\ell^2}{128}$	Flèche en C : $x = \ell/2$ $y_C = -\frac{p.\ell^4}{192\,E.I_{Gz}}$
■ **Concentrée en C** $\vec{A} = \vec{B} = \frac{\|\vec{F}\|}{2}.\vec{y}$ $\vec{\mathcal{M}A} = -\vec{\mathcal{M}B} = -\frac{\|\vec{F}\|.\ell}{8}.\vec{z}$	De A à C : $T_y = -\frac{\|\vec{F}\|}{2}$ De C à B : $T_y = +\frac{\|\vec{F}\|}{2}$	$\mathcal{M}f_{Gz}$ est maximal pour $x = \ell/2$ $\mathcal{M}f_{Gz} = \frac{\|\vec{F}\|.\ell}{8}$	Flèche en C : $y_C = -\frac{\|\vec{F}\|.\ell^3}{192\,E.I_{Gz}}$



Charges - Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
■ Uniformément répartie $\vec{A}=\vec{B}=\frac{p\cdot\ell}{2}\cdot\vec{y}$ $\vec{M_A}=-\vec{M_B}=\frac{p\cdot\ell^2}{12}\cdot\vec{z}$	$T_y=px-\frac{p\cdot\ell}{2}$ en A: $T_y=-\frac{p\cdot\ell}{2}$ en B: $T_y=\frac{p\cdot\ell}{2}$	Mf_{Gz} est max pour : $x=\frac{\ell}{2}$ $Mf_{Gz}=\frac{p\cdot\ell^2}{24}$	Flèche en C: $x_C=\frac{\ell}{2}$ $y_C=-\frac{p\cdot\ell^4}{384\,E\,.\,I_{Gz}}$
53■3 POUTRE SUR DEUX APPUIS AVEC PORTE-À-FAUX SYMÉTRIQUE			
Charges - Appuis	**Effort tranchant**	**Moment de flexion**	**Déformation**
■ Deux charges concentrées $\vec{A}=\vec{B}=\Vert\vec{F}\Vert\cdot\vec{y}$ $\vec{M_A}=\vec{M_B}=\vec{0}$	Entre C et A: $T_y=\Vert\vec{F}\Vert$ Entre B et D: $T_y=-\Vert\vec{F}\Vert$	Mf_{Gz} entre A et B: $Mf_{Gz}=-\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a$	■ Flèche en E: $x_E=\frac{\ell+2a}{2}$ $y_E=\frac{\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a\,.\,\ell^2}{8\,E\,.\,I_{Gz}}$ ■ En C: $y_C=-\frac{\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a^2}{6\,E\,.\,I_{Gz}}(3\ell+2a)$
■ Charge répartie $\vec{A}=\vec{B}=\frac{p}{2}(\ell+2a)\cdot\vec{y}$ $\vec{M_A}=\vec{M_B}=\vec{0}$	Entre C et A: $T_y=px$ De A à B: $T_y=px-\frac{p(\ell+2a)}{2}$	■ Mf_{Gz} en E: $x=\frac{\ell+2a}{2}$ $Mf_{Gz}=\frac{p}{8}(\ell^2-4a^2)$ ■ En A: $Mf_{Gz}=-\frac{p\,.\,a^2}{2}$	■ Flèche en E: $x_E=\frac{\ell+2a}{2}$ $y_E=-\frac{p\,.\,\ell^4}{16\,E\,.\,I_{Gz}}\left(\frac{5}{24}-\frac{a^2}{\ell^2}\right)$
53■4 POUTRES SUR DEUX APPUIS AVEC PORTE-À-FAUX UNILATÉRAL			
Charges - Appuis	**Effort tranchant**	**Moment de flexion**	**Déformation**
■ Charge concentrée en C $\vec{A}=-\frac{\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a}{\ell}\cdot\vec{y}$; $\vec{M_A}=\vec{0}$ $\vec{B}=\frac{\Vert\vec{F}\Vert}{\ell}(\ell+a)\cdot\vec{y}$; $\vec{M_B}=\vec{0}$	Entre A et B: $T_y=\frac{\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a}{\ell}$ Entre B et C: $T_y=-\Vert\vec{F}\Vert$	Mf_{Gz} en B: $Mf_{Gz}=-\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a$	■ Flèche en E: $x=\ell\sqrt{3}/3$ $y_E=\frac{\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a\,.\,\ell^2\sqrt{3}}{27\,E\,.\,I_{Gz}}$ ■ en C: $y_C=-\frac{\Vert\vec{F}\Vert\,.\,a^2(a+\ell)}{3\,E\,.\,I_{Gz}}$
■ Charge répartie $\vec{A}=\frac{p}{2\ell}(\ell^2-a^2)\cdot\vec{y}$ $\vec{B}=\frac{p}{2\ell}(\ell+a)^2\cdot\vec{y}$	De A à B: $T_y=px-\frac{p}{2\ell}(\ell^2-a^2)$ De B à C: $T_y=-p(\ell+a)+px$	$x_E=\frac{\ell^2-a^2}{2}$ ■ Mf_{Gz} max pour $x=x_E$ $Mf_{Gz}=\frac{p}{8\ell^2}(\ell^2-a^2)$ ■ En B: $Mf_{Gz}=-\frac{p\,.\,a^2}{2}$	

53■5 POUTRES SUPPORTANT UN COUPLE

Charges - Déformées	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
$C_z = C$; $C < 0$ $\vec{A} = \frac{C}{\ell}.\vec{y}$; $\vec{B} = -\frac{C}{\ell}.\vec{y}$	$C < 0$ $0 < x < a \quad T_y = -\frac{C}{\ell}$ $a < x < \ell \quad T_y = -\frac{C}{\ell}$	$C < 0$; $a \neq 0$ $0 < x < a \quad Mf_{Gz} = +\frac{Cx}{\ell}$ $a < x < \ell \quad Mf_{Gz} = -\frac{C(\ell - x)}{\ell}$	Flèche en D : $y_D = \frac{1}{E.I_{Gz}} \cdot \frac{C.a.b\,(b-a)}{3\ell}$ $\varphi_A = -\frac{C}{6E.I_{Gz}.\ell}.(\ell^2 - 3b^2)$ $\varphi_B = -\frac{C}{6E.I_{Gz}.\ell}.(\ell^2 - 3a^2)$
$C < 0$ $\vec{A} = -\vec{B} = \frac{3C}{2\ell^3}(\ell^2 - a^2).\vec{y}$ $\vec{M_B} = \left\| \frac{C}{2\ell^2}(\ell^2 - 3a^2) \right\| .\vec{z}$	$0 < x < a \quad T_y = -A$ $a < x < \ell \quad T_y = -A$	$C < 0$; $a \neq 0$ $Mf_{Gz} = +\frac{3C}{2\ell^3}(\ell^2 - a^2).x$ $Mf_{Gz} = -\frac{C}{2\ell^3}[2\ell^3 - 3(\ell^2 - a^2).x]$	$0 < x < a$ $y = -\frac{C(\ell - a)x}{4E.I_{Gz}.\ell^3} \dots$ $\dots [\ell^2(3a - \ell) - (\ell + a)x^2]$ $\varphi_A = -\frac{C}{4E.I_{Gz}.\ell}(\ell - a)(\ell - 3a)$
$C < 0$ $\vec{R_A} = \vec{0}$ $\vec{M_A} = -C.\vec{z}$	$x < a \quad T_y = 0$ $x > a \quad T_y = 0$	$C < 0$ $x < a$; $Mf_{Gz} = +C$ $x > a$; $Mf_{Gz} = 0$	$f_D = \frac{C\,a^2}{2E.I_{Gz}}$ $f_B = \frac{C\,a}{E.I_{Gz}}\left(\ell - \frac{a}{2}\right)$ $\varphi_D = \frac{C\,a}{E.I_{Gz}} = \varphi_B$

53■6 POUTRES SUR TROIS APPUIS DE NIVEAU

Charges - Déformées	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
$-p.\vec{y}$ $\vec{A} = \vec{B} = 0{,}375\ p.\ell.\vec{y}$ $\vec{C} = 1{,}250\ p.\ell.\vec{y}$ $\vec{M_A} = \vec{M_B} = \vec{M_C} = \vec{0}$	$0 < x < \ell$ $T_y = px - 0{,}375\ p.\ell$ $\ell < x < 2\ell$ $T_y = px - 1{,}625\ p.\ell$	$0 < x < \ell$; $Mf_{Gz} = 0{,}07\ p.\ell^2$ $Mf_{Gzl} = -0{,}125\ p.\ell^2$ $\ell < x < 2\ell$; $Mf_{Gz} = 0{,}07\ p.\ell$	Flèche pour $x_E = 0{,}42\ \ell$ $f_E = -0{,}043\ \frac{p.\ell^4}{E.I_{Gz}}$
$\vec{A} = \vec{B} = \frac{5F}{16}.\vec{y}$ $\vec{C} = \frac{11F}{8}.\vec{y}$	$0 < x < \ell/2 \quad T_y = -5F/16$ $\ell/2 < x < \ell \quad T_y = 11F/16$ $\ell < x < 3\ell/2 \quad T_y = -11F/16$ $3\ell/2 < x < 2\ell \quad T_y = -5F/16$	$x = \frac{\ell}{2}$; $Mf_{Gz} = \frac{5F.\ell}{32}$ $x = \ell$; $Mf_{Gz} = -\frac{3F.\ell}{16}$	pour $x_E = \frac{\ell\sqrt{5}}{5}$ $f_E = -\frac{F.\ell^3}{240\ E.I_{Gz}}$

54 Principe de superposition

Soit trois poutres I, II, III chargées séparément par $p\,\ell\,\vec{y}$, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et la poutre **1** chargée simultanément par $p\,\ell\,\vec{y}$, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$. Dans le domaine élastique, on peut écrire les sommes vectorielles suivantes :

- pour les actions aux appuis : $\vec{A_{2/1}} = \vec{A_{I}} + \vec{A_{II}} + \vec{A_{III}}$
  $\vec{B_{3/1}} = \vec{B_{I}} + \vec{B_{II}} + \vec{B_{III}}$;
- pour les déformations : $\vec{f_E} = \vec{f_{EI}} + \vec{f_{EII}} + \vec{f_{EIII}}$;
- pour les contraintes normales : $\vec{\sigma_M} = \vec{\sigma_{MI}} + \vec{\sigma_{MII}} + \vec{\sigma_{MIII}}$

54.1 Généralisation du principe

Dans le domaine élastique, les sollicitations dans une poutre chargée simultanément par *n* forces extérieures sont équivalentes à la somme des sollicitations dans *n* poutres indépendantes chargées par chacune des *n* forces prises séparément.

REMARQUE :

Ce principe permet de décomposer un système complexe de *n* forces, en *n* systèmes simples, avec une seule force appliquée. On trouve ensuite chaque valeur de flèche dans le formulaire des poutres (chapitre 53) et on en fait la somme algébrique pour retrouver la flèche du système initial (même démarche pour Mf).

54.2 Exemple de calcul

Une poutre **1** de longueur ℓ, de moment quadratique I_{Gz}, de module d'Young E, est encastrée dans **2** et **3** aux deux extrémités. Elle est soumise à son propre poids (de coefficient linéique p en N/m) et à une charge concentrée verticale $\vec{F}$ appliquée en son milieu. Calculer à l'aide d'un formulaire : Mf_{max} et f_C.

SOLUTION :

Décomposons la poutre **1** en deux poutres partielles I et II. La poutre I est soumise à son propre poids. Le formulaire donne (voir § 53.2) :

$$Mf_{AI} = +\frac{p \cdot \ell^2}{12} \qquad f_{CI} = -\frac{p \cdot \ell^4}{384E \cdot I_{Gz}}$$

La poutre II est soumise à une charge concentrée :
Le formulaire donne (voir § 53.2) :

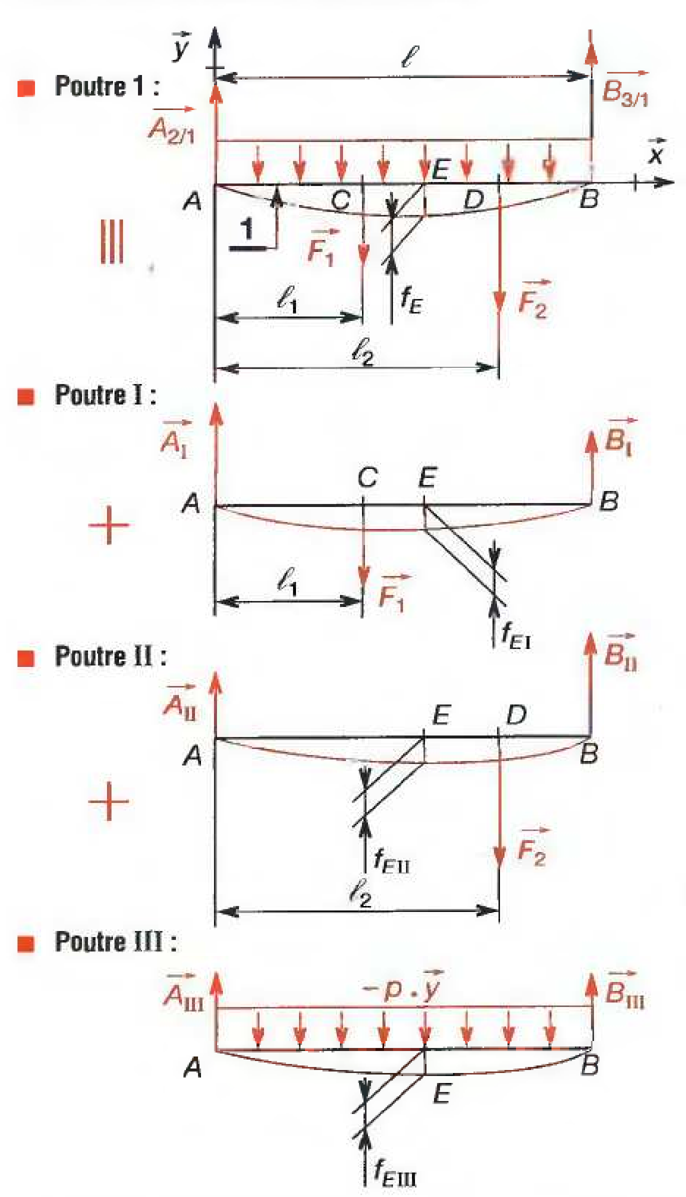
$$Mf_{AII} = +\frac{\|\vec{F}\| \cdot \ell}{8} \qquad f_{CII} = -\frac{\|\vec{F}\| \cdot \ell^3}{192E \cdot I_{Gz}}$$

Pour la poutre **1**, on trouve :

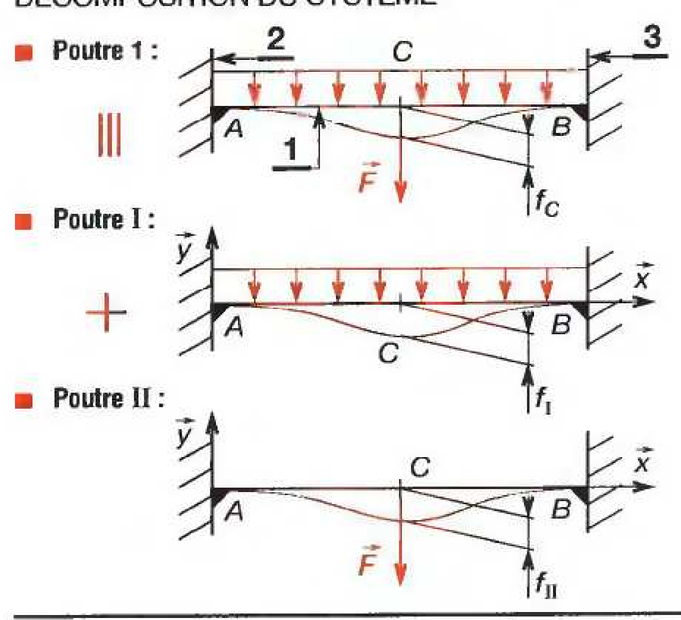
$$Mf_{max} = Mf_{AI} + Mf_{AII} \qquad Mf_{max} = +\frac{\ell}{4}\left(\frac{\|\vec{F}\|}{2} + \frac{p \cdot \ell}{3}\right)$$

$$f_C = f_{CI} + f_{CII} \qquad f_C = -\frac{\ell^3}{192E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{p \cdot \ell}{2} + \|\vec{F}\|\right)$$

DÉCOMPOSITION D'UN SYSTÈME



DÉCOMPOSITION DU SYSTÈME



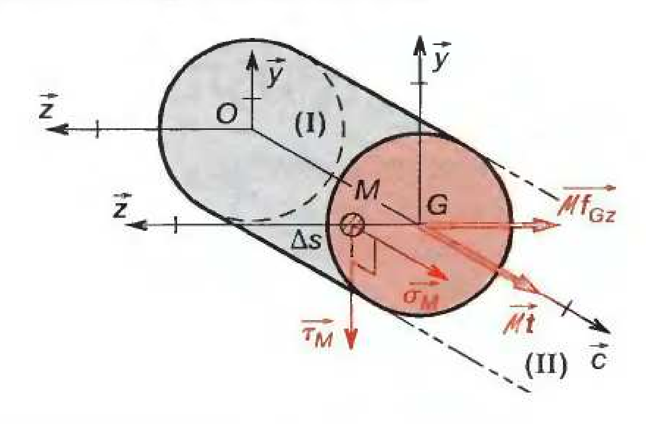
55 Sollicitations composées

55 ■ 1 Flexion - torsion

Un arbre est soumis à une sollicitation de flexion-torsion si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de l'arbre est réductible en G, barycentre de la section droite (S) à un **moment de torsion et à un moment de flexion.**

$$ _G\{Coh_{II/I}\} = {}_G\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{Mt} + \overrightarrow{Mf_{Gz}} \end{matrix} \right\} $$ Dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $N = 0 ; T_y = 0 ; T_z = 0$; $Mt \neq 0 ; Mf_{Gy} \neq 0 ; Mf_{Gz} \neq 0$

ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN G



55 ■ 12 Moment idéal de flexion

Les contraintes normales et tangentielles agissent simultanément et il y a majoration de chacune d'elles. On calcule la contrainte normale à partir du **moment idéal de flexion** défini par la formule générale de Mohr-Cacquot (issue des théories de l'élasticité).

$$Mf_i = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) Mf + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{Mf^2 + Mt^2}$$

Mf_i : moment idéal de flexion (N.mm).
Mf : moment de flexion calculé en G (N.mm).
Mt : moment de torsion calculé en G (N.mm).

$$\lambda = \frac{R_{pg}}{R_{pe}} = \frac{\text{Résistance pratique au cisaillement}^*}{\text{Résistance pratique à l'extension}}.$$

REMARQUE :

- On pose parfois $Mt_i = \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$.
Mt_i : moment de torsion idéal (N.mm).
- Lorsque $|Mf| < |Mt|$ toutes les relations ci-contre donnent des diamètres très peu différents.
- La condition de résistance s'écrit $|\sigma_M| \leq R_{pe}$.

CALCUL DU MOMENT IDÉAL DE FLEXION (D'après Mohr-Cacquot)	
Matériau	**Expression de Mf_i**
Acier : $\lambda \approx \frac{R_{pg}}{R_{pe}}$ $\lambda \approx \frac{1}{2}$ *	$Mf_i = \sqrt{Mf^2 + Mt^2} = Mt_i$ **(Formule de Coulomb)**
Fonte : $\lambda \approx 1$	$Mf_i = \frac{1}{2} Mf + \frac{1}{2}\sqrt{Mf^2 + Mt^2}$ **(Formule de Rankine)**
Matériaux moulés : $\lambda \approx \frac{4}{5}$	$Mf_i = \frac{3}{8} Mf + \frac{5}{8}\sqrt{Mf^2 + Mt^2}$ **(Formule de Saint Venant)**

55 ■ 13 Déformations

Pour le calcul des flèches verticales, par exemple, partir de la sollicitation de flexion supposée seule. Vérifier ensuite que cette flèche est acceptable**.

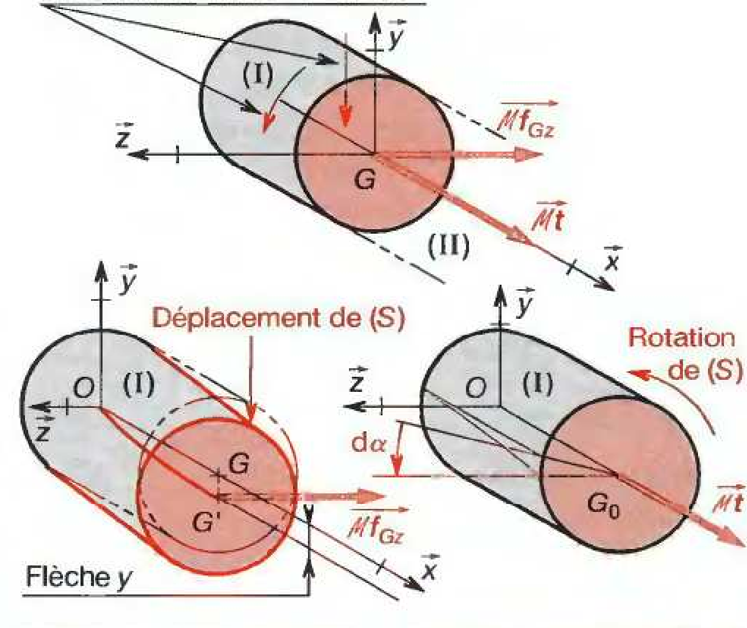
$$|f|_{max} \leq f_{lim}$$

f : flèche maximale calculée à partir de Mf_{Gz} seul.
f_{lim} : flèche limite à ne pas dépasser.

Pour le calcul des angles de torsion, partir de la sollicitation de torsion supposée seule. Vérifier ensuite ***:

$$|\theta|_{max} \leq \theta_{lim}$$

DÉFORMATIONS



1er calcul		**2e calcul**
Déformation due à la flexion seule	+	**Déformation due à la torsion seule**

* Voir § 50.5 : cisaillement valeurs de R_{eg} et R_c. ** Voir § 52.932 : flexion. *** Voir § 51.7 : torsion.

55 ■ 14 Exemple de calcul

Un dispositif de levage est constitué d'un tambour **1**, lié à l'arbre **2**, actionné par un motoréducteur **4**. Lorsque le tambour tourne, le câble **3** s'enroule dans une rainure hélicoïdale et la charge s'élève. L'arbre **2** est guidé dans les carters **5** et **6** par deux roulements rigides à une rangée de billes.

DONNÉES :

- Diamètre du tambour : $D = 150$ mm.
- Charge soulevée $\|\vec{P}\| = 1\,800$ N ; $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{P}\|/2$.
- Couple moteur : $\vec{C_m} = -135\,\vec{x}$ (en N.m).
- Résistance pratique de l'acier de **2** :
  $R_{pe} = 150$ MPa et $R_{pg} = 75$ MPa (donc $\lambda \approx 0{,}5$).
- **Hypothèses :** poids des éléments négligés devant la charge.
- L'angle de rotulage des roulements ne dépasse pas 4 et 5'. Le roulement en A, qui assure le positionnement est modélisé par une liaison rotule. Le roulement en B, monté coulissant dans son alésage est modélisé par une liaison sphère-cylindre.
- L'action du moteur électrique **4** sur l'arbre **2** est modélisé par un torseur-couple. $\{\vec{0}, \vec{C_m}\} = \{\vec{0}, -135\,\vec{x}\}$.

On demande de :

1° déterminer la sollicitation,
2° déterminer le diamètre mininum de l'arbre **2**.

SOLUTION :

1° Rechercher la sollicitation dans 2 en *C*

■ **Isoler le tronçon *AG*, rechercher le torseur de cohésion :**

$$_G\{\text{Coh}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A_{5/2}} \\ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{A_{5/2}} \times \overrightarrow{C_m} \end{matrix} \right\}_G^* = \left\{ \begin{matrix} -900\,\vec{y} \\ 900\,x.\vec{z} + 135 \times 10^3\,\vec{x} \end{matrix} \right\}_G.$$

■ **Identifier les sollicitations en *C* et calculer leurs valeurs.**

$T_y = -900$ N ; $Mf_{Gz} = 54 \times 10^3$ N.mm ; $Mt = 135 \times 10^3$ N.mm.

La sollicitation est de la flexion-torsion.

2° Déterminer le diamètre min de l'arbre 2

■ **Calculer le moment idéal de flexion** : $\lambda \approx 0{,}5$, la formule de Coulomb s'applique : $Mf_i = \sqrt{Mf^2 + Mt^2}$ (§ 55.2)

$$Mf_i = \sqrt{54^2 \times 10^6 + 135^2 \times 10^6}$$

$$Mf_i \approx 1{,}45 \times 10^5 \text{ N.mm}.$$

■ **Calculer la contrainte normale** d'après § 52.4.

$$|\sigma_M| = \frac{Mf_i}{I_{Gz}} \cdot |y|_{max} ; \ |\sigma_M| \approx \frac{145\,400}{\pi . d^4/64} \times d/2 ;$$

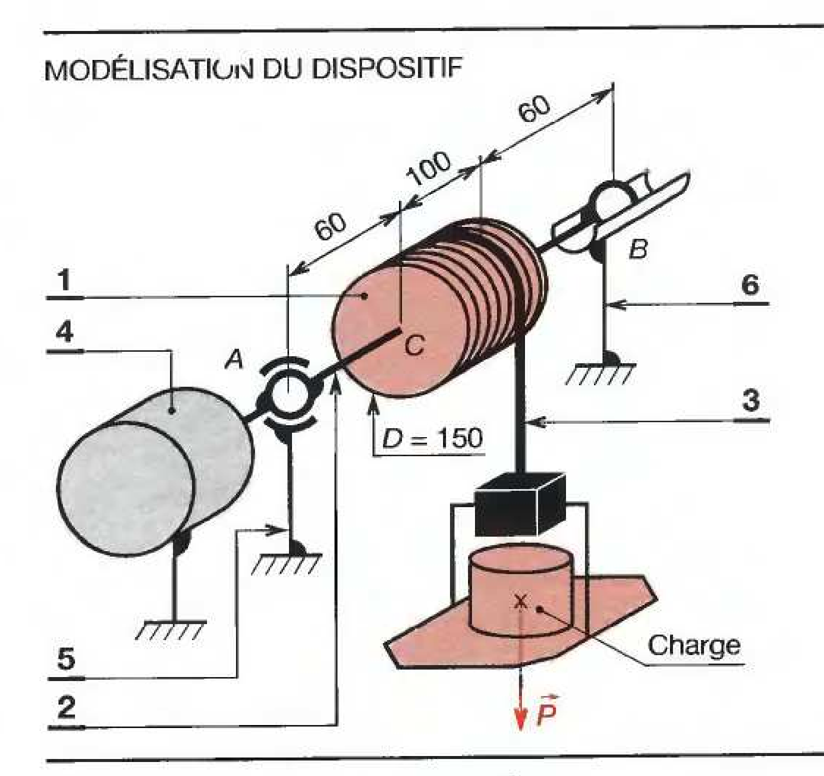
$$|\sigma_M| \approx 4{,}65 \times 10^6/\pi . d^3 ; \ |\sigma_M| \approx 1{,}48 \times 10^6/d^3.$$

■ **Écrire la condition de résistance**, calculer d :

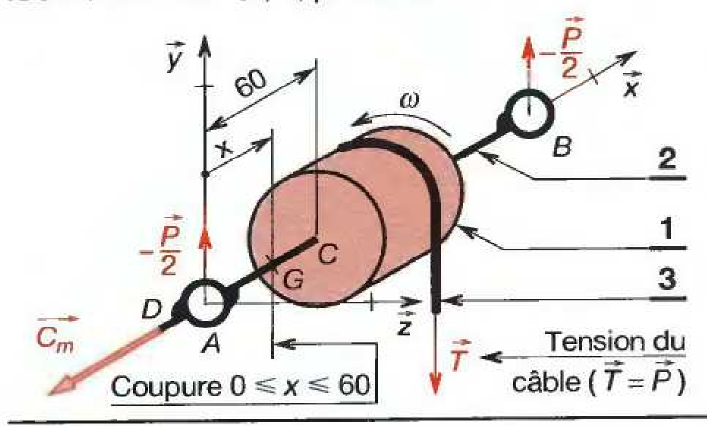
$$\frac{1{,}48 \times 10^6}{d^3} < 150 ; \ d \geqslant \sqrt[3]{\frac{1{,}48 \times 10^6}{150}} ; \ \mathbf{d \geqslant 21{,}4 \text{ mm}}.$$

* × est le signe du produit vectoriel (∧ toléré).

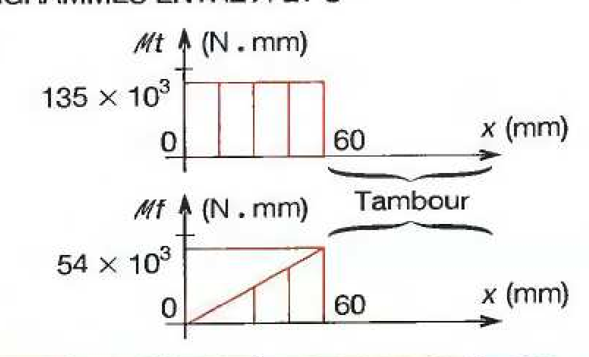
MODÉLISATION DU DISPOSITIF



ISOLEMENT DE {**1**, **2**, portion de **3**}



DIAGRAMMES ENTRE *A* ET *C*



Méthode de calcul
1° Rechercher la nature de la sollicitation.
2° Calculer Mf_{max} et Mt_{max} dans (*S*).
3° Calculer Mf_i.
4° Calculer la contrainte $\lvert\sigma_M\rvert$
5° Écrire la condition de résistance $\lvert\sigma_M\rvert \leqslant R_{pe}$.
6° Calculer *d*.

55 ▪ 2 Traction-torsion

Un solide est soumis à une sollicitation de traction-torsion si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) du solide est réductible en G, barycentre de la section droite (S) à un **effort normal** et **un moment de torsion :**

$$_G\{Coh_{II/I}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} \vec{N} \\ \vec{Mt} \end{array} \right\} \quad \text{Dans } \mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}): \; N \neq 0 ; T_y = 0 ; T_z = 0 ; \; Mt \neq 0 ; Mt_{Gy} = 0 ; Mt_{Gz} = 0$$

CALCUL DES CONTRAINTES :

Toute fibre supporte deux contraintes de **nature différente** : une contrainte normale $\vec{\sigma_M}$ et une contrainte tangentielle $\vec{\tau_M}$.

On définit une **contrainte idéale** σ_i telle que : $\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$.

La condition de résistance s'écrit :

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant R_{pe}$$

Avec $|\sigma_M| = \dfrac{|N|}{S}$ et $|\tau_M| = \dfrac{|Mt|}{I_0} . R$ (arbre cylindrique)*

R_{pe} : résistance pratique à l'extension (MPa).

REMARQUE :

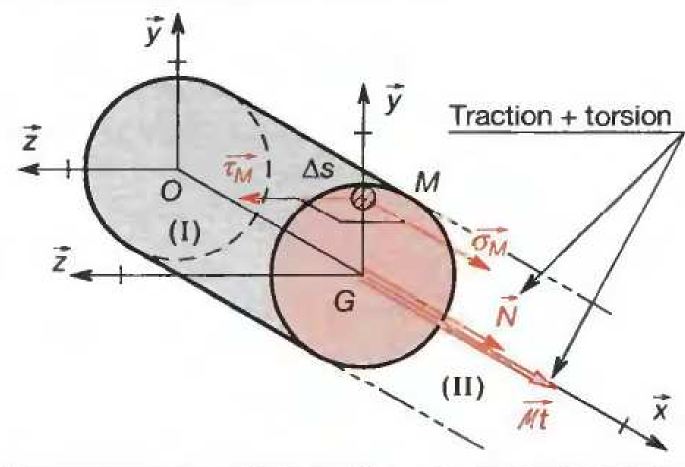
Ce calcul est aussi valable pour une sollicitation de traction-cisaillement. Dans ce cas $|\tau_M| = \dfrac{|T|}{S}$.

EXEMPLE : CALCUL D'UNE VIS

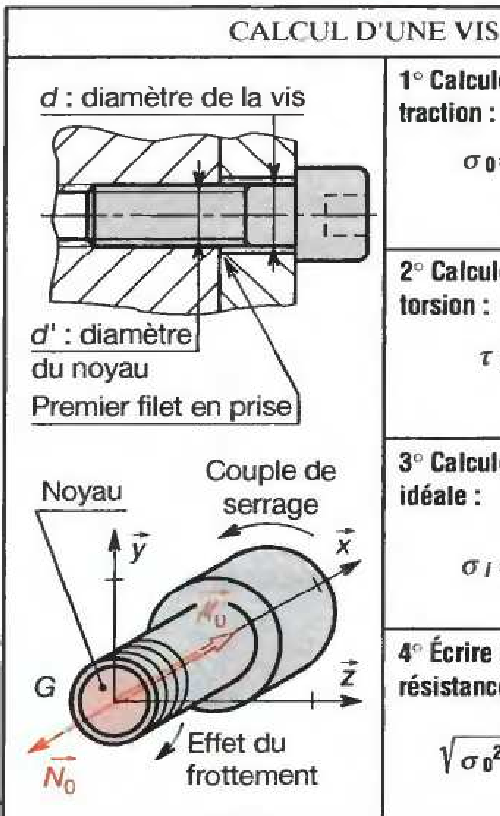
Au niveau du premier filet en prise d'une vis, cette dernière est soumise lors du **serrage** (ou du desserrage) à :

- une force de traction $\vec{N_0}$ qui provoque son allongement et une **contrainte normale $\vec{\sigma_0}$ dans son noyau** :
(L'effort N_0 est appelé tension de pose ou précharge.)
- un moment $\vec{M_0}$ dirigé selon $(O, \vec{x})$ dû au frottement des filets du trou taraudé sur ceux de la vis, moment proportionnel à l'effort de traction (voir valeur § 12.4) d'où une **contrainte tangentielle $\vec{\tau_0}$ dans le noyau** de la vis.

ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN G



CALCUL D'UNE VIS



1° Calculer la contrainte de traction :

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{S} = \frac{N_0}{\left(\dfrac{\pi d'^2}{4}\right)}$$

2° Calculer la contrainte de torsion :

$$\tau_0 = \frac{M_0}{\dfrac{I_0}{R}} = \frac{16 M_0}{\pi d^3}$$

3° Calculer la contrainte idéale :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2}$$

4° Écrire la condition de résistance :

$$\sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2} \leqslant R_{pe}$$

55 ▪ 3 Torsion-cisaillement

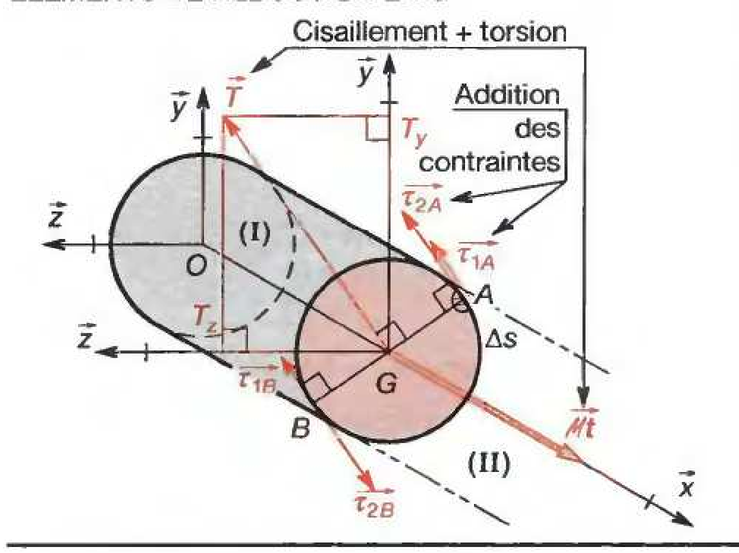
Le torseur associé aux forces de cohésion de la partie (II) sur la partie (I) est réductible en G, barycentre de la section droite (S) à un moment de torsion et un effort tranchant.

$$_G\{Coh_{II/I}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} \vec{T} \\ \vec{Mt} \end{array} \right\} \quad \text{Dans } \mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}): \; N = 0 ; T_y \neq 0 ; T_z \neq 0 ; \; Mt \neq 0 ; Mt_{Gy} = 0 ; Mt_{Gz} = 0$$

Les contraintes sont de même nature. En A, elles s'ajoutent :

$$|\tau_{totale\,A}| = |\tau_{1A}| + |\tau_{2A}| \quad \text{ou} \quad \frac{|T|}{S} + \frac{|Mt|}{I_0} . R \leqslant R_{pg}$$

ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION EN G



* Voir § 48.3 et § 51.8.

55.4 Flexion-traction Flexion-compression

Un solide est soumis à une sollicitation de flexion-traction (ou compression) si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) du solide est réductible en G, barycentre de la section droite (S) à un **effort normal** et un **moment de flexion**.

$${}_{G}\{\mathrm{Coh}_{II/I}\} = {}_{G}\left\{\begin{matrix}\vec{N}\\ \overrightarrow{Mf_{Gz}}\end{matrix}\right\}$$ Dans $\mathcal{R}(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $N \neq 0 ; T_y = 0 ; T_z = 0$; $Mt = 0 ; Mf_{Gy} = 0 ; Mf_{Gz} \neq 0$

- $N > 0 ; Mf_{Gz} \neq 0$: flexion-traction.
- $N < 0 ; Mf_{Gz} \neq 0$: flexion-compression.

55.41 Contraintes normales à (S)

Le principe de superposition des contraintes normales à (S) $\vec{\sigma_1}$ (due à compression) et $\vec{\sigma_2}$ (due à flexion) permet d'écrire* :

- Dans la zone au-dessus de l'axe $(G, \vec{x})$ au point A :

$$\vec{\sigma_A} = \vec{\sigma_{1A}} + \vec{\sigma_{2A}} \; ; \; \vec{\sigma_A} = -\|\vec{\sigma_{1A}}\| - \|\vec{\sigma_{2A}}\| .$$

$$\sigma_A = -\frac{\|\vec{N}\|}{S} - \frac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot |y_A|_{max}$$ (Voir § 48.3, 52.4.)

- Dans la zone au-dessous de l'axe $(G, \vec{x})$ au point B :

$$\vec{\sigma_B} = \vec{\sigma_{1B}} + \vec{\sigma_{2B}} \; ; \; \vec{\sigma_B} = -\|\vec{\sigma_{1B}}\| + \|\vec{\sigma_{2B}}\| .$$

$$\sigma_B = -\frac{\|\vec{N}\|}{S} + \frac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot |y_B|_{max}$$

- Si $T_y \neq 0$, le calcul des contraintes normales ne sera pas modifié aux points les plus éloignés de l'axe neutre, car les contraintes $\|\vec{\tau_A}\|$ et $\|\vec{\tau_B}\|$ sont nulles en ces points (voir § 52.7 glissement longitudinal).

Elles sont, **en général**, **négligeables** pour les autres points de (S).

55.42 Condition de résistance

Les contraintes normales maximales de traction et compression étant calculées, on écrit que :

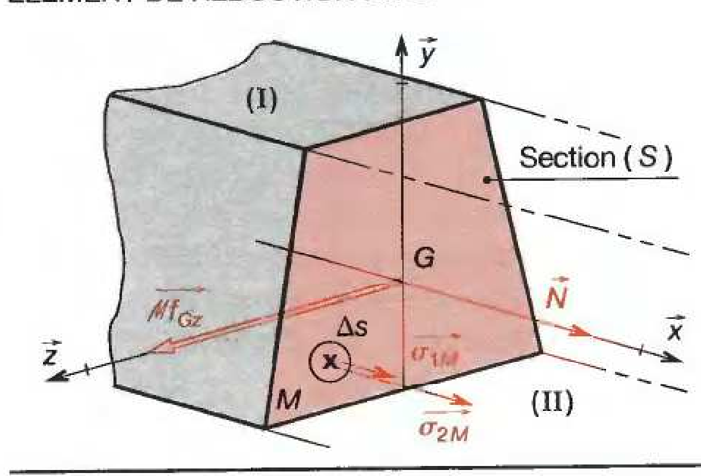
Dans la zone GA : $\|\vec{\sigma_A}\| \leq R_{pc}$

$$\frac{\|\vec{N}\|}{S} + \frac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot |y_A|_{max} \leq R_{pc} .$$

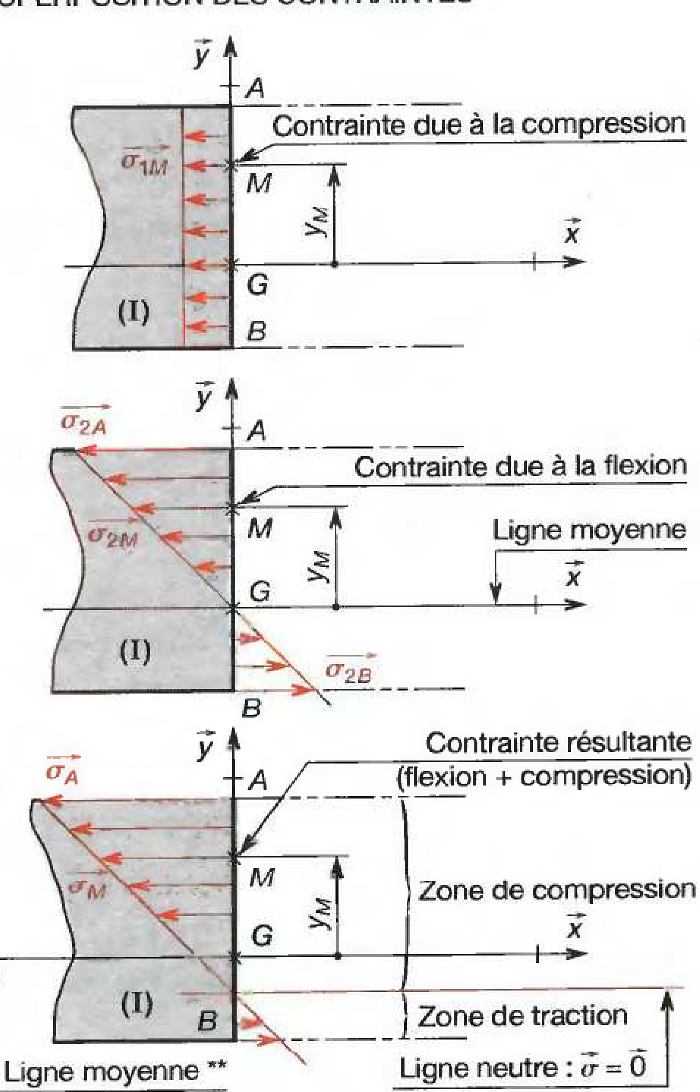
Dans la zone GB : $\|\vec{\sigma_B}\| \leq R_{pe}$

$$\left| -\frac{\|\vec{N}\|}{S} + \frac{\|\overrightarrow{Mf_{Gz}}\|}{I_{Gz}} \cdot |y_B|_{max} \right| \leq R_{pe} .$$

ÉLÉMENT DE RÉDUCTION EN G



SUPERPOSITION DES CONTRAINTES



PROPRIÉTÉ IMPORTANTE
La sollicitation de compression-flexion augmente la zone de compression en déplaçant la ligne neutre en dessous de la ligne moyenne. Cette propriété est utilisée pour les matériaux à faible résistance à la traction (bétons, fontes...).

* Voir principe de superposition chapitre 54.

** La ligne moyenne passe par G. Voir § 45.2.

EXEMPLE DE CALCUL :

Un dispositif antidérapant pour automobile* comprend un boîtier central **9** et six bras **1**, **2**, **3**, **1'**, **2'**, **3'** dont la partie recourbée s'applique contre la bande de roulement du pneu. Cette partie reçoit une force $\vec{A} = -220\,\vec{x}$ (en N) du pneu, lors du serrage. Dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la distance du point de contact *A* à la ligne moyenne du bras est : $d = 110$ mm.

Ce dernier est en acier de résistance élastique $R_e = 600$ MPa**, de section rectangulaire 20×5. Le coefficient de sécurité est : $s = 2$.

1° Identifier la sollicitation dans la partie *BC* du bras **3**.

2° Vérifier si **3** résiste à cette sollicitation.

SOLUTION :

1° Identifier la nature de la sollicitation dans *BC*

- **Effectuer une coupure entre *B* et *C*** : la partie (I) est la partie du bras en-dessous de la coupure, par convention.
- **Déterminer le torseur de cohésion** en *G* :

$$_G\{\text{Coh}\} = -\,_G\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{A_{6/3}} \\ \overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{A_{6/3}}\end{matrix}\right\} \text{ Dans } \mathcal{R}_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ on a :}$$

$\vec{R} = -\vec{A}$ $\quad \vec{R} = 220\,\vec{x}$ (en N) ; $\overrightarrow{\mathcal{M}_G}$ (en N . mm) :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_G} = -(\overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{A_{6/3}}) : -\begin{pmatrix}-x \\ +110 \\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-220 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ -24\,200\end{pmatrix}$$

Dans le repère local de définition des sollicitations $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$\vec{N} = 220\,\vec{x}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}f_{Gz}} = -24\,200\,\vec{z}$: **traction + flexion**.

2° Vérifier si 3 résiste à cette sollicitation

- **Calculer les contraintes :**

La contrainte σ_1 due à la traction est :

$$|\sigma_1| = \frac{|N|}{S} = \frac{220}{5 \times 20} \quad ; \quad |\sigma_1| = \mathbf{2{,}2\ MPa.}$$

La contrainte σ_2 due à la flexion est $\left(\text{avec } I_{Gz} = \frac{b\,h^3}{12}\right)$:

$$|\sigma_2| = \frac{|\mathcal{M}f_{Gz}|}{I_{Gz}} \cdot |y|_{max} \ ; \ |\sigma_2| = \frac{24\,200}{\left(\frac{20 \times 5^3}{12}\right)} \times 2{,}5$$

$$|\sigma_2| = \mathbf{290\ MPa}$$

Contrainte totale maximale (d'après le chapitre 54) :

$|\sigma_M| = |\sigma_1| + |\sigma_2|$; $|\sigma_M| \approx \mathbf{293\ MPa}$

- **Écrire la condition de résistance :**

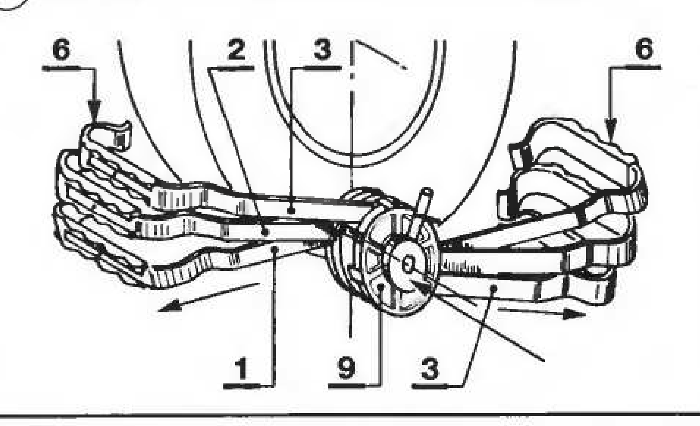
$|\sigma_M| \leqslant R_{pe}$; calculer $R_{pe} = \frac{R_e}{s} = \frac{600}{2}$; $R_{pe} = 300$ MPa.

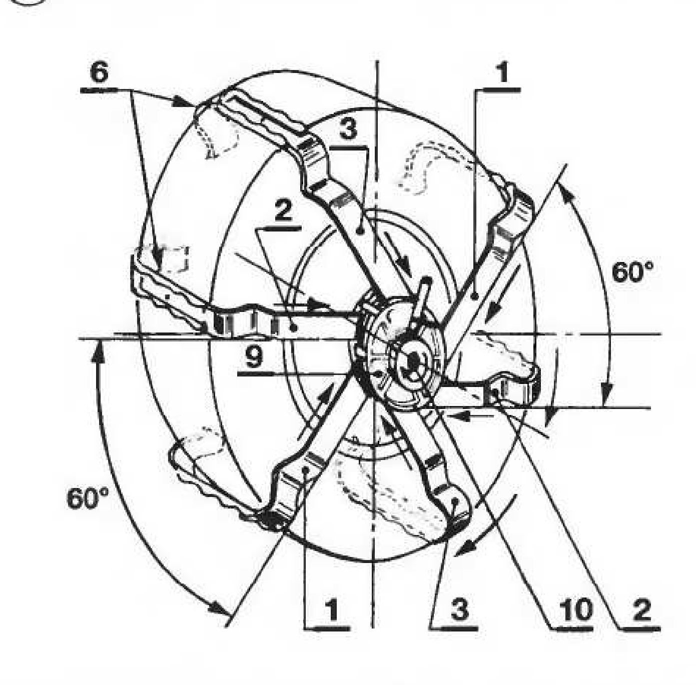
293 < 300 MPa. Condition vérifiée.

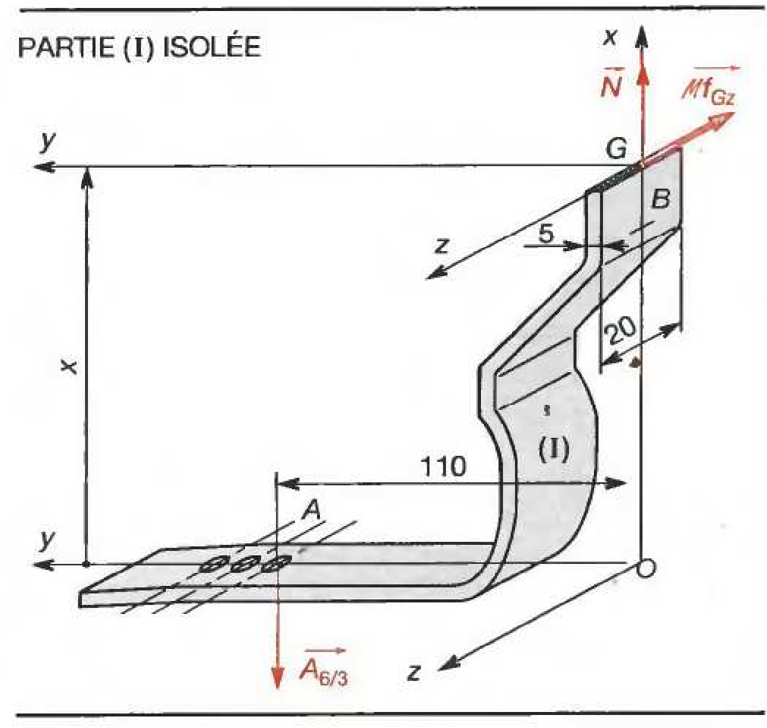
REMARQUE :

La contrainte $|\sigma_1|$ **due à la traction est très faible** devant la contrainte $|\sigma_2|$ due à la flexion. Dans la plupart des cas la sollicitation de flexion est déterminante devant la sollicitation de traction. (Les poutres en béton avec précharge longitudinale de compression n'entrent pas dans ce cas.)

* Voir aussi le chapitre 36. ** 1 MPa = 1 N/mm².







55.5 Flambage (Euler)

La poutre **1** longue et rectiligne est soumise à deux efforts axiaux $\vec{F}$, directement opposés, qui augmentent progressivement :

- **Si $F < F_c$ (F_c : charge critique) : stabilité.** La poutre reste sensiblement rectiligne, elle se raccourcit de $\Delta \ell$.
- **Si $F > F_c$: instabilité**. La poutre fléchit brusquement jusqu'à la rupture. C'est du flambage.

I_{Gz} **minimal**	▶	**Flexion selon $(G, \vec{x})$ perpendiculaire à $(G, \vec{z})$**

La flexion se produit selon la direction perpendiculaire à l'axe de (*S*) qui donne le moment quadratique le plus faible.

REMARQUE :

- Seule la théorie d'Euler du flambage sera développée dans cet ouvrage.
- Pour la méthode de Dutheil, qui permet de dimensionner au flambage, consulter des ouvrages spécialisés.

55.51 Élancement

La compression est remplacée par du flambage si la poutre est longue et ses dimensions transversales sont faibles. Cette proportion est caractérisée par :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

λ : élancement d'une poutre (sans unité).
L : longueur libre de flambage (mm).
ρ : rayon de giration de la section (mm) définit par :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}}$$

I_{Gz} : moment quadratique minimal de la section suivant l'axe principal perpendiculaire à la direction de la déformation (mm^4).
S : aire de la section droite (mm^2).

55.52 Charge critique

En cas de flambage, la charge critique d'Euler F_c est :

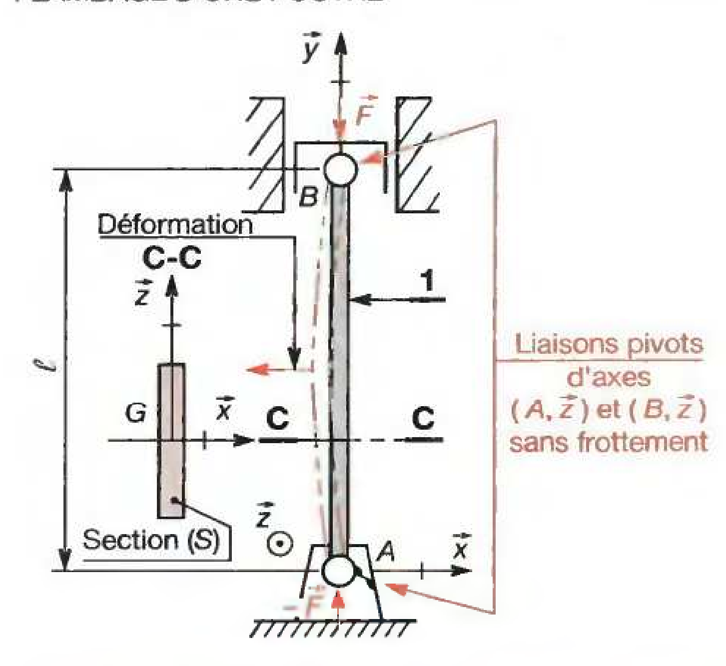
$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{Gz}}{L^2} \qquad (1)$$

E : module d'Young du matériau (MPa).
I_{Gz} : moment quadratique de la section (mm^4).
L : longueur libre de flambage de la poutre (mm).

REMARQUE :

ℓ est la longueur de la poutre, la longueur libre de flambage L, est fonction du type d'appui. Elle est donnée par le tableau ci-contre.

FLAMBAGE D'UNE POUTRE



LONGUEURS LIBRES DE FLAMBAGE	
Types de liaisons	**Valeurs de L**
① **En A et B : liaisons pivots.**	$\ell = L$
② **En A : liaison encastrement. En B : extrémité libre.**	$L = 2\ell$
③ **En A et B : liaisons encastrement.**	$L = \frac{\ell}{2}$
④ **En A : liaison encastrement. En B : liaison pivot.**	$L = 0{,}7\ell$

55.53 Contrainte critique

En écrivant que : $\lambda^2 = \frac{L^2}{\rho^2} = \frac{L^2}{\left(\frac{I_{Gz}}{S}\right)} = \frac{L^2 . S}{I_{Gz}}$.

En reportant cette valeur dans l'expression (1) de F_c :

$$F_c = \frac{\pi^2 . E . S}{\lambda^2} \quad (2)$$

La valeur de la contrainte critique σ_c (en MPa) est :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} \qquad \sigma_c = \frac{\pi^2 . E}{\lambda^2}$$

55.54 Calcul de résistance

En posant $\sigma_c = R_e$ ou $\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = R_e$ on définit :

$$\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 . E}{R_e} \quad (3)$$

λ_c : élancement critique (sans dimension)
(λ_c ne dépend que de la nature du matériau).
E : module d'élasticité longitudinal (MPa).
R_e : résistance élastique du matériau (MPa).

COEFFICIENT DE SÉCURITÉ :

Le coefficient de sécurité k, spécifique au flambage, est le double du coefficient de sécurité habituel s (s dépend du type de construction, des conditions de calcul et d'utilisation. Les valeurs de s sont données au § 48.5).

$$k = 2s \qquad s = \frac{R_{ec}}{R_{pc}} \qquad k = \frac{2 R_{ec}}{R_{pc}}$$

R_{ec}: résistance élastique à la compression (MPa).
R_{pc}: résistance pratique à la compression (MPa).

CONDITION DE RÉSISTANCE :

- La charge critique d'Euler F_c ne doit jamais être atteinte.
- F_{adm} : charge admissible sur la poutre.

$$k = \frac{F_c}{F_{adm}} \qquad F_{adm} = \frac{R_{pc}}{2 . R_e} . F_c \quad (4)$$

En remplaçant dans (4) F_c par sa valeur (2) ainsi que λ_c^2 (3) :

$F = \frac{R_{pc}}{2 . R_e} . \frac{\pi^2 . E . S}{\lambda^2}$, on trouve :

$$F_{adm} = \frac{R_{pc} . S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (5)$$

F_{adm}: force admissible d'après Euler (N).
R_{pc} : résistance pratique à la compression (MPa).
S : aire de la section droite (mm²).
λ : élancement de la poutre (sans dimension).
λ_c : élancement critique de la poutre (sans dimension).

■ $\lambda_c \approx 100$	**poutres en acier (profilés)**
■ $\lambda_c \approx 70$	**poutres en bois ou en aluminium**
■ $\lambda_c = 60$	**poutres en fonte**

CRITÈRES DE RÉSISTANCE :

Selon la valeur λ, la charge limite F est donnée par l'une des trois relations (poutres, acier).

Poutres courtes $\lambda < 20$	Poutres moyennes $20 < \lambda < 100$	Poutres élancées $\lambda > 100$
Compression simple : $F_{adm} = R_{pc} . S$	**Formule expérimentale de Rankine :** $F_{adm} = \frac{R_{pc} . S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$	**Formule d'Euler :** $F_{adm} = \frac{R_{pc} . S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$

EXEMPLE DE CALCUL :

Une vis à billes de diamètre à fond de filet $d = 32$ mm est guidée à une seule extrémité par deux roulements à billes. Elle est soumise de la part de l'écrou à une charge axiale de compression. L'écrou est au maximum à $\ell = 1\,000$ mm du palier. L'élancement critique de l'acier XC48 est : $\lambda_c = 60$, sa résistance pratique est : $R_{pc} = 150$ MPa.

Calculer la charge admissible sur la vis pour éviter le risque de flambage.

HYPOTHÈSES :

La vis est encastrée par rapport au bâti côté roulements, libre côté écrou (monté flottant).

- **Calculer l'aire de la section droite (S) :**

$$S = \frac{\pi . d^2}{4} \; ; \; S = \frac{\pi \times 32^2}{4} = 804 \text{ mm}^2$$

- **Calculer le moment quadratique de (S) :**

$$I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{64} \; ; \; I_{Gz} = \frac{\pi \times 32^4}{64} = 5{,}15 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

- **Calculer le rayon de giration :**

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{S}} \; ; \; \rho = \sqrt{\frac{5{,}15 \times 10^4}{804}} = 8 \text{ mm}$$

- **Calculer l'élancement de la vis :**

Cas n° 2 du tableau : longueur libre $L = 2\,\ell$

$$\lambda = \frac{2 . \ell}{\rho} \; ; \; \lambda = \frac{2 \times 1\,000}{8} = 250 \text{ (Euler s'applique)}$$

- **Calculer la charge admissible :**

$$F_{adm} = \frac{R_{pc} . S}{2\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \; ; \; F_{adm} = \frac{150 \times 804}{2 \times \left(\frac{250}{60}\right)^2} \; ; \; \mathbf{F_{adm} \approx 3\,474 \text{ N}}$$

56 Dynamique du solide en translation

56 ■ 1 Caractéristiques du mouvement

La vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{S/\Re g}}$ d'un solide (S) en translation dans un repère galiléen ($\Re_g$) est nulle à chaque instant (voir chapitre 22).

CONSÉQUENCES :

À chaque instant, tous les points du solide (S) ont :

- même vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S/\Re g}}$
- même vecteur accélération $\overrightarrow{a_{A\in S/\Re g}}$

L'étude du mouvement peut se limiter à celle du centre de gravité G du solide (S) :

$\forall\ A \in (S)$ quel que soit A appartenant à (S)	**:**	**$\overrightarrow{V_{A\in S/\Re g}} = \overrightarrow{V_{G\in S/\Re g}}$** **$\overrightarrow{a_{A\in S/\Re g}} = \overrightarrow{a_{G\in S/\Re g}}$**

56 ■ 2 Choix du repère

Les hypothèses fondamentales de la mécanique reposent sur un système d'axes absolus (repère de Copernic : origine au centre de gravité du système solaire et trois axes passant par des étoiles). Elles restent valables avec un repère galiléen ($\Re_g$) en translation par rapport aux axes de Copernic. Toutefois, avec une approximation satisfaisante pour la plupart des problèmes, on peut admettre qu'un repère lié à la terre est galiléen ($\Re_g$).

EXEMPLE :

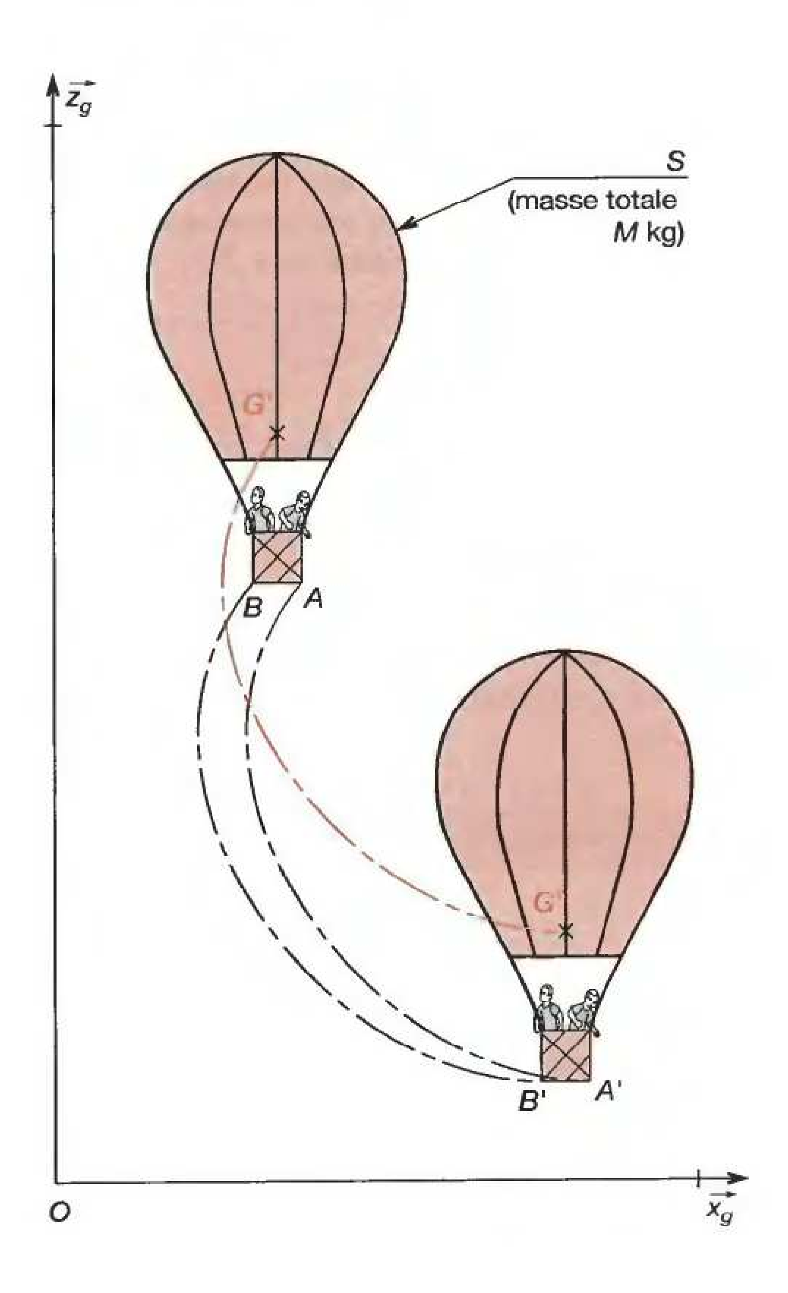
Le mouvement d'une tête d'usinage sera étudié sur un repère ($\Re_g$) lié au bâti de la machine.

56 ■ 3 Quantité d'accélération

La quantité d'accélération d'un point A auquel on associe une masse M peut être représentée par le pointeur $(A, M\vec{a})$. Elle s'exprime en kg . m . s^{-2}. Pour un solide (S) en translation, constitué de nombreux points ayant la même accélération que son centre de gravité G, le représentant est un torseur dynamique :

$$_G\{\mathcal{A}_{S/\Re g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} M.\overrightarrow{a_{G/\Re g}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

M représente alors la masse totale du solide (S).



$\overrightarrow{AB}$ forme un angle constant avec l'un quelconque des axes ($O,\vec{xg}$), ($O,\vec{zg}$) du repère ($\Re_g$) = $(O,\vec{xg},\vec{yg},\vec{zg})$:

$$\overrightarrow{\Omega_{S/\Re g}} = \vec{0}$$

Le torseur de quantité d'accélération s'écrit en G :

$$_G\{\mathcal{A}_{S/\Re g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} M.\overrightarrow{a_{G/\Re g}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{(\vec{xg},\vec{yg},\vec{zg})}$$

56.4 Principe fondamental

Il existe au moins un repère ($\mathcal{R}_g$) dit galiléen, et une chronologie, dite absolue, par rapport auxquels, pour tout système matériel (S), le torseur des forces extérieures appliquées à (S) – noté ${}_G\{\mathcal{F}_{ext/S}\}$ au point G – est égal à son torseur des quantités d'accélérations – noté ${}_G\{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_g}\}$ au même point – On écrit symboliquement :

$$_G\{\mathcal{F}_{ext/S}\} = {}_G\{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_g}\}$$

- On obtient deux relations vectorielles pour un solide (S) de masse M, de centre de gravité G :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M \cdot \overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}_g}} \quad \text{(I)}$$

$$\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \quad \text{(II)}$$

- L'énoncé de ces relations constitue les théorèmes généraux de la dynamique.

Résultante dynamique (I)	Moment dynamique (II)
$\Sigma \overrightarrow{F_{ext/S}} = M \cdot \overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}g}}$; G ; O ; S ; $\vec{x}_g$	$\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_G(F_{ext/S})} = \vec{0}$; G ; O ; S ; $\vec{x}_g$
La somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un ensemble (S) en translation dans un repère galiléen ($\mathcal{R}_g$), est égale au produit de sa masse m par son vecteur accélération.	**La somme des moments au centre de gravité G de toutes les forces extérieures appliquées à (S), en translation dans un repère galiléen ($\mathcal{R}_g$) est nulle.**
$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}/S} = M . \overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$	$\Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = \vec{0}$

* Voir § 74.1.

REMARQUES :

- $M\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}_g}}$ représente la quantité d'accélération du centre de gravité G de (S).

- En tout autre point A que G, le moment peut ne pas être nul ; en effet :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_g}\} = \overrightarrow{\mathcal{M}_G}\{\mathcal{A}_{S/\mathcal{R}_g}\} + \overrightarrow{AG} \times M.\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}_g}}^{*}$$
$$= \overrightarrow{AG} \times M.\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}_g}}$$
$$= \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(G, M\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}_g}})$$

- Par projections sur les trois axes d'un repère quelconque, les deux relations vectorielles (I) et (II) déterminent six équations algébriques :

$$\Sigma \overline{\text{Proj}/_{Oxg}}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = M \cdot x'' \quad (1)$$
$$\Sigma \overline{\text{Proj}/_{Oyg}}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = M \cdot y'' \quad (2)$$
$$\Sigma \overline{\text{Proj}/_{Ozg}}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = M \cdot z'' \quad (3)$$
$$\Sigma \overline{\mathcal{M}_{Gxg}}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = 0 \quad (4)$$
$$\Sigma \overline{\mathcal{M}_{Gyg}}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = 0 \quad (5)$$
$$\Sigma \overline{\mathcal{M}_{Gzg}}(\overrightarrow{F_{ext}/S}) = 0 \quad (6)$$

- x'', y'', z'' sont les dérivées secondes par rapport au temps t, des coordonnées du centre de gravité G de (S).

- Pour un solide, en translation rectiligne selon $(O, \vec{x})$, il ne reste que trois équations exploitables :

(1) $\Sigma \overline{\text{Proj}/_{(O\vec{x})}}(\vec{F}_{ext}) = Mx''$

(2) $\Sigma \overline{\text{Proj}/_{(O\vec{y})}}(\vec{F}_{ext}) = 0$

(6) $\Sigma \overline{\mathcal{M}_{(G\vec{z})}}(\vec{F}_{ext}) = 0$

Dans ces équations, x, y, z, coordonnées du centre de gravité G de (S), sont des fonctions du temps t.

56■5 Effet d'inertie Méthode de d'Alembert

Il suffit d'écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$_G\{\mathcal{F}_{ext/S}\} + _G\{e_i\} = _G\{0\}$$

où :

$_G\{\mathcal{F}_{ext/S}\}$ représente le torseur des forces extérieures à (S),

$_G\{e_i\}$ représente le torseur des effets d'inertie.

REMARQUES :

■ $_G\{e_i\} = -_G\{\mathcal{A}_{G\in S/\mathcal{R}g}\}$: le torseur des effets d'inertie est égal au torseur des quantités d'accélérations (ou torseur dynamique) changé de signe.

■ En ajoutant les effets d'inertie aux actions mécaniques extérieures, le problème de dynamique se traite comme un problème de statique :

(I)	$\Sigma\ \overrightarrow{Fext} + \vec{e}_i = \vec{0}$	avec $\vec{e}_i = -M.\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}g}}$
(II)	$\Sigma\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G}(\overrightarrow{Fext}) = \vec{0}$	

56■6 Quantité de mouvement

Le théorème de la résultante dynamique prend une autre forme si l'on exprime l'accélération du point G en fonction de sa vitesse : $\overrightarrow{V_{G\in S/\mathcal{R}g}}$:

$$\text{(I)}\qquad \Sigma\ \overrightarrow{Fext} = M.\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{G/\mathcal{R}g}} = \frac{d}{dt}\left(M.\overrightarrow{V_{G/\mathcal{R}g}}\right)$$

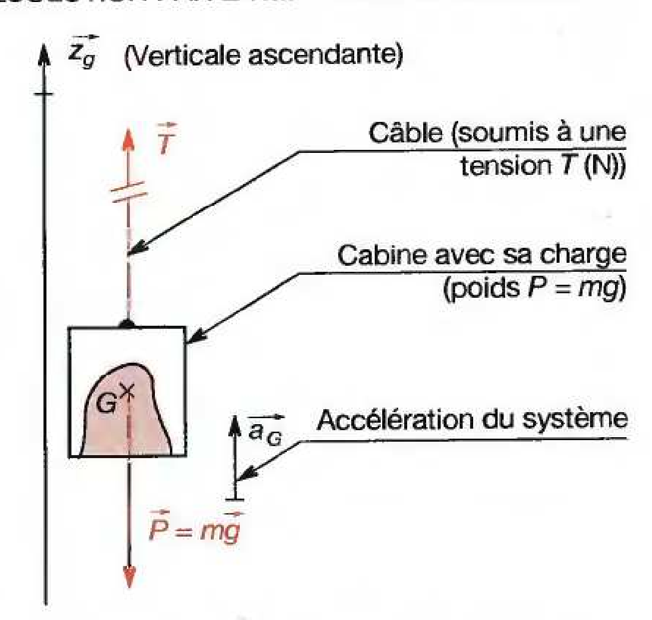
Le vecteur $\vec{p} = M.\overrightarrow{V_{G/\mathcal{R}g}}$ s'appelle «quantité de mouvement de (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen $(\mathcal{R}_g)$».

NOTA : p s'exprime en kg . m . s^{-1}.

THÉORÈME :

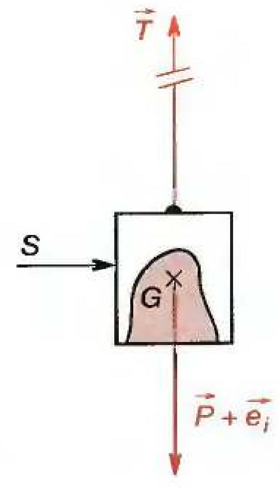
La somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système (S) est égale à la dérivée, par rapport au temps, de la quantité de mouvement de (S) dans ($\mathcal{R}_g$).

RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DE D'ALEMBERT



Problème : exprimer T en fonction de mg et a_G (application numérique : m = 500 kg, $g \approx$ 10 m/s^2, $a_G = 0$ puis a_G = 2 m/s^2)

Solution : Isoler (S) = { cabine + charge }



(S) est en équilibre relatif sous :

- Les charges : $\vec{T} = T.\vec{z_g}$
  $\vec{P} = -mg.\vec{z_g}$
- L'effet d'inertie : $\vec{e_i} = -ma_G.\vec{z_g}$
- Les efforts dus à la pression atmosphérique, se compensent

Par conséquent : $T - m.g - m.a_G = 0$

D'où $\boldsymbol{T = m(g + a_G)}$

Application numérique :

si $a_G = 0$: T = 5000 N

si a_G = 2 m/s^2: T = 6000 N

56■7 Méthode de résolution

56■71 Actions mécaniques extérieures

■ Isoler un système matériel et préciser un repère $(\mathcal{R}_g)$ galiléen.

Éventuellement, élaborer un croquis ou un schéma de cet ensemble isolé.

■ Effectuer le bilan des actions mécaniques exprimées sous forme de torseur ; examiner les symétries et toutes particularités permettant de réduire ces torseurs à des résultantes (invariants § 76.3).

Commencer par les actions à distance puis de contact. (Un graphe de liaison peut éviter des oublis dans le cas de mécanismes complexes.)

■ Décompter les inconnues :

Pour un solide en translation selon $(O, \vec{x})$ dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$, on dispose des équations :

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} \cdot \vec{x} = M . \overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}g}} \qquad (1)$$

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} \cdot \vec{y} = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma \overrightarrow{M_{Gz}} \left(\overrightarrow{Fext}\right) = \vec{0} \qquad (\text{II})$$

REMARQUE :

Le problème ne peut présenter plus de 3 n inconnues pour n solides isolés.

Si ce n'est pas le cas, il faut revoir la modélisation.

56■72 Analyse cinématique

Elle consiste à exprimer l'accélération du centre de gravité G du système isolé pour pouvoir appliquer le théorème de la résultante ou la méthode de d'Alembert.

Elle consiste à exprimer la vitesse du centre de gravité G si l'on préfère appliquer le théorème de la quantité de mouvement (intéressant quand la somme des forces extérieures est nulle).

56■73 Équations du mouvement

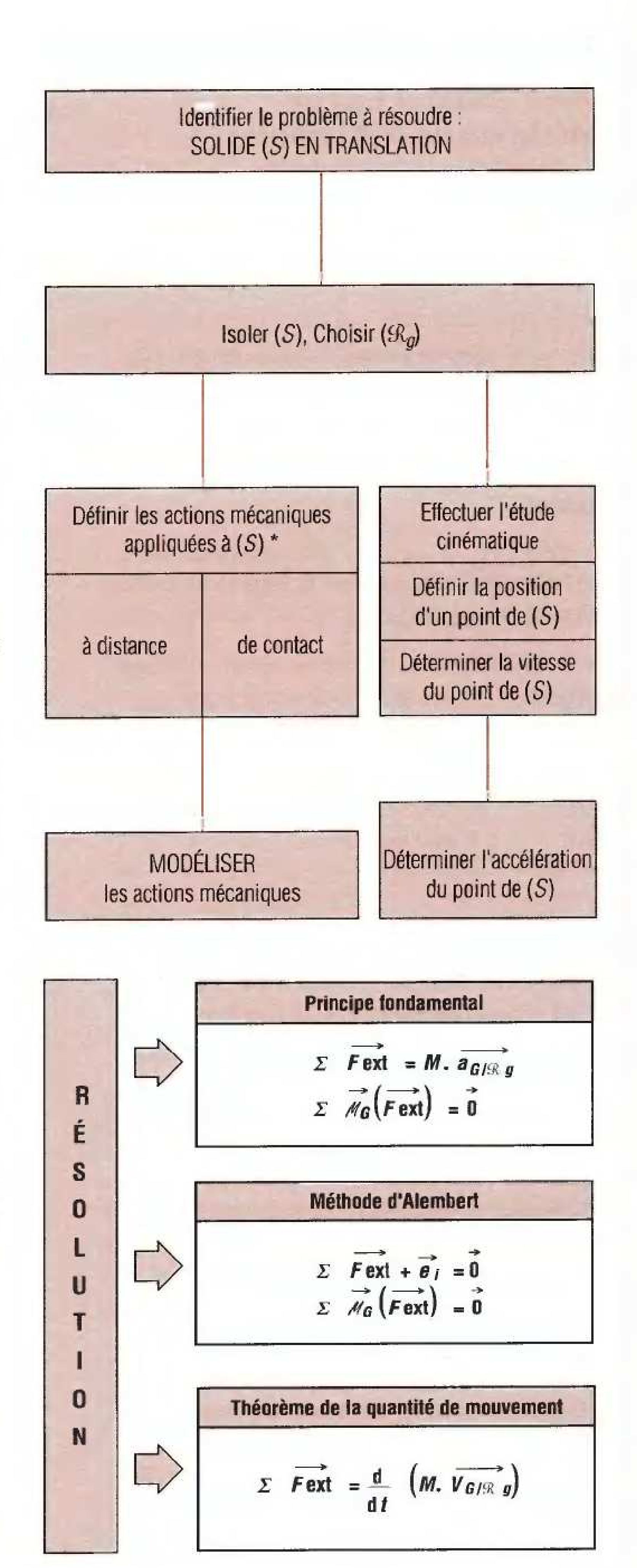
Utiliser au choix, selon les cas :

■ les théorèmes généraux(§ 56.4),

■ la méthode de d'Alembert (§ 56.5),

■ la quantité de mouvement (§ 56.6),

■ une méthode énergétique (chapitres 61 à 63).



* La modélisation des liaisons étant réalisée.

56■8 Applications

■ **EXEMPLE 1 :**

Un transporteur déplace des pièces cylindriques de diamètre D, hauteur h, masse M, reposant par leur base sur le tapis mobile.

Exprimer l'accélération maximale pour que :

1° Aucun cylindre ne glisse (facteur de frottement μ entre cylindre et tapis).

2° Aucun cylindre ne bascule.

Application numérique : $M = 1{,}2$ kg, $D = 75$ mm, $h = 210$ m, $\mu_1 = 0{,}2$ ou $\mu_2 = 0{,}5$.

SOLUTION :

Isoler et choisir un repère :

On isole le cylindre et l'on choisit $(\mathcal{R}_g)$ lié au sol.

Modéliser les actions mécaniques :

■ Poids représenté par $(G, M\vec{g})$ (§ 13).

■ Appui-plan représenté par $\vec{R}$, dans le plan $(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g)$ de symétrie (§ 9.2, 12.6, chapitre 32).

Principe fondamental	Méthode de d'Alembert
$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a}$	$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} + \vec{e}_i = \vec{0}$
En projection sur $\vec{x}_g$ et $\vec{y}_g$	
$R \sin \alpha = M x''$ (1) $R \cos \alpha - M g = 0$ (2)	$R \sin \alpha - M x'' = 0$ (1) $R \cos \alpha - M g = 0$ (2)

On déduit de (1) et (2) que $\tan \alpha = x''/g$.

■ Condition de non-glissement : $\tan \alpha \leq \tan \varphi$ (chapitre 32)

Soit $x'' \leq \mu . g$.

■ Condition de non-basculement (autour de A) si :

$\tan \alpha \leq D/h$ soit $x'' \leq D . g/h$ (chapitre 34).

■ Conclusion :

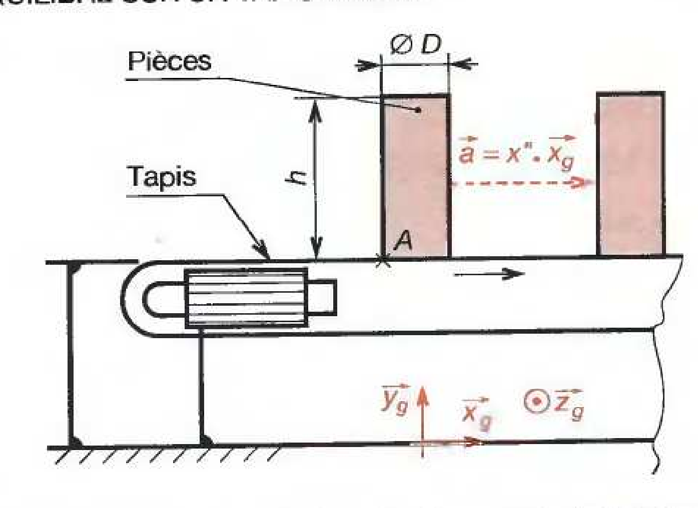
Si $\mu \leq D/h$, le cylindre ne glisse pas tant que $x'' \leq \mu . g$.
Si $\mu > D/h$, le cylindre ne bascule pas tant que $x'' \leq D . g/h$.

■ Application numérique :

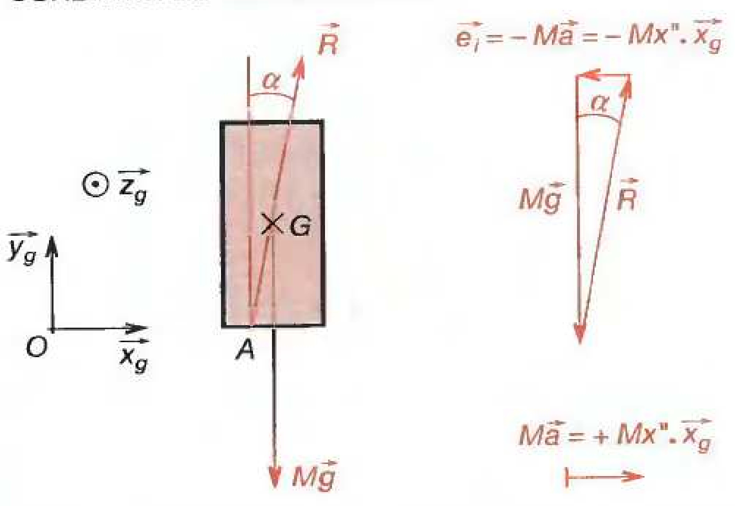
$\mu_1 = 0{,}2 < 75/210$:
pas de glissement si $x'' \leq 0{,}2 \times 10 = 2$ m/s^2.

$\mu_2 = 0{,}5 > 75/210$:
pas de basculement si $x'' \leq \dfrac{75}{210} \times 10 = 3{,}57$ m/s^2.

ÉQUILIBRE SUR UN TAPIS MOBILE

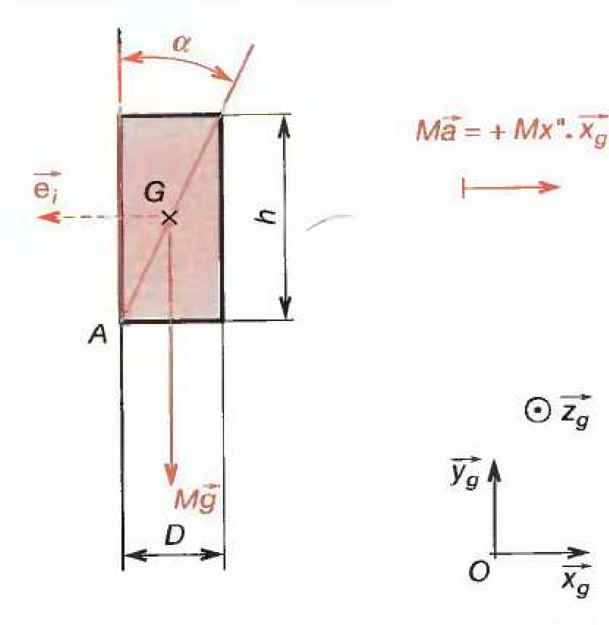


CONDITION DE NON-GLISSEMENT



Nota : pression ambiante sans effet (chapitre 17).

CONDITION DE NON-BASCULEMENT



■ **EXEMPLE 2 :**

Une locomotive de 100 t vient percuter, en roues libres, un wagon immobile de 35 t. Au moment du contact, la locomotive roulait à 20 km/h.

Soit à déterminer la vitesse prise par l'ensemble après l'accrochage.

SOLUTION :

Isolement et choix du repère.

Il est astucieux, ici d'isoler l'ensemble constitué par la locomotive et le wagon car les actions mécaniques de l'une sur l'autre ne sont pas demandées.
Le repère $(\mathcal{R}_g)$ sera lié au sol.

Modéliser les actions mécaniques.

Toutes les forces sont dirigées selon la verticale du lieu (résistances au frottement et au roulement négligeables par hypothèse).

Le théorème des quantités de mouvement s'écrit :

$$\Sigma \overrightarrow{F \text{ext}} = \frac{d}{dt}(m . \vec{v})$$

En projection sur l'axe $(O, \vec{x})$, il devient :

$$0 = \frac{d}{dt}(m . v) \Rightarrow m . v = k \text{ (constante } \forall t)$$

Par conséquent :

- avant l'accrochage : $k = m_1 . v_1 = 100 \times 20$
- après l'accrochage : $k = (m_1 + m_2)\, v_2 = 135\, v_2$

D'où : $$v_2 = \frac{100 \times 20}{135} = 14{,}8 \text{ km/h}$$

■ **EXEMPLE 3 :**

Après avoir accosté, un homme de masse $m_1 = 75$ kg saute sur le rivage à 2,8 m/s. Quel est le mouvement de sa barque au même instant sachant qu'elle a une masse $m_2 = 100$ kg ?

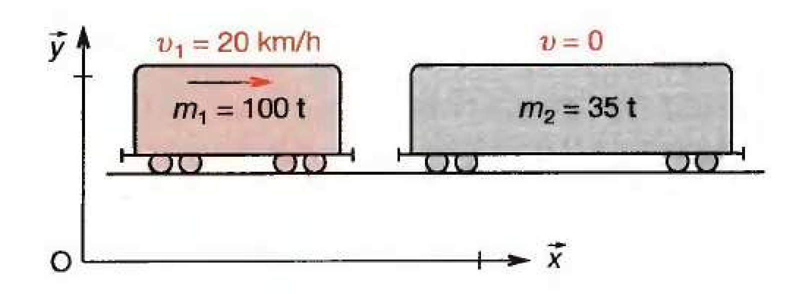
SOLUTION (ABRÉGÉE) :

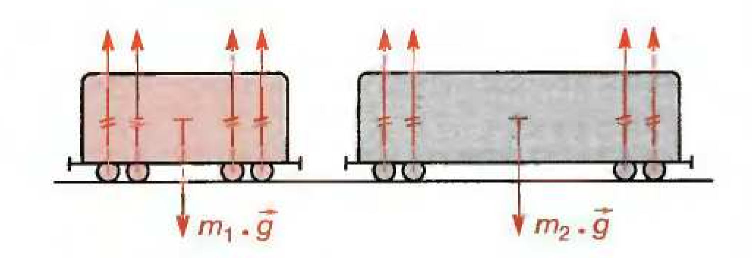
Utiliser le même raisonnement que dans l'exemple précédent en considérant l'ensemble {homme + barque} ; on trouve

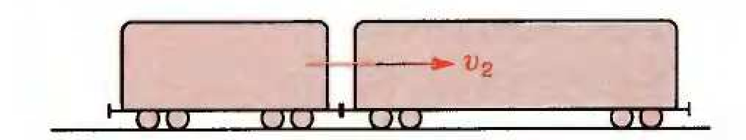
$$m_1 . v + m_2 . V = 0$$

On trouve que **la barque s'écarte du rivage à la vitesse** $V = \frac{m_1 . v}{m_2}$ soit à $V = 2{,}1$ **m/s**

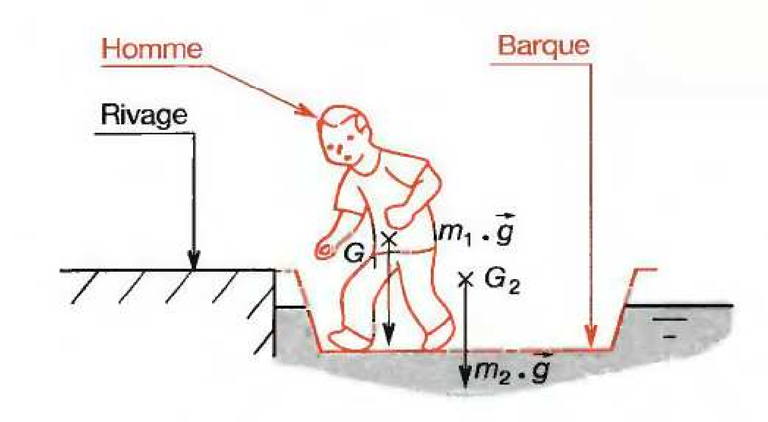
ACCROCHAGE DE WAGONS

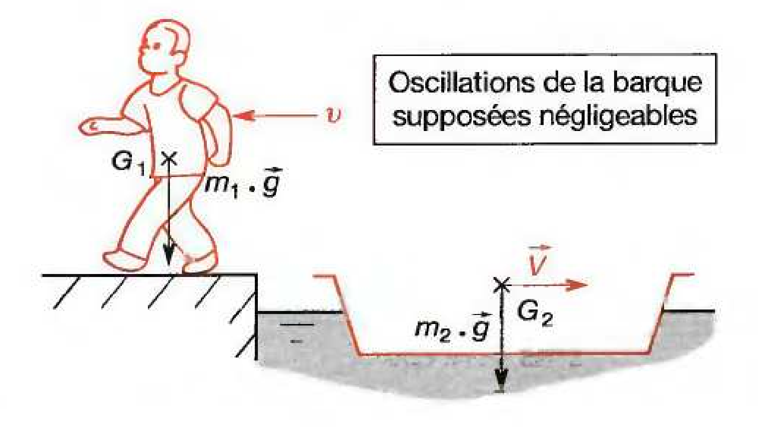






DESCENTE D'UNE BARQUE





■ EXEMPLE 4 :

Soit une machine à tronçonner les profilés.

Déterminer les efforts en C, I et J pendant la phase d'accélération maximale de l'ensemble $(S) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{9}\}$.

On connaît :

- la masse de l'ensemble $m = 7$ kg,
- les efforts dans le plan $(G, \vec{x}, \vec{z})$,
- les frottements en I et J d'angle $\varphi = 8{,}5°$,
- l'accélération $\overrightarrow{a_{max}} = 4\,\vec{x}$ (m/s²).

Modéliser les actions mécaniques sur (*S*)

- À distance : poids $\left\{ \begin{matrix} -mg\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$
- De contact :

Les efforts dûs à la pression atmosphérique se compensent,

$$\text{en } I \left\{ \begin{matrix} X_I & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_I & 0 \end{matrix} \right\}_I ; \text{ en } J \left\{ \begin{matrix} X_J & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_J & 0 \end{matrix} \right\}_J ; \text{ en } C \left\{ \begin{matrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_C & 0 \end{matrix} \right\}_C$$

■ Une étude rapide (sans calculs) dans le cas de liaisons parfaites ($Z_I = Z_J = 0$) permet de déterminer le sens des normales en I et J ; on en déduit la position de ces points sur les génératrices.

D'autre part, la direction de l'effort moteur en C permet d'écrire la relation $Z_C = -X_C \cdot \tan 7{,}5°$.

Avec frottement, on ajoute les relations :

$X_I = -Z_I \cdot \tan\varphi$, $X_J = Z_J \cdot \tan\varphi$ (chapitre 32).

Appliquer le principe fondamental

$$-Z_I \cdot \tan\varphi + Z_J \cdot \tan\varphi + X_C = m \cdot a \qquad (1)$$

$$-m \cdot g + Z_I + Z_J - X_C \cdot \tan 7{,}5° = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}_G}\left(\overrightarrow{F\text{ext}}\right) = \vec{0} : \overrightarrow{GI} \times \vec{I} + \overrightarrow{GJ} \times \vec{J} + \overrightarrow{GC} \times \vec{C} = \vec{0} \qquad \text{(II)}$$

Avec :

$$\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -58 \end{pmatrix} ; \vec{I}\begin{pmatrix} -Z_I \cdot \tan\varphi \\ 0 \\ Z_I \end{pmatrix} ; \overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix} 136 \\ 0 \\ -58 \end{pmatrix}$$

$$\vec{J}\begin{pmatrix} -Z_J \cdot \tan\varphi \\ 0 \\ Z_J \end{pmatrix} ; \overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ -130 \end{pmatrix} ; \vec{C}\begin{pmatrix} -X_C \\ 0 \\ -X_C \cdot \tan 7{,}5° \end{pmatrix}$$

On obtient :

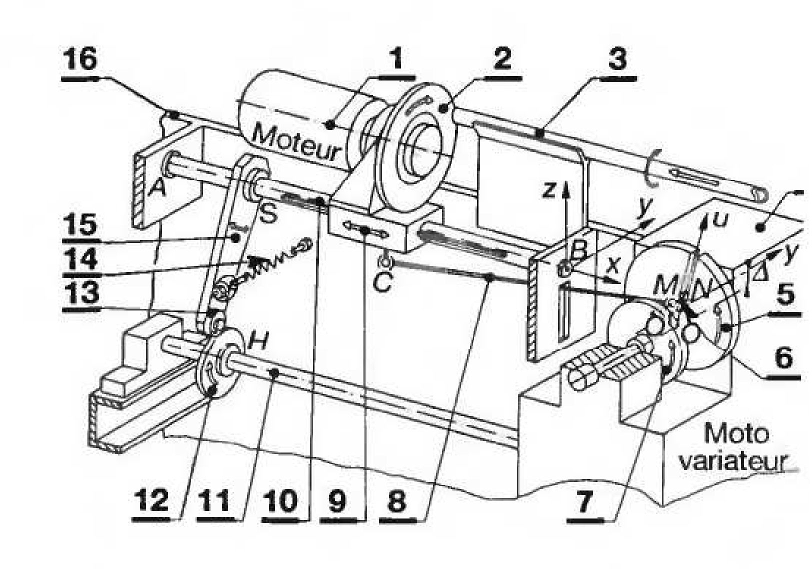
$$-7{,}33\,Z_I - 148{,}25\,Z_I - 120\,X_C = 0 \qquad (3)$$

Résoudre les équations :

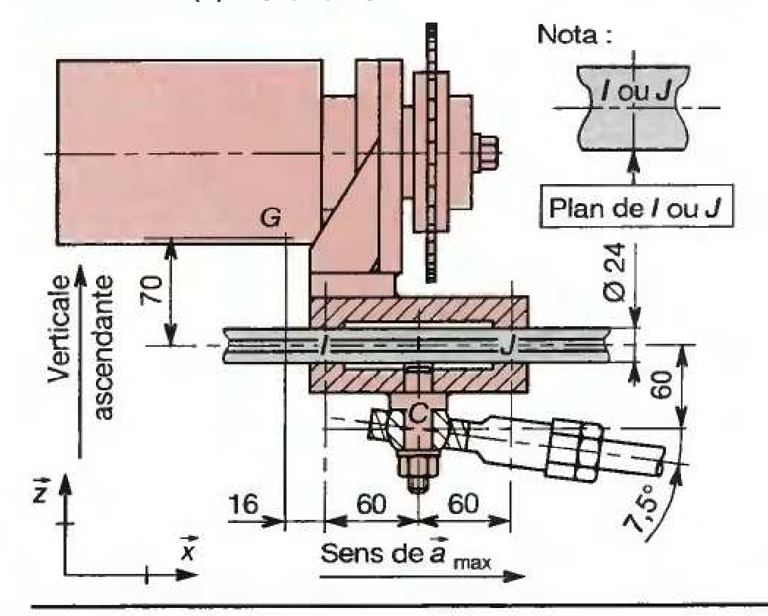
En remplaçant m par 7, a par 4 et φ par 8,5°, ce système de trois équations permet de calculer Z_I, Z_J, X_C.

Les résultats sont portés sur le croquis ci-contre.

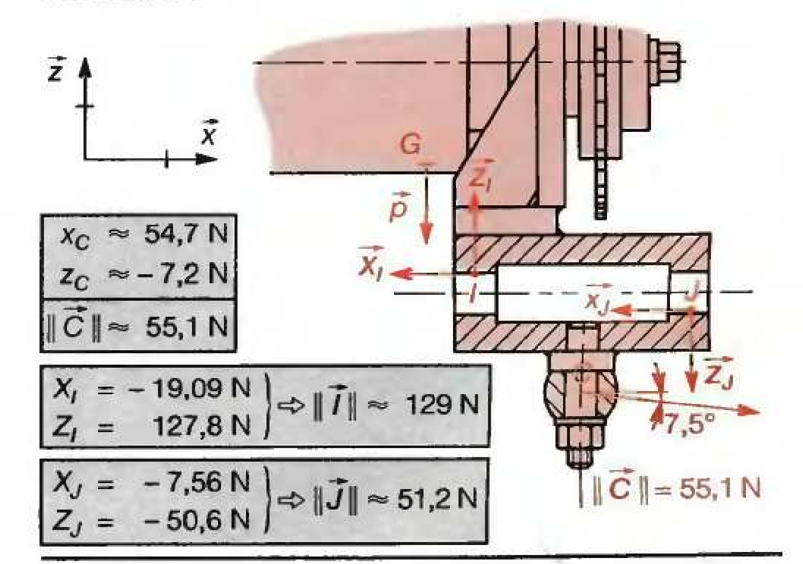
CROQUIS D'ENSEMBLE




ENSEMBLE (S) = { **1**, **2**, **9** }



RÉSULTATS



EXEMPLE 5 :

Un monte-charge de masse $m_1 = 1\,500$ kg avec son chargement est soulevé par un câble de diamètre $d = 10$ mm. Ce câble a une limite élastique $R_e = 1\,200$ MPa* et une masse volumique $\rho_v = 7{,}2$ kg/dm³. Pour la position basse du monte-charge, le câble a une longueur déroulée de $L = 30$ m (masse non négligeable).

Déterminer :

1° Le coefficient de sécurité du câble lorsqu'il soutient le monte-charge à l'arrêt.

2° À partir de quelle accélération du monte-charge, le câble risque-t-il de se rompre ?

SOLUTION :

- La contrainte maximale dans le câble se situe à sa partie supérieure lorsqu'il est complètement déroulé.

Masse du câble déroulé : $m_2 = \rho_v \cdot \dfrac{\pi d^2}{4} \cdot L$

Avec : $\left.\begin{array}{l}\rho_v = 7{,}2 \text{ kg/dm}^3 \\ d = 0{,}1 \text{ dm} \\ L = 300 \text{ dm}\end{array}\right\}$ $m_2 = 16{,}96$ kg.

- Masse totale soutenue $= m_T = m_1 + m_2 \approx 1\,517$ kg.
- Calculer le coefficient de sécurité à l'arrêt :

Il s'agit d'un calcul de résistance des matériaux pour un câble soumis à la traction simple :

$$\frac{F}{S} \leqslant \frac{R_e}{s} \Rightarrow s = \frac{R_e \cdot S}{F_{max}} = \frac{R_e \cdot S}{(m_1 + m_2)\,g}$$

Avec : $\left.\begin{array}{l}R_e = 1\,200 \text{ MPa} \\ S = \pi \times 5^2 \text{ mm}^2 \\ m_1 + m_2 = 1\,517 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m/s}^2\end{array}\right\}$ coefficient de sécurité $s \approx 6{,}2$

- Calculer l'accélération entraînant le dépassement de la limite élastique du câble :

Il faut isoler {câble déroulé + monte-charge} (voir ci-contre),

$\overline{\Sigma \text{ proj}_{/z}}\left(\overrightarrow{F\text{ext}}\right) = (m_1 + m_2)\,a$

Soit : $T - (m_1 + m_2)\,g = (m_1 + m_2)\,a \Rightarrow T = (m_1 + m_2)(a + g)$

Il faut que : $\dfrac{T}{S} < R_e$ soit $T_{max} = R_e \cdot S$

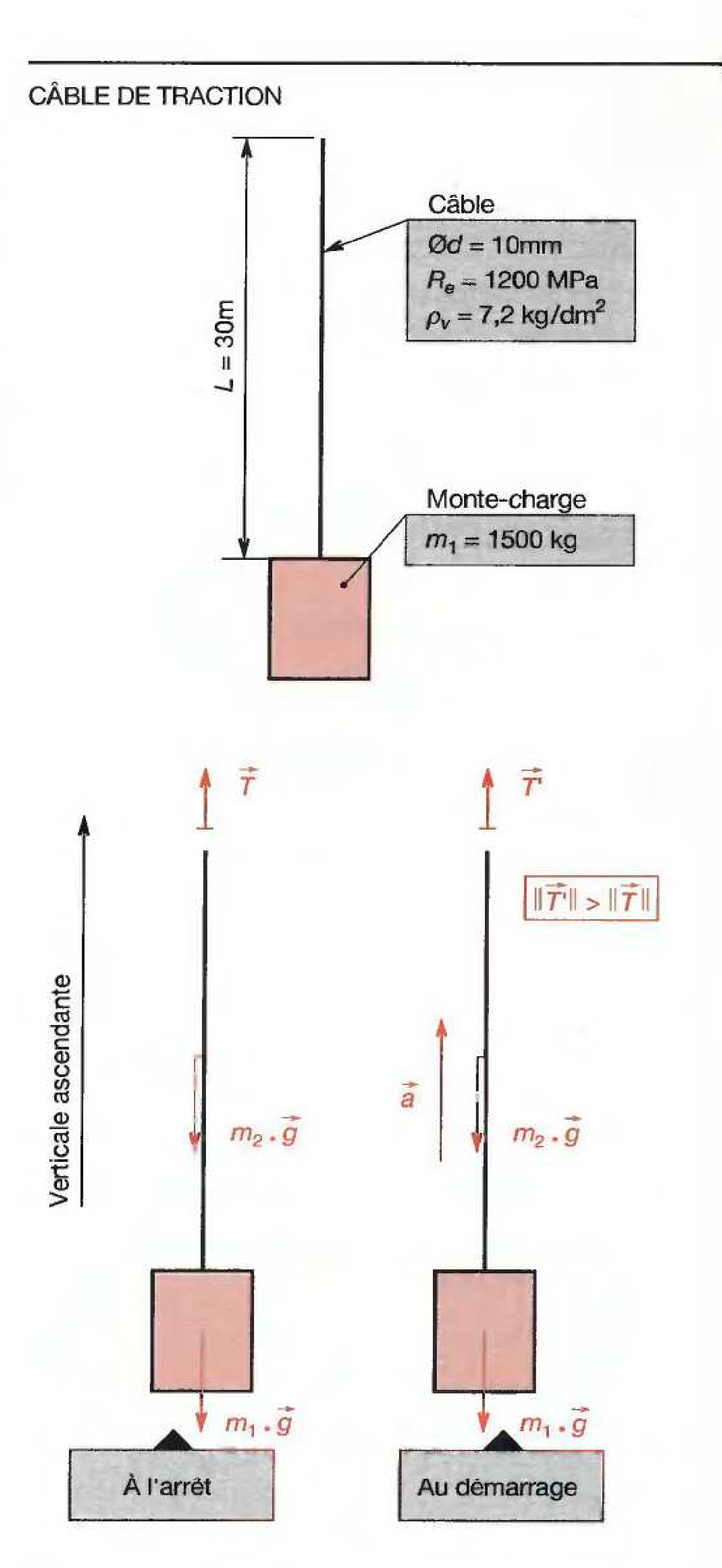
Donc : $(m_1 + m_2)(a + g) = R_e \cdot S \Rightarrow a_{max} = \dfrac{R_e \cdot S}{m_1 + m_2} - g$

- Application numérique :

$\left.\begin{array}{l}R_e = 1\,200 \text{ N/mm}^2;\ m_1 + m_2 = 1\,517 \text{ kg} \\ S = \pi \times 25 \text{ mm}^2;\ g = 10 \text{ m/s}^2\end{array}\right|$ $a_{max} = 52{,}1$ m/s² ; $a_{max} \approx 5 \cdot g$

* 1 MPa = 1 N/mm².

CÂBLE DE TRACTION



NOTA :
La pression atmosphérique agissant tout autour du système, la résultante des efforts qu'elle engendre est nulle.

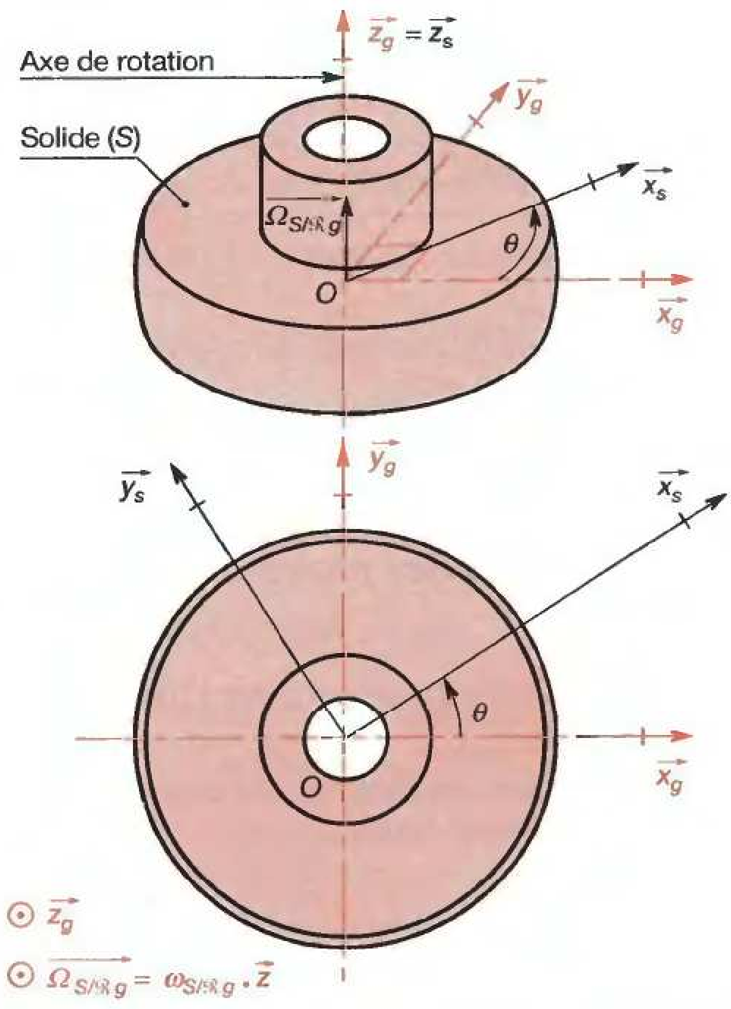
57 Solides en rotation autour d'un axe fixe

Tous les points de l'ensemble tournant (S) ont même vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}g}}$ dans un repère galiléen ($\mathcal{R}_g$).

Si :

- $\vec{z}$ représente le vecteur unitaire de l'axe de rotation,
- $\omega = \theta'$ (ou $d\theta/dt$) représente la dérivée par rapport au temps de l'angle θ balayé par chaque point de (S) dans ($\mathcal{R}_g$),

alors : $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}g}} = \omega . \vec{z}$ (chapitres 26 et 27).



57.1 Choix du repère

On limite l'étude à la relation d'un solide autour d'un axe fixe. Le choix de cet axe doit permettre de vérifier le principe fondamental de la dynamique avec une précision satisfaisante (voir § 56.2).

REMARQUES :

- Le mouvement de rotation est plan (chapitre 28).
- On note généralement $(O, \vec{x_g})$, $(O, \vec{y_g})$ les axes du plan et $(O, \vec{z_g})$ l'axe de rotation perpendiculaire à ce plan.

57.2 MOMENTS D'INERTIE J D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN AXE PASSANT PAR SON CENTRE DE GRAVITÉ

Définition $\Sigma(\Delta m) = m$ (kg) J_{Gzg} (ou PD^2 *)	Cylindre plein homogène masse m (kg)	Cylindre creux (couronne) homogène masse m (kg)	Sphère pleine homogène masse m (kg)	Tige rectiligne section négligeable homogène, masse m (kg)
Axe $\vec{z_g}$, S, Δm, r, G	Axe $\vec{z_g}$, R, G, $\vec{z_g}$	Axe $\vec{z_g}$, G, R, r, $\vec{z_g}$	Axe $\vec{z_g}$, R, G	Axe $\vec{z_g}$, G, ℓ', ℓ', ℓ, G, $\vec{z_g}$
$J_{Gzg} = \Sigma(\Delta m . r^2)$ — J_{Gzg} en kg.m², Δm en kg, r^2 en m²	$J_{Gzg} = \frac{1}{2} m.R^2$	$J_{Gzg} = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2)$	$J_{Gzg} = \frac{2}{5} m.R^2$	$J_{Gzg} = \frac{m\ell^2}{12} = \frac{m\ell'^2}{3}$

* Ancienne appellation.

57.3 Théorème de Huygens

Il permet d'exprimer le moment d'inertie d'un solide homogène par rapport à un axe $(A, \vec{z_g})$ connaissant celui par rapport à $(G, \vec{z_g})$ qui lui est parallèle.

$$J_{Azg}(S) = J_{Gzg}(S) + m \cdot d^2$$

J_{Azg} : moment d'inertie de (S) par rapport à $(A, \vec{z_g})$ parallèle à $(G, \vec{z_g})$ ($kg.m^2$).

J_{Gzg} : moment d'inertie de (S) par rapport à $(G, \vec{z_g})$ passant par son centre de gravité ($kg.m^2$).

m : masse de (S) (kg).

d : distance entre les axes $(G, \vec{z_g})$ et $(A, \vec{z_g})$ (m).

57.4 Calculs des moments d'inertie

57.41 Centres de gravité sur l'axe de rotation

Les inerties de chaque solide élémentaire ayant son centre de gravité sur l'axe de rotation s'ajoutent directement.

EXEMPLE :

Le plateau (P) est constitué de deux cylindres creux :

- $\mathbf{S_1}$, d'inertie $J_{Azg}(S_1) = 1{,}08 \times 10^{-3}\ kg.m^2$.
- $\mathbf{S_2}$ (défini ci-contre) de masse volumique $\rho_v = 7{,}2\ kg/dm^3$.

$$J_{Azg}(S_2) = \frac{1}{2} m_2 \cdot (R^2 + r^2) \qquad (\S\ 57.2).$$

$$m_2 = \rho_v \cdot \pi (R^2 - r^2) \cdot e = 7{,}2 \times \pi \times (0{,}6^2 - 0{,}2^2) \times 0{,}2 \approx 1{,}45\ kg.$$

$$J_{Azg}(S_2) = 0{,}5 \times 1{,}45\,(0{,}06^2 + 0{,}02^2) = 2{,}9 \times 10^{-3}\ kg.m^2.$$

- $(P) = \{S_1, S_2\}$ a donc une inertie :

$$J_{Azg}(P_1) \approx 4 \times 10^{-3}\ kg.m^2.$$

57.42 Centre de gravité extérieur à l'axe de rotation

Appliquer le théorème de Huygens.

EXEMPLE :

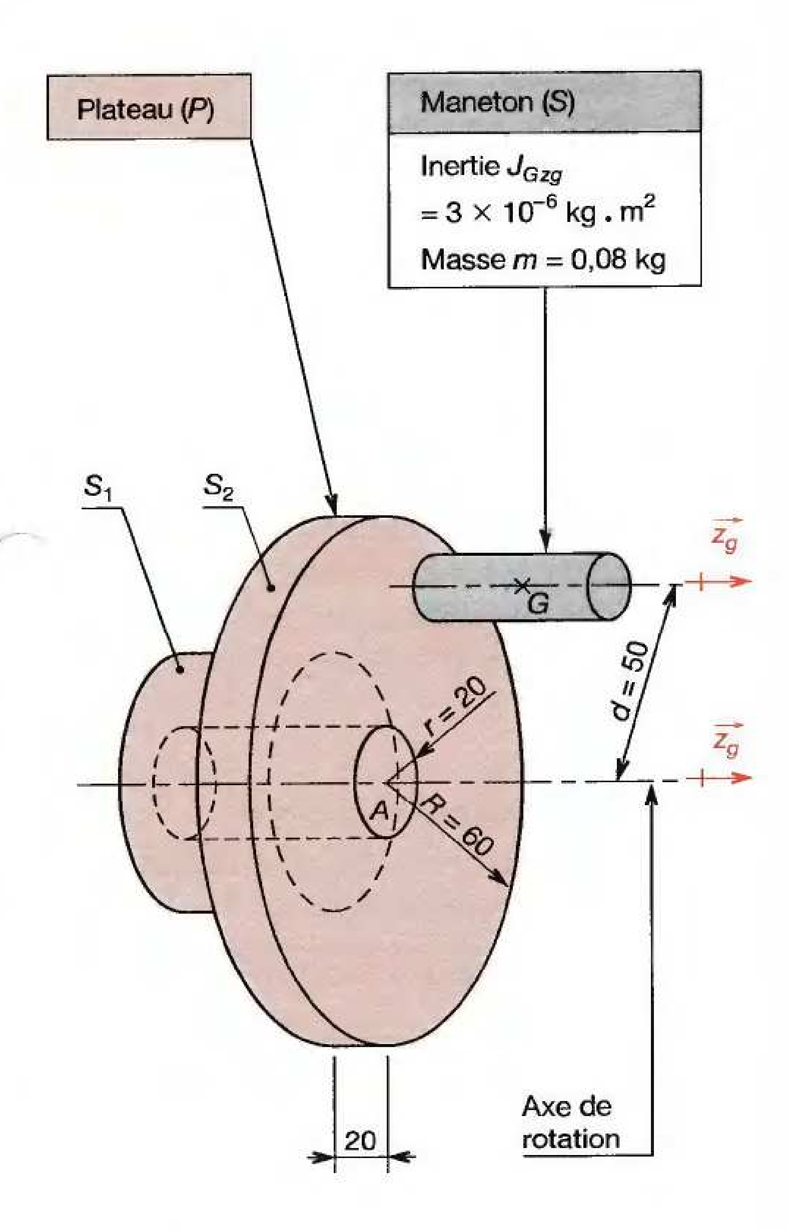
Connaissant les caractéristiques du maneton (S) :

$$J_{Azg}(S) = J_{Gzg}(S) + m \cdot d^2 = 3 \times 10^{-6} + 0{,}08 \times 0{,}05^2 \approx 2 \times 10^{-4}.$$

Pour $\{(P), (S)\}$:

$$J_{Azg} = 4 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-4} = 4{,}2 \times 10^{-3}\ kg.m^2.$$

PLATEAU MANIVELLE



NOTA :

- **Pour calculer l'inertie d'un solide par rapport à un axe, il faut décomposer ce solide en volumes géométriquement simples, d'inertie connue ou facilement calculable.**

$$J_{Azg}\{(P), (S)\} = J_{Azg}(S_1) + J_{Azg}(S_2) + J_{Azg}(S).$$

- **La recherche du centre de gravité de l'ensemble est généralement inutile.**
- **Porter l'attention sur les unités utilisées (chapitre 72).**

57 ■ 5 Moment cinétique

57 ■ 51 Moment cinétique élémentaire

Soit P_i un point du solide, auquel on associe une masse élémentaire m_i.

■ La quantité de mouvement de ce point se note :

$$\overrightarrow{p_i} = m_i . \overrightarrow{v_{P_i}} \quad \text{(unité : kg.m/s).}$$

■ Le moment cinétique de ce point par rapport à (Δ) :

$\overline{\mathcal{M}\Delta(P_i, \overrightarrow{p_i})} = H_iP_i . m_i . v_{P_i} = m_i . r_i^2 . \omega$ car $v_i = \omega . r_i$.

57 ■ 52 Moment cinétique du solide

Il se note $\overrightarrow{L_{\Delta(S/\Re g)}} = \Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_\Delta}(P_i, \overrightarrow{p_i})$.

En projection sur l'axe (Δ), on obtient une relation algébrique :

$$\overline{L_{\Delta(S/\Re g)}} = \Sigma \overline{\mathcal{M}\Delta}(P_i, \overrightarrow{p_i}) = \Sigma(m_i . r_i^2 . \omega) = \omega . \Sigma(m_i . r_i^2)$$

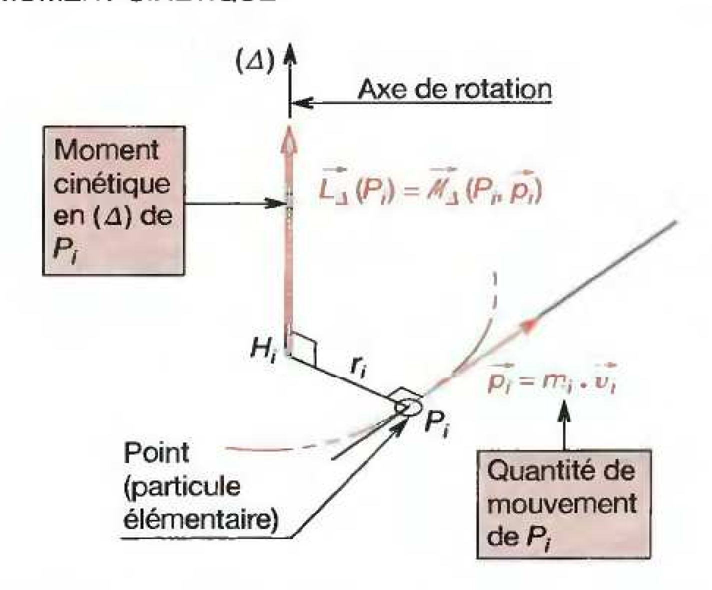
$$\overline{L_{\Delta(S/\Re g)}} = J_\Delta(S) . \omega$$

$\overline{L_{\Delta(S/\Re g)}}$: moment cinétique par rapport à Δ, de (S) (kg.m²/s).

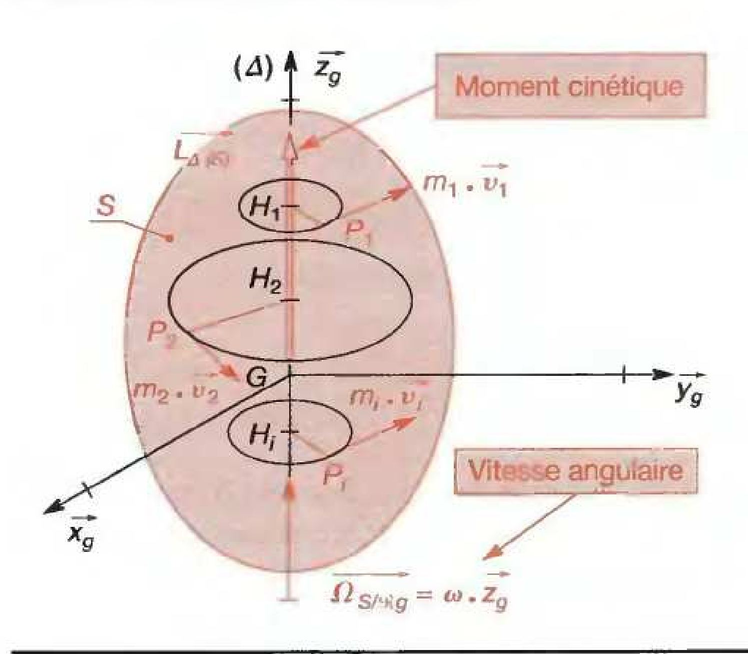
$J_{\Delta(S)}$: moment d'inertie de S par rapport à Δ (kg.m²).

ω : vitesse angulaire de S autour de Δ (rad/s).

MOMENT CINÉTIQUE



MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE



57 ■ 6 Torseur cinétique d'un solide par rapport à un axe Δ

$$\overrightarrow{R_c} = m . \overrightarrow{V_{G/\Re g}} : \textbf{résultante cinétique}$$

m : masse du solide.

$\overrightarrow{V_{G/\Re g}}$: vitesse du centre de gravité G de (S) dans $(\Re_g)$.

$$\{\mathcal{C}_{S/\Re g}\}_\Delta = \left\{\overrightarrow{R_c} \quad \overrightarrow{L_{\Delta(S/\Re g)}}\right\}$$

$\overrightarrow{L_{\Delta(S/\Re g)}}$: moment cinétique par rapport à (Δ) de (S) / $(\Re_g)$.

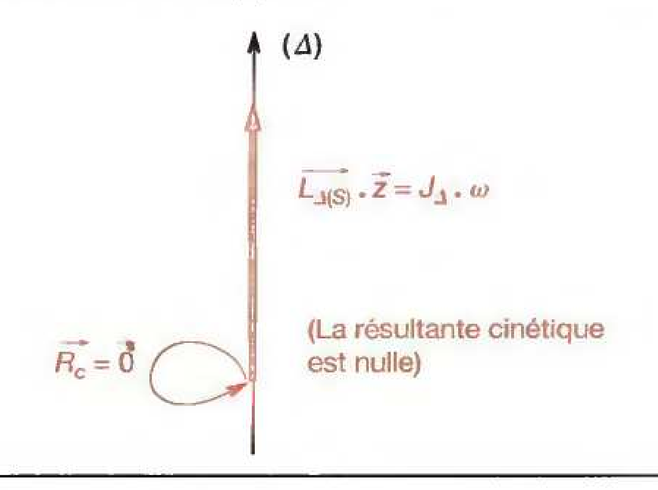
Lorsque le solide tourne autour de (Δ) sans glisser le long de cet axe, on obtient :

$$\{\mathcal{C}_{S/\Re g}\}_\Delta = \left\{\vec{0} \quad \overline{L_{\Delta(S/\Re g)}} . \vec{z}\right\} = \left\{\vec{0} \quad J_\Delta . \omega . \vec{x}\right\}$$

NOTA :

Ne pas confondre le torseur cinétique (qui associe masses et vitesse) avec le torseur cinématique.

TORSEUR CINÉTIQUE D'UN SOLIDE (S) EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE (Δ) FIXE



57 ■ 7 Théorème du moment cinétique. Théorème de Koenig

Il explicite la relation entre moments d'un torseur (§ 76.1). Pour le torseur cinétique, on écrit :

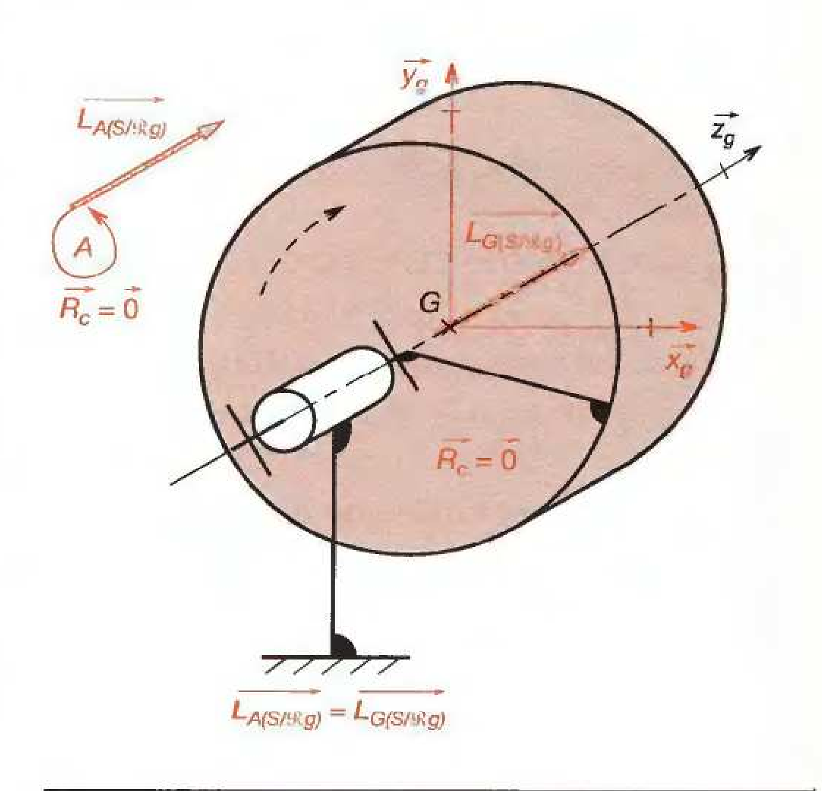
$$\left\{\mathscr{C}_{S/\Re g}\right\}_G = \left\{\overrightarrow{R_c}\ \overrightarrow{L_{G(S/\Re g)}}\right\} \text{ et } \left\{\mathscr{C}_{S/\Re g}\right\}_A = \left\{\overrightarrow{R_c}\ \overrightarrow{L_{A(S/\Re g)}}\right\}.$$

$\overrightarrow{L_{A(S/\Re g)}} = \overrightarrow{L_{G(S/\Re g)}} + \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{R_C}$ *
Le moment cinétique d'un solide (*S*), en un point *A* quelconque, est égal au moment cinétique de ce solide en son centre de gravité augmenté du moment en *A* de sa résultante cinétique.

REMARQUE :
Pour un solide en rotation autour d'une axe fixe, la résultante cinétique est nulle ($\overrightarrow{R_c} = M.\overrightarrow{V_{G/\Re g}} = \overrightarrow{0}$).

(*S*) en rotation autour de $(G, \overrightarrow{z_g})$ (fixe) passant par *G* :
$\overrightarrow{L_{A(S/\Re g)}} = \overrightarrow{L_{G(S/\Re g)}}$ ∀ *A* **(quel que soit *A*),**
$\overrightarrow{L_{G(S/\Re g)}} \cdot \overrightarrow{z_g} = J_{Gz} \cdot \omega$.

THÉORÈME DE KOENIG



57 ■ 8 Moment dynamique d'un solide

■ Chaque point P_i du solide (*S*), associé à une masse élémentaire m_i, a une quantité d'accélération notée $m_i.\overrightarrow{a_{Pi/\Re g}}$.

On appelle moment dynamique du solide (*S*) par rapport à un axe $(G, \overrightarrow{z_g})$ la somme des moments par rapport à cet axe, des quantités d'accélération.
$\overrightarrow{\mathscr{M}d_{G(S/\Re g)}} = \Sigma \overrightarrow{\mathscr{M}_{Gz}} (P_i, m.\overrightarrow{a_{Pi/\Re g}})$

■ Théorème du moment dynamique.
Le moment dynamique se déduit du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}d_{G(S/\Re g)}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{G(S/\Re g)}}$$

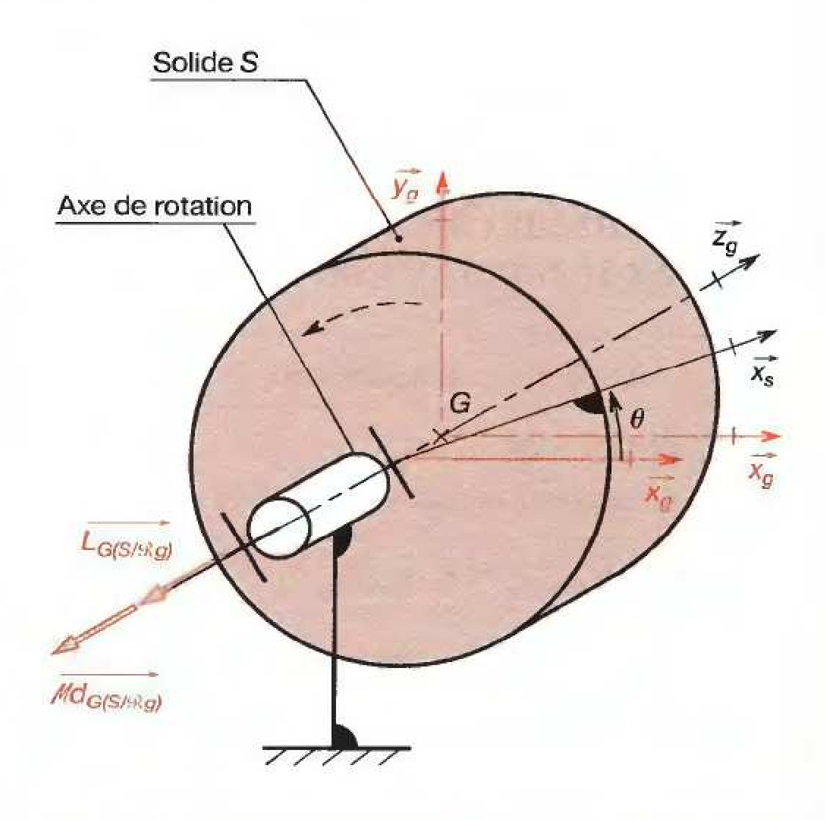
■ Pour un solide en rotation autour de $(G, \overrightarrow{z})$:

$$\overrightarrow{\mathscr{M}d_{G(S/\Re g)}} = \frac{d}{dt}(J_{Gz}.\omega) = J_{Gz}.\omega' = J_{Gz}\,\theta''$$

$\mathscr{M}d$ en kg.m²/s².
J_{Gz} en kg.m².
ω' et θ' en rad/s².

* × : signe du produit vectoriel (∧ est toléré, avec réserves. Voir § 70.6).

MOMENT DYNAMIQUE



Solide (*S*) en rotation /$\Re g$
■ $L_{G(S/\Re g)} = J_{Gzg}.\theta' = J_{Gz}.\omega$
■ $\mathscr{M}_{dG(S/\Re g)} = J_{Gzg}.\theta'' = J_{Gz}.\omega'$

57 ▪ 9 Torseur dynamique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe passant par son centre de gravité, le torseur dynamique s'écrit :

$$_G\{\mathscr{A}(S/\mathscr{R}_g)\} = {}_G\left\{\vec{0} \quad \overrightarrow{\mathscr{M}d_G}(S/\mathscr{R}_g)\right\}$$

▪ Le centre de gravité restant fixe sur l'axe, la résultante dynamique est nulle.

▪ $\overrightarrow{\mathscr{M}d_G}(S/\mathscr{R}_g) \cdot \vec{z_g} = J_{Gz_g} \cdot \theta''$

J_{Gzg} : moment d'inertie de (S) / G_{zg} (§ 57.2 et 3).

$\theta'' = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$: accélération angulaire de (S).

$(G, \vec{z_g})$: axe de rotation de (S).

▪ Le moment dynamique conserve la même valeur en tous points :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}d_A} = \overrightarrow{\mathscr{M}d_G} + \overrightarrow{AG} \times \vec{0} = \overrightarrow{\mathscr{M}d_G} \qquad (\S\ 76.1)$$

57 ▪ 10 Principe fondamental

Pour un solide en rotation autour de l'axe $(G, \vec{z_g})$ passant par son centre de gravité :
il existe au moins un repère, dit galiléen, et une chronologie, dite absolue par rapport auxquels, pour tout système (*S*), le torseur des forces extérieures appliqué à (*S*) est égal à son torseur dynamique (ou torseur des quantités d'accélérations).

$$_G\left\{\begin{matrix}\Sigma\,\overrightarrow{F\text{ext}/S} \\ \Sigma\,\overrightarrow{\mathscr{M}_G}(\overrightarrow{F\text{ext}/S})\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ J_{Gzg}\cdot\theta''\cdot\vec{z_g}\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(\text{I}) \\ (\text{II})\end{matrix}$$

NOTA :

Vitesse critique de rotation.

Un arbre de mécanisme doit toujours tourner à une vitesse éloignée de sa vitesse critique N_C sous peine de rupture par vibrations (résonnance). La vitesse critique se calcule par la relation :

$$N_C = 960\sqrt{1/|y|_{max}}$$

N_C : vitesse critique (tr/min).

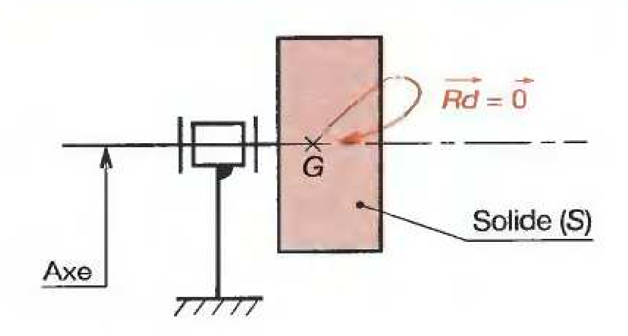
$|y|_{max}$: flèche maximale de l'arbre (mm) (§ 52.93).

EXEMPLE :

Si $|y|_{max} = 0{,}3$ mm, $N_C = 1\,750$ tr/min.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Résultante dynamique (I)

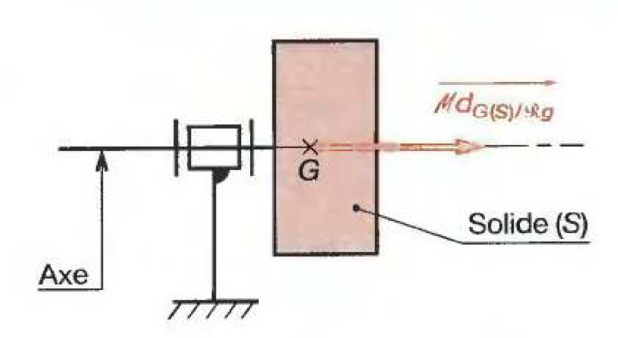


La somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide (*S*) en rotation autour d'un axe fixe (d'un repère galiléen) est nulle. En projections sur les axes $(G, \vec{x_g})$ et $(G, \vec{y_g})$ du plan de la rotation, on obtient :

(1) $\Sigma\ \text{Proj}/_{Gxg}\ (\overrightarrow{F\text{ ext}/S}) = 0$

(2) $\Sigma\ \text{Proj}/_{Gyg}\ (\overrightarrow{F\text{ ext}/S}) = 0$

Moment dynamique (II)



La somme des moments par rapport à l'axe $(G, \vec{z_g})$ fixe dans le repère galiléen $(\mathscr{R}_g)$, de toutes les actions mécaniques extérieures appliquées au solide (*S*) en liaison pivot autour de $(G, \vec{z_g})$ est égale au produit du moment d'inertie de (*S*) relatif à $(G, \vec{z_g})$ par l'accélération angulaire de ce solide.

(6) $\Sigma\,\overrightarrow{\mathscr{M}_{Gzg}}(\overrightarrow{F\text{ext}/S}) = J_{Gzg} \cdot \theta''$

NOTA :
Retenir simplement :
Couple moteur – Couple résistant = $J \cdot \theta''$.
(Exemple page ci-contre.)

57 ■ 11 Applications

EXEMPLE 1 :

Un moteur exerce au démarrage un couple $C_m = 5$ N . m. L'ensemble de la chaîne cinématique peut être modélisé par un volant plein de rayon $R = 150$ mm et de masse $m = 50$ kg, relié directement au moteur.

Calculer la durée de démarrage pour que le moteur atteigne la fréquence de rotation $n = 1\,500$ tr/min :

1° en négligeant les frottements,

2° en considérant que tous les frottements rapportés à l'axe du moteur se réduisent à $C_f = 0{,}2$ N . m.

SOLUTION :

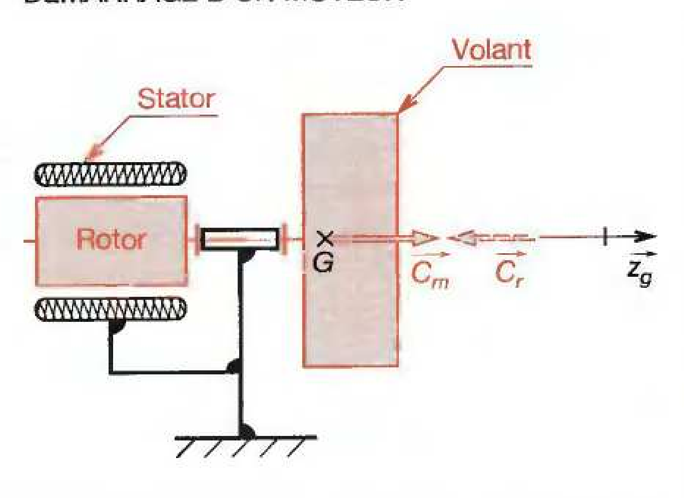
Isoler l'ensemble tournant (figure ci-dessous) et écrire le principe fondamental en projection sur l'axe de rotation :

$$C_m - C_r = J_{Gz}\,\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{C_m - C_r}{J_{Gz}}$$

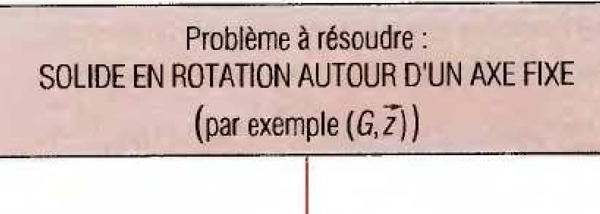
$$\left(\begin{array}{l} C_m = \text{couple moteur} \;;\; C_r = \text{couple résistant,} \\ J_{Gz} = \frac{1}{2}\,m\,.\,R^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 0{,}15^2 = 0{,}562 \text{ kg . m}^2 \end{array}\right)$$

Cas du frottement négligeable	Cas du frottement C_f
$\omega' = \frac{5}{0{,}562} = 8{,}89 \text{ rad/s}^2$	$\omega' = \frac{5 - 0{,}2}{0{,}562} = 8{,}53 \text{ rad/s}^2$
$\omega = \omega' t$	$\omega = \omega' t$
$t = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1\,500 \times 2\,\pi / 60}{8{,}89}$	$t = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1\,500 \times 2\,\pi / 60}{8{,}53}$
$t = 17{,}7$ s	$t = 18{,}4$ s

DÉMARRAGE D'UN MOTEUR



MÉTHODE DE RÉSOLUTION (RÉSUMÉ)



Isoler le système (S)
Choisir un repère galiléen ($\mathcal{R}_g$)

Modéliser les liaisons
Recenser les actions mécaniques extérieures

- à distance
- de contact

Effectuer l'analyse cinématique

Vérifier que le centre de gravité est situé sur l'axe de rotation

Calculer les moments en un point de l'axe de rotation

Calcul ou expression de l'accélération angulaire $\theta''_{(t)} = \omega'_{(t)}$

Appliquer les théorèmes généraux :

$$\begin{cases} \Sigma\ \overrightarrow{F\text{ext}} = \vec{0} & \text{(I)} \\ \Sigma\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gz}}\ \overrightarrow{F\text{ext}} = J_{Gz}\,.\,\omega'\,.\,\vec{z} & \text{(II)} \end{cases}$$

Dans la plupart des cas, il suffit d'utiliser l'équation (II) en projection sur l'axe de rotation $(G, \vec{z})$ pour résoudre :

$$\Sigma\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gz}}\,(\overrightarrow{F\text{ext}}) = J_{Gz}\,\omega' = J_{Gz}\,\theta''$$

EXEMPLE 2 :

Sur un tambour plein **1** de masse m_1 = 60 kg, de rayon R = 200 mm, s'enroule un câble supposé sans raideur et de masse négligeable.

Le tambour pivote avec frottement (μ = 0,2) dans des paliers $\varnothing\, d$ = 20 mm.

À l'extrémité du câble, on accroche une charge de masse m_2 = 30 kg qu'on abandonne sans vitesse initiale.

Calculer la durée mise par la charge pour descendre h = 10 m.

SOLUTION :

- Isolement du tambour :

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} = \vec{0} : P - F + T = 0 \left(\text{sur } \vec{y} : (2)\right)$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{Gz}(\overrightarrow{Fext}) = I_{Gz} \cdot \omega' : T \cdot R - F \cdot \mu \cdot r = J \cdot \omega' \left(\text{sur } \vec{z} : (6)\right)$$

- Isolement de la charge :

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} = m_2 \cdot \vec{a} : m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \left(\text{sur } \vec{y} : (2')\right)$$

- Aspect cinématique :

L'accélération de la charge est égale à l'accélération tangentielle du tambour :

$$a = a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega \cdot R) \Rightarrow a = \omega' \cdot R$$

- Il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} m_1 \cdot g - F + T = 0 & (2) \\ T \cdot R - \mu \cdot F \cdot r = J \cdot \omega' & (6) \\ m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot \omega' \cdot R & (2') \end{cases}$$

RÉSOLUTION :

(2) → : $F = m_1 \cdot g + T$; (2') → : $T = m_2 (g - \omega' \cdot R)$

(6) → : $m_2 (g - \omega' \cdot R) R - [m_1 \cdot g + m_2 (g - \omega' \cdot R)] \mu \cdot r = 0{,}5\, m_1 \cdot R^2 \cdot \omega'$

En regroupant les termes avec ω', il vient :

$$\omega' = \frac{g[m_2 \cdot R - \mu \cdot r (m_1 + m_2)]}{R[0{,}5 \cdot m_1 \cdot R + m_2 (R - \mu \cdot r)]}$$

$$\Rightarrow a = g \frac{m_2 \cdot R - \mu \cdot r (m_1 + m_2)}{0{,}5 \cdot m_1 \cdot R + m_2 (R - \mu \cdot r)}$$

Application numérique :

$$a = 10 \times \frac{30 \times 0{,}2 - 0{,}2 \times 0{,}01\,(60 + 30)}{0{,}5 \times 60 \times 0{,}2 + 30\,(0{,}2 - 0{,}2 \times 0{,}01)}$$

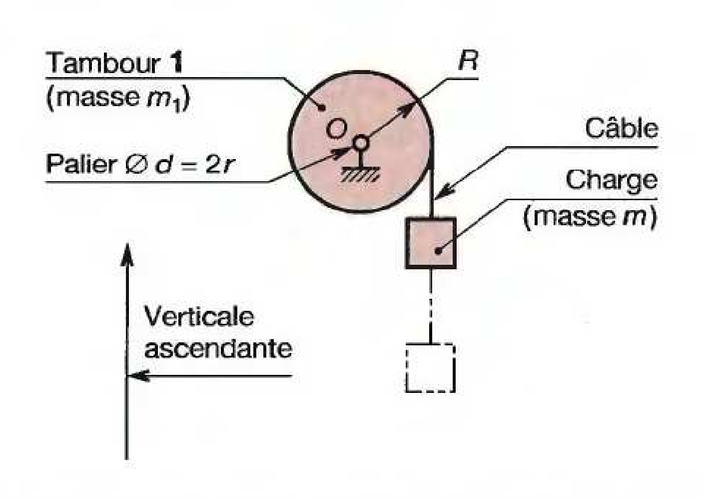
$$a = 4{,}87 \text{ m/s}^2$$

(Mouvement rectiligne uniformément accéléré.)

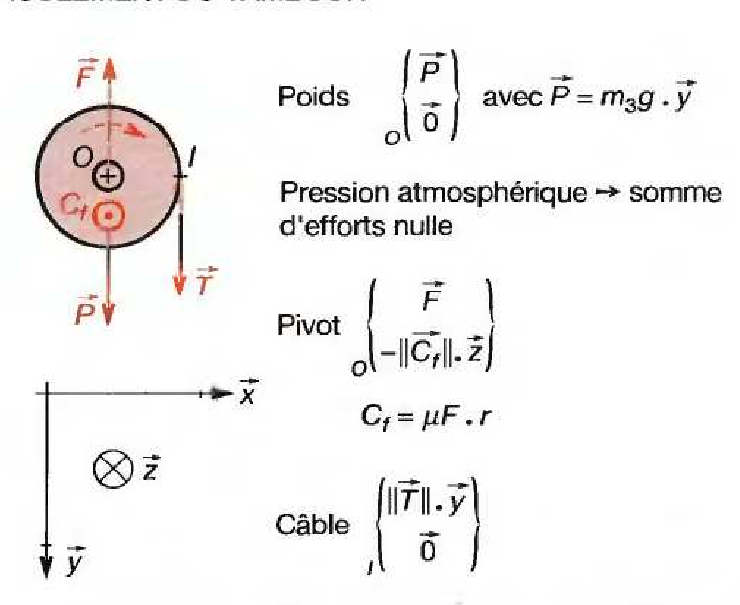
Donc : $v = a \cdot t$ et $h = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \boldsymbol{t} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \approx \mathbf{2{,}03\,s}$.

(En chute libre, la descente durerait t' = 1,414 s.)

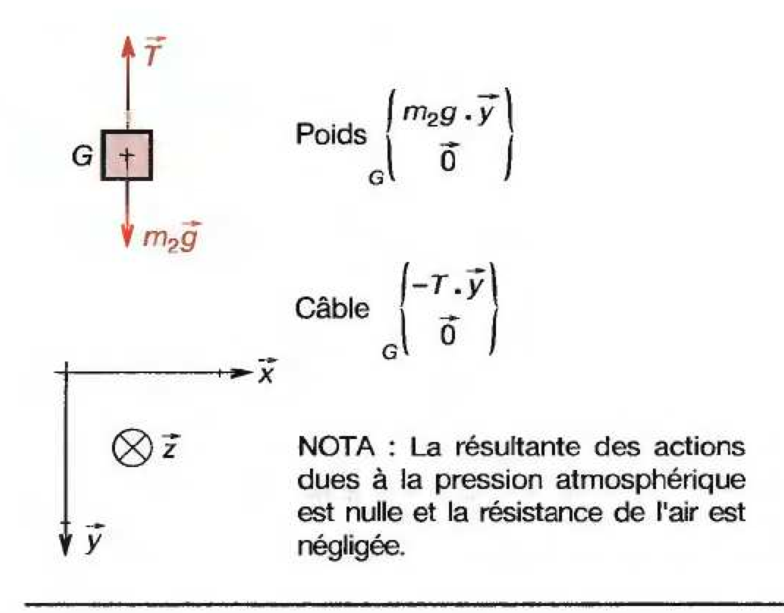
DESCENTE D'UN TREUIL



ISOLEMENT DU TAMBOUR



ISOLEMENT DE LA CHARGE



EXEMPLE 3 :

Cas de deux arbres tournants.

L'arbre **1** a une inertie J_1 par rapport à son axe. Il entraîne, par l'intermédiaire d'une courroie, un arbre **2** dont l'inertie par rapport à son axe est J_2. ($J_1 = 0{,}2$ kg . m^2 ; $J_2 = 3$ kg . m^2).

L'arbre **1** est soumis à un couple de démarrage C_{m1} alors que l'arbre **2** supporte un couple résistant global égal à C_{r2}. ($C_{m1} = 12$ N . m ; $C_{r2} = 20$ N . m). Pour un certain réglage des poulies, le rapport de réduction obtenu est $R = r_1/r_2$. ($r_1 = 15$ mm ; $r_2 = 60$ mm).

QUESTIONS :

1° Exprimer l'accélération angulaire pendant le démarrage (application numérique).

2° Calculer la durée mise pour que l'arbre **1** tourne à 1 500 tr/min (C_{m1} constant).

3° On supprime C_{m1}. Durée de l'arrêt ?

SOLUTION :

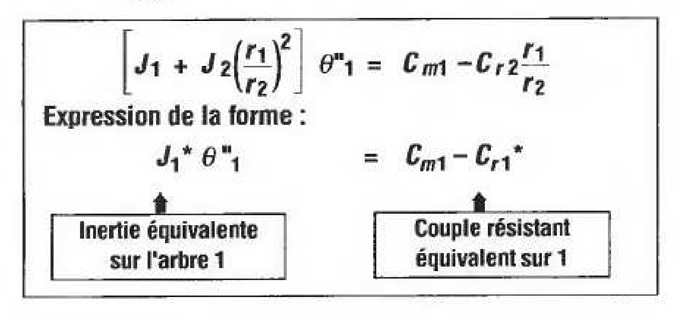
1° Isolons l'arbre **1** : $J_1\,\theta''_1 = C_{m1} - F \cdot r_1$ (1)

Isolons l'arbre **2** : $J_2\,\theta''_2 = +F \cdot r_2 - C_{r2}$ (2)

Relation cinématique : $\dfrac{\theta''_2}{\theta''_1} = +\dfrac{r_1}{r_2}$ (3)

Il suffit alors, dans **1**, de remplacer :

$F = \dfrac{+J_2 \cdot \theta''_2 - C_{r2}}{R_2}$; $\theta''_2 = +\dfrac{r_1}{r_2}\theta''_1$; d'où :



$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]\theta''_1 = C_{m1} - C_{r2}\frac{r_1}{r_2}$$

Expression de la forme :

$$J_1^*\,\theta''_1 = C_{m1} - C_{r1}^*$$

On calcule donc :

$$\left.\begin{array}{l} J_1^* = 0{,}2 + 3 \times 15/16 = 0{,}387\,5 \text{ kg.m}^2 \\ C_{r1}^* = 20 \times 15/16 = 5 \text{ N.m} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta''_1 = 18{,}06 \text{ rad/s}^2$$

2° Durée du démarrage (aspect cinématique).

$\theta''_1 = 18{,}06$ rad/s^2 $\Rightarrow \theta'_1 = \theta''_1\, t$

$\theta'_1 = 1\,500 \times 2\pi/60$ rad/s pour $t_1 = 8{,}69$ s

3° Arrêt :

$0{,}387\,5\,\theta''_1 = -5 \Rightarrow \theta''_1 = -21{,}6$ rad/s^2 $\Rightarrow$ **$t_2 = 7{,}27$s.**

CHAÎNE CINÉMATIQUE À DEUX ARBRES
Variateur de vitesse

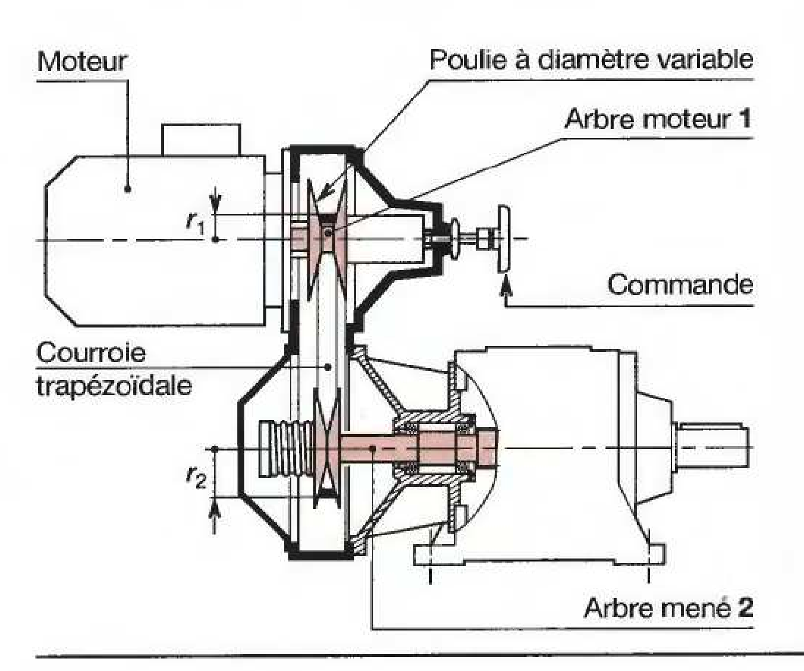
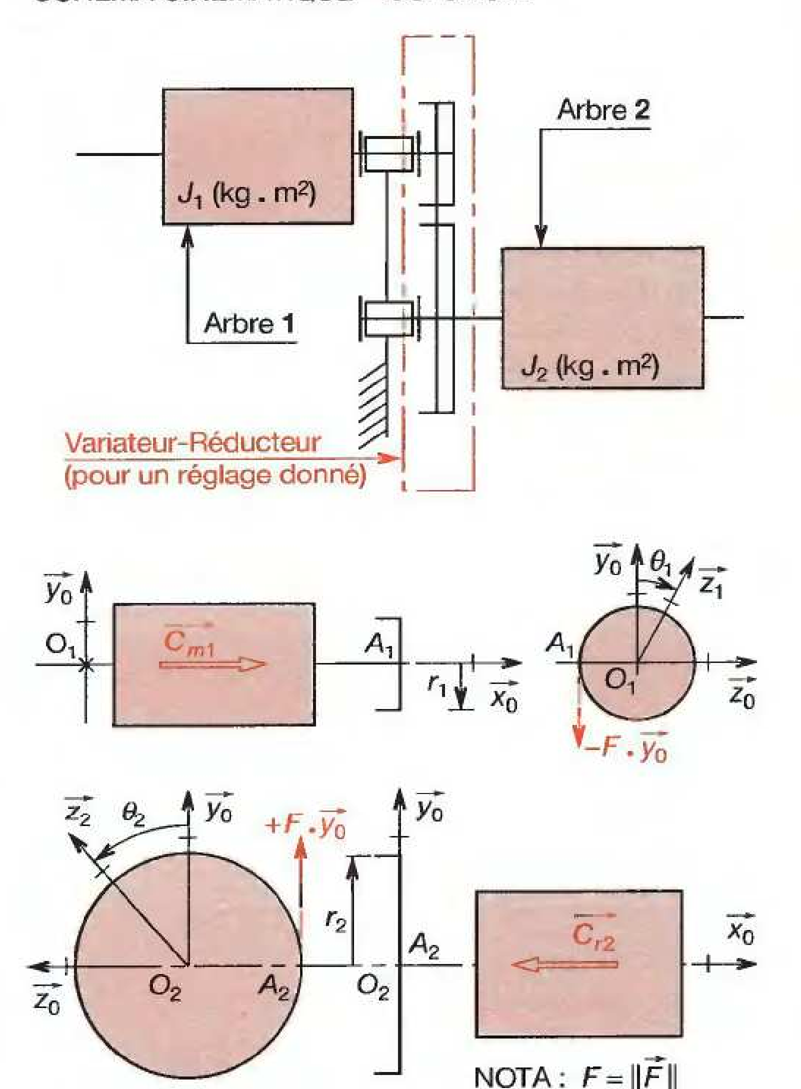


SCHÉMA CINÉMATIQUE - ISOLEMENT



EXEMPLE 4 :

Chaîne cinématique à *n* arbres (généralisation).

La méthode indiquée dans l'exemple 3 s'applique aussi à une chaîne cinématique comportant plus de deux arbres.

Dans le cas de trois arbres, en isolant chaque arbre et en écrivant le rapport entre les vitesses angulaires ; on arrive aux résultats suivants :

■ **Équation du mouvement de l'arbre (I) :**

$$J_1{}^* \theta''_1 = C_{m1} - C_{r1}{}^*$$

$$\text{avec} \begin{cases} J_1{}^* = J_1 + J_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + J_3\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \\ C_{r1}{}^* = C_{r3} \times \frac{r_3}{r_4} \times \frac{r_1}{r_2} = C_{r3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_1} \end{cases}$$

■ **Équation du mouvement de l'arbre (II) :**

$$J_2{}^* \theta''_2 = C_{m2}{}^* - C_{r2}{}^*$$

$$\text{avec} \begin{cases} J_2{}^* = J_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + J_3\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2 \\ C_{m2}{}^* = C_{m1} \cdot \frac{r_2}{r_1} ; \; C_{r2}{}^* = C_{r3} \times \frac{r_3}{r_4} \end{cases}$$

■ **Équation du mouvement de l'arbre (III) :**

$$J_3{}^* \theta''_3 = C_{m3}{}^* - C_{r3}$$

$$\text{avec} \begin{cases} J_3{}^* = J_1 \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \times \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2 + J_3 \\ C_{m3}{}^* = C_{m1} \times \frac{r_2}{r_1} \times \frac{r_4}{r_3} = C_{m1} \times \frac{\omega_1}{\omega_3} \end{cases}$$

REMARQUES :

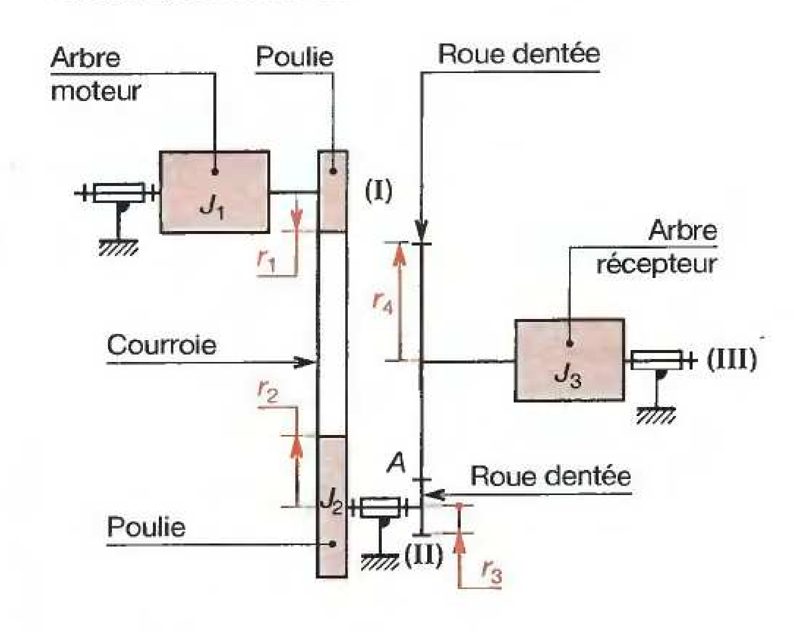
■ L'inertie équivalente d'un arbre rapide rapportée à un arbre plus lent est égale à l'inertie de cet arbre rapide multipliée par le carré du rapport de multiplication (supérieur à 1).

■ L'inertie équivalente d'un arbre lent rapportée à un arbre plus rapide est égale à l'inertie de cet arbre lent multipliée par le carré du rapport de réduction (inférieur à 1).

■ Le couple équivalent se calcule à partir de :

$$C_i^* \cdot \omega_i = C_j \cdot \omega_j \Rightarrow C_i^* = C_j \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

EXEMPLE DE CALCUL



Arbre (I) : inertie $J_1 = 0{,}1$ kg . m².

Arbre (II) : inertie $J_2 = 0{,}2$ kg . m².

Arbre (III) : inertie $J_3 = 25$ kg . m².

Réduction (I) / (II) : $R_1 = 1/5 = r_1/r_2$.

Réduction (II)/(III) : $r_3/r_4 = 1/4$ et $r_3 = 20$ mm.

Le frottement de chaque arbre sur ses paliers est estimé à $C_f = 0{,}2$ N . m.

De plus, (III) supporte un couple résistant $C_{r3} = 5$ N . m.

L'ensemble tournant est entraîné par un moteur à 1 500 tr/min.

On coupe l'alimentation du moteur.

Calculer :

1° la décélération angulaire,

2° l'effort tangentiel en *A* entre dentures.

SOLUTION :

■ Considérer l'ensemble tournant et rapporter son mouvement à l'arbre (I) :

$$[J_1 + J_2 \cdot R_1^2 + J_3 \cdot R_1^2 \cdot (r_3/r_4)^2] \; \theta''_1$$
$$= -C_f - (C_f \cdot R_1) - (C_f + C_{r3}) \cdot R_1 \cdot (r_3/r_4)$$

$$\text{D'où} \quad \theta''_1 = \frac{-[0{,}2 + 0{,}2/5 - (0{,}2+5)/(5 \times 4)]}{0{,}1 + 0{,}2/25 + 25/(25 \times 16)}$$

$\theta''_1 = -2{,}932$ rad/s².

■ Pour calculer *F* dans la denture, il suffit de considérer seulement (I) + (II) :

$$[0{,}1 + 0{,}2/25] \cdot \theta''_1 = -\frac{0{,}2 + F \cdot 0{,}02}{5} \Rightarrow \boldsymbol{F = 69\ N}$$

58 Travail

58■1 Travail d'une force

Une force travaille lorsque son point d'application se déplace dans un repère.

> **Le travail élémentaire dW, exprimé en joules (J), d'une force $\vec{F}$ (N) se déplaçant de $d\vec{\ell}$ (m) est égal au produit scalaire : $dW = \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$.**

REMARQUE :

Un travail est positif, négatif ou nul selon $\vec{F}$ et $d\vec{\ell}$.

58■2 Expression analytique du travail élémentaire

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Déplacement élémentaire} & d\vec{\ell}\\ \text{Temps élémentaire} & dt\\ \text{Vitesse instantanée} & \vec{V}\end{array}\right\}\ d\vec{\ell} = \vec{V}\cdot dt$$

NOTA :

Si $d\vec{\ell}$ représente le déplacement élémentaire d'un point M, on la note aussi $d\overrightarrow{OM}$ ou $d\vec{M}$.

En considérant les coordonnées sur un repère de $\vec{V}$ et $\vec{F}$, on obtient :

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{V}\cdot dt = {}^*\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}dt = X\cdot v_x dt + Y\cdot v_y dt + Z\cdot v_z dt$$

soit encore :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = {}^*\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix} = X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz$$

58■3 Travail élémentaire d'une force en translation rectiligne

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{V}\cdot dt = \|\vec{F}\|\cdot\cos\alpha\cdot v_x\cdot dt = \|\vec{F}\|\cdot\cos\alpha\cdot dx$$

NOTA :

Si $\vec{F}$ reste constant (mêmes direction, sens et intensité), alors on peut calculer le travail de la force entre deux points A et B :

$$W_{AB} = \|\vec{F}\|\cdot\cos\alpha\cdot(X_B - X_A)$$

> **Le travail d'une force constante qui se déplace entre deux points A et B est égal au produit de la projection de la force sur la trajectoire, par la longueur de cette trajectoire.**

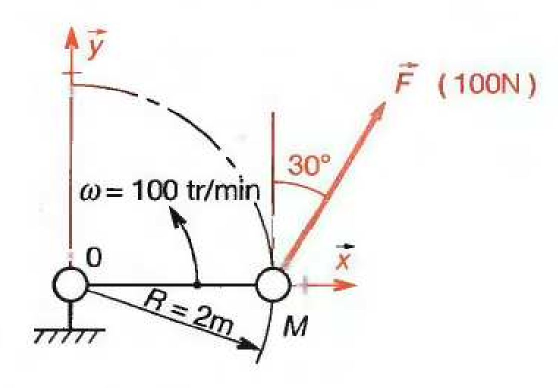
* Présentation pratique pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs (§ 73.5)

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE D'UNE FORCE

Force $\vec{F}$; $d\vec{\ell}$ (infiniment petit)

α aigu entre $\vec{F}$ et $d\vec{\ell}$	> 0
$\vec{F}$ perpendiculaire à $d\vec{\ell}$	= 0
α obtus entre $\vec{F}$ et $d\vec{\ell}$	< 0

EXPRESSION ANALYTIQUE (exemple)



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

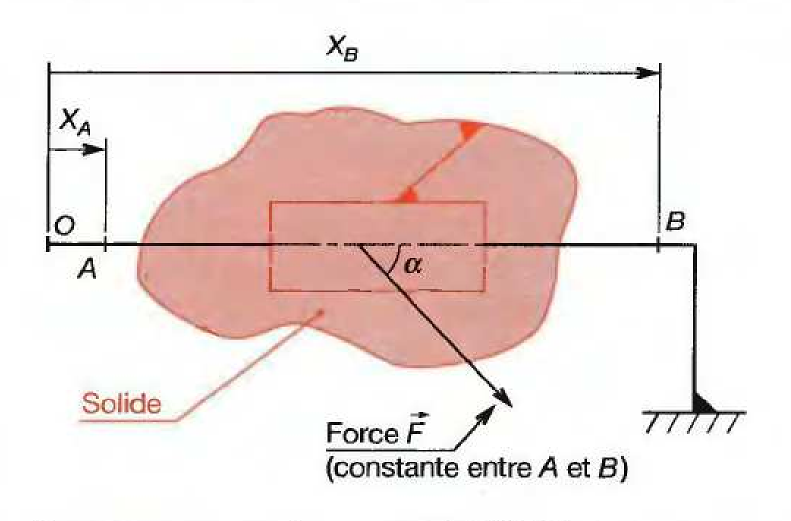
$$\vec{F}\begin{pmatrix}100\sin 30°\\100\cos 30°\\0\end{pmatrix};\ \vec{F}\begin{pmatrix}50\\50\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\omega = 100\ \text{tr/min} = 10{,}47\ \text{rad/s} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow d\theta = 10{,}47\ dt$$

Donc

$$dW = \begin{pmatrix}50\\50\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\times 10{,}47\ dt\\0\end{pmatrix} \approx 1\ 813\ dt$$



58■4 Travail d'une force ou translation quelconque

■ Elle conserve mêmes direction, sens et intensité mais son point d'application décrit une courbe quelconque ; son travail s'écrit $dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

$\left(d\vec{\ell} = ds \cdot \vec{T} \text{ où } \vec{T} \right.$: vecteur unitaire tangent à la courbe$\left. \right)$.

■ $dW = \|\vec{F}\| \cdot ds \cdot \cos\alpha = \|\vec{F}\| \cdot ds'$ (où ds' représente la projection d'un élément de trajectoire sur $\vec{F}$).

■ Entre deux points A et B, il suffit de sommer :

> **Le travail d'une force constante se déplaçant entre deux points est égal au produit de la norme de cette force par la projection de la trajectoire sur son support.**

58■5 Travail d'une force de moment constant par rapport à son axe de rotation

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F_T} \cdot d\vec{\ell} + \vec{F_N} \cdot d\vec{\ell}$$
$$= \vec{F_T} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{car} \quad \vec{F_N} \perp d\vec{\ell} \text{ ; donc } \vec{F_N} \cdot d\vec{\ell} = 0$$
$$= \vec{F_T} \cdot d\vec{\ell} \left(\vec{F_T} \cdot d\vec{\ell} = F_T \cdot d\ell \text{ : vecteurs colinéaires} \right)$$
$$= F_T \cdot R \cdot d\theta = \overline{\mathcal{M}_0}\left(\vec{F}\right) \cdot d\theta$$

Entre A et B, on obtient :

$$W_{A-B} = \overline{\mathcal{M}_0}\left(\vec{F}\right) \cdot \left(\theta_B - \theta_A\right) \qquad \text{(N et rad)}$$

> **Le travail d'un couple (moment constant et résultante nulle) est égal à la valeur de ce couple multipliée par son angle de rotation.**

58■6 Travail d'une action de contact

On projette résultante et moment de l'action mécanique en un point sur le plan tangent au contact et sur la normale à ce plan.

Les seuls mouvements possibles se réduisent à :

■ un glissement relatif dans ce plan, de vitesse $\overrightarrow{V_{A \in 2/1}}$,

■ un pivotement autour de la normale : $\omega_{z\,2/1}$,

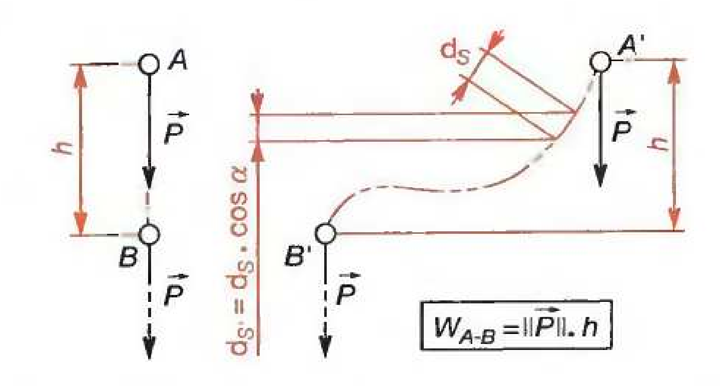
■ un roulement autour d'une droite du plan : ω_x et ω_y.

Le travail dW correspondant se calcule alors par :

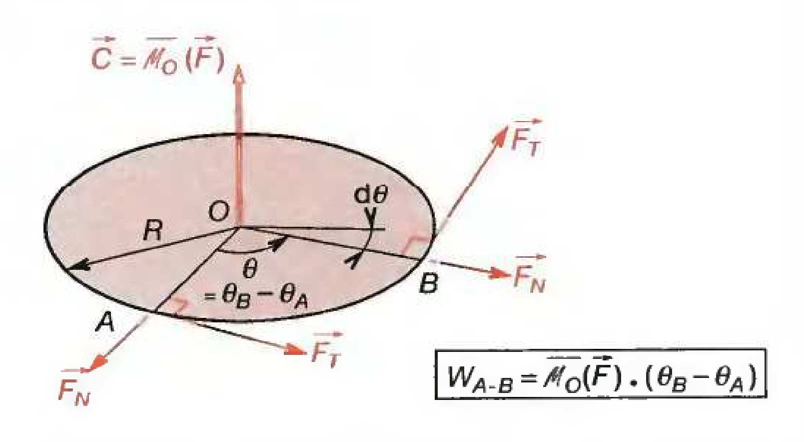
$$\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A_{1/2}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A1/2}} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \end{matrix} \right\} dt = \left(\overrightarrow{A_{1/2}} \cdot \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{A1/2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \right) dt$$

(Comoment du torseur de l'effort par le torseur cinématique.)

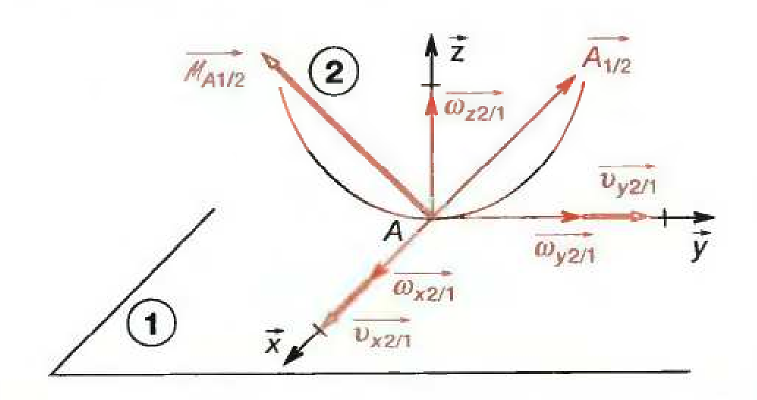
TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE
(exemple : poids d'un corps mobile)



TRAVAIL D'UN COUPLE



TRAVAIL D'UNE ACTION DE CONTACT



Action mécanique de 1/2 : $\{A_{1/2}\}$ en A	
$\overrightarrow{A_{1/2}} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A1/2}} \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix}$
Mouvement relatif de 2/1 : $\{v_{2/1}\}$ en A	
$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$
$dW = (X_A \cdot v_x + Y_A \cdot v_y + L_A \cdot \omega_x + M_A \cdot \omega_y + N_A \cdot \omega_z)\, dt$	

58.7 Applications

58.71 Sphère roulant sans glisser sur un plan

Entre A et B, les forces qui travaillent sont :

- le poids (direction constante) : $[W_{poids}]_{A-B} = +\ mgh$ (§ 58.4),
- l'action de contact en A :

$${}_A\{A_{0/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$ (frottement nécessaire pour la rotation ; résistance au roulement négligeable)

Le torseur cinématique de 1/0 en A s'écrit :

$${}_A\{\upsilon_{1/0}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$ (sans glissement, $\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \vec{0}$)

Dans le cas d'un roulement sans glissement, le travail de la force de contact est nul.

Le travail se réduit alors à celui du poids.

58.72 Travail d'un gaz

Un cylindre contient un gaz à la pression p. Il se comprime sous l'action $\vec{F}$ d'un piston. On peut écrire :

- Travail élémentaire reçu par le gaz :

$$|dW| = |F \cdot dx| = |p \cdot S \cdot dx| = |p \cdot dV|$$

- Sous $\vec{F}$, le volume V diminue ; donc $dV < 0$ et $p > 0$. On doit donc écrire le travail élémentaire :

$$dW = -F \cdot dx = -p \cdot S \cdot dx = -p \cdot dV$$

dW (J) $\quad p$ (Pa) $\quad V$ (m^3)

- Le gaz accumule de l'énergie quand on le comprime.

58.73 Travail d'un ressort

Le raisonnement ressemble au précédent :

Pendant une compression de dx, la force appliquée au ressort travaille de $dW = +F \cdot dx$.

Dans le domaine élastique on connaît la loi de déformation, fonction de la rigidité k (N/m) :

$$F = +k \cdot x$$

On a : $dW = +k \cdot x \cdot dx = +dS$

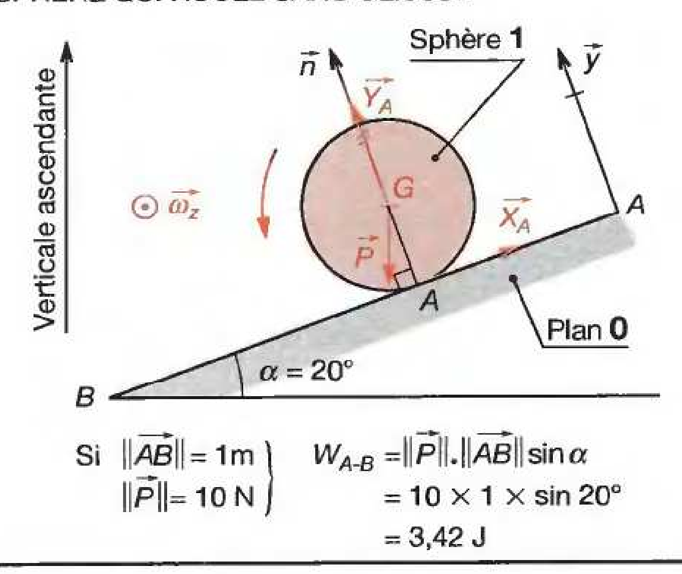
(dS = aire élémentaire sur le diagramme.)

Énergie accumulée pour la flèche f_{max} :

$$W_{A-B} = \mathscr{A} = \frac{1}{2}\ F_{max} \cdot f_{max}$$

Le ressort que l'on comprime emmagasine de l'énergie que l'on compte alors positivement.

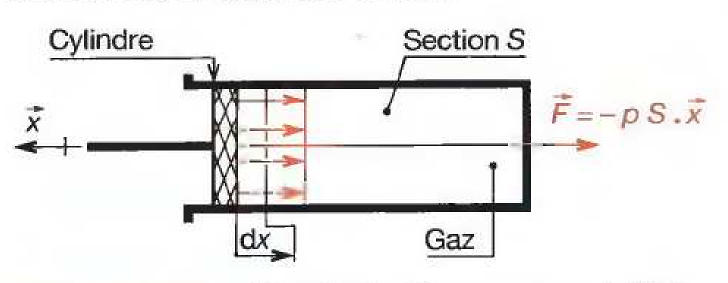
SPHÈRE QUI ROULE SANS GLISSER



Si $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$ m, $\|\vec{P}\| = 10$ N

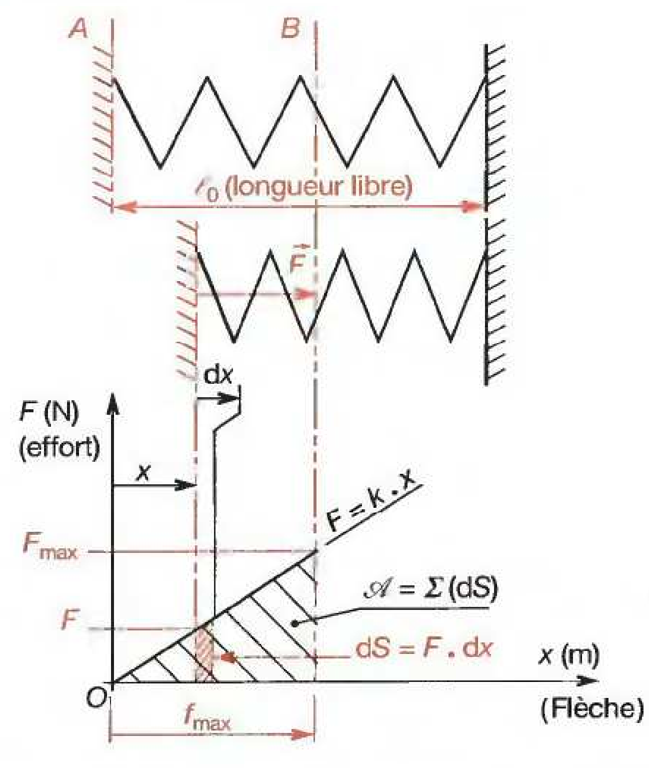
$W_{A\text{-}B} = \|\vec{P}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \sin\alpha = 10 \times 1 \times \sin 20° = 3{,}42$ J

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE D'UN GAZ



$dW = -p \cdot dV$ — dW en joules (J) ; p en pascals (Pa) ; dV en mètre-cube (m^3)

TRAVAIL D'UN RESSORT



$\mathscr{A}$ représente l'énergie potentielle du ressort soumis à F_{max}

59 Puissance

59.1 Définition

La puissance instantanée P d'une force qui effectue pendant le temps dt le travail élémentaire dW est égale à la dérivée du travail élémentaire par rapport au temps :

$$P = \frac{dW}{dt}$$

P : puissance à l'instant t en watt (W).

dW : travail élémentaire en joule (J).

dt : temps élémentaire en seconde (s).

REMARQUE :

- La puissance est une grandeur algébrique (voir convention de signe fig. 1).
- Un watt est la puissance développée par une force qui effectue un travail de 1 joule en 1 seconde.
Multiple : le kilowatt (kW) ; 1 kW = 10^3 W *.

59.2 Puissance d'une force

La puissance développée par une force $\vec{F}$ à l'instant t est égale au produit scalaire de cette force par la vitesse du point d'application M de cette force dans son mouvement par rapport au repère $(\mathcal{R})$ (voir fig. 2).

$$P = \vec{F} \cdot \overrightarrow{V_{M \in S/\mathcal{R}}} \quad \text{ou} \quad P = \|\vec{F}\| \cdot \|\overrightarrow{V_{M \in S/\mathcal{R}}}\| \cdot \cos\alpha$$

P : puissance en watt (W).

$\|\vec{F}\|$: intensité de la force appliquée sur (S) en newton (N).

$\|\overrightarrow{V_{M \in S/\mathcal{R}}}\|$: vitesse de M appartenant à (S) par rapport à $(\mathcal{R})$, en mètre par seconde (m/s).

59.3 Puissance d'une force sur un solide en rotation

$$P = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}$$

P : puissance à l'instant t en watt (W).

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})}$: moment de $\vec{F}$ par rapport à O.

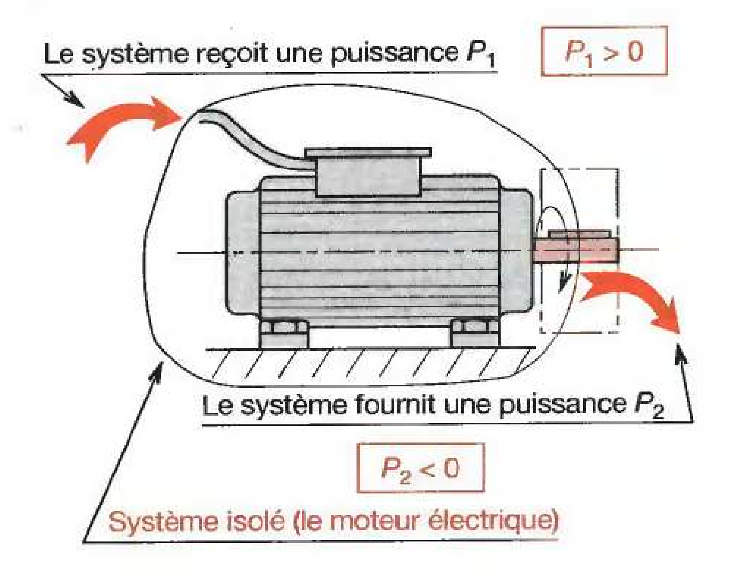
$\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})}\|$ en newton . mètre (N . m).

$\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}$: vitesse de rotation de (S) par rapport à $(\mathcal{R})$,

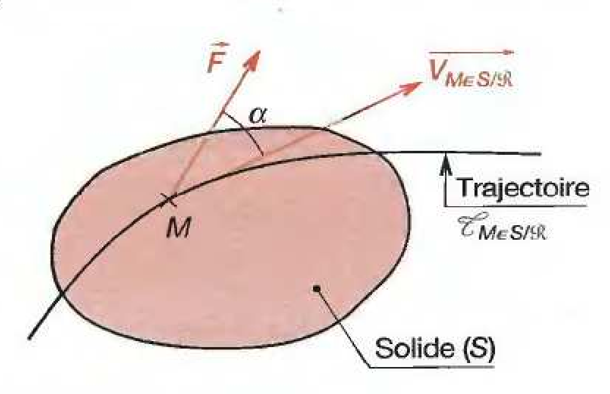
$\|\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}\|$ en radian par seconde (rad/s).

* Ancienne unité : le cheval vapeur : 1 ch = 736 W.

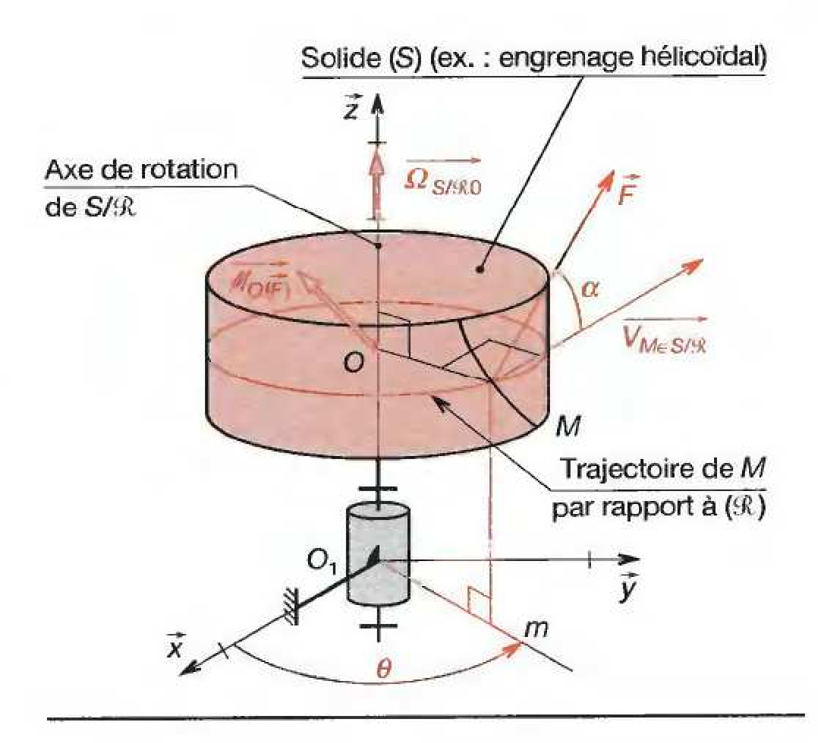
(1) CONVENTION DE SIGNE



(2) PUISSANCE DÉVELOPPÉE PAR UNE FORCE



(3) PUISSANCE D'UNE FORCE SUR UN SOLIDE EN ROTATION



Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les composantes des vecteurs sont :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} : \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \text{avec : } \begin{matrix} L = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Ox}(\vec{F})} \\ M = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F})} \\ N = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})} \end{matrix} \; : \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit scalaire $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}$

$$\boldsymbol{P = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})} \cdot \omega \quad \text{ou} \quad P = N \cdot \omega}$$

P : puissance développée à l'instant t par une force $\vec{F}$ appliquée sur un solide en rotation par rapport à un axe fixe $(O, \vec{z})$ (W).

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{Ox}(\vec{F})}$: moment de la force $\vec{F}$ / axe fixe $(O, \vec{z})$ (N.m).

ω : vitesse angulaire de $S/\mathcal{R}$ à l'instant t (rad/s).

REMARQUES :

- Si $\overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})}$ et ω sont de même signe : $P > 0$.
La puissance développée par $\vec{F}$ est fournie au solide (S).

- Si $\overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})}$ et ω sont de signe contraire $P < 0$.
La puissance développée par $\vec{F}$ est prélevée au solide (S).

- On pose souvent $\overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})} = C_m$.
C_m étant le couple moteur (en N.m),
avec : $C_m = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})} \cdot \vec{z}$.
L'expression de la puissance devient :

$$\boldsymbol{P = C_m \cdot \omega}$$

EXEMPLE DE CALCUL :

Un dispositif de levage est constitué d'un moto-réducteur **1** muni d'une poulie à gorge **2** sur laquelle s'enroule un câble **3** (d = 150 mm). La charge est $\|\vec{P}\|$ = 1 800 N. La vitesse de levage est constante $\|\overrightarrow{V_{A\in 4/\mathcal{R}}}\|$ = 20 m/min.

1° Calculer la puissance nécessaire pour élever cette charge et déterminer celle du motoréducteur.

2° Calculer le couple moteur correspondant.

HYPOTHÈSES :

- Les poids du support et du câble sont négligés.
- Le câble est sans raideur.

SOLUTION :

1° Isoler S_1 = {portion 3" de câble, bobine 4, support 5}.

- S_1 est en équilibre à vitesse constante sous l'action de deux résultantes $\vec{P}$ et $\overrightarrow{T_{3'/3''}}$ d'où $\overrightarrow{T_{3'/3''}} = -\vec{P}$.

d'où : $\overrightarrow{T_{3'/3''}} = -\|\vec{P}\|\vec{y} = 1\,800\,\vec{y}$.

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{C\in 3''/\mathcal{R}}}$ est vertical.

$\overrightarrow{V_{C\in 3''/\mathcal{R}}}$ et $\overrightarrow{T_{3'/3''}}$ sont donc colinéaires.

- Calculer la puissance développée par cette force :

$$P = \|\overrightarrow{V_{C\in 3''/\mathcal{R}}}\| \cdot \|\overrightarrow{T_{3'/3''}}\| \cdot \cos 0° \;\; ; \;\; \cos 0° = 1$$

d'où : $P = (20/60) \times 1\,800$; $\boldsymbol{P = 600\ W}$.

2° Isoler l'ensemble S_2 = {poulie 2, portion de câble 3'}.

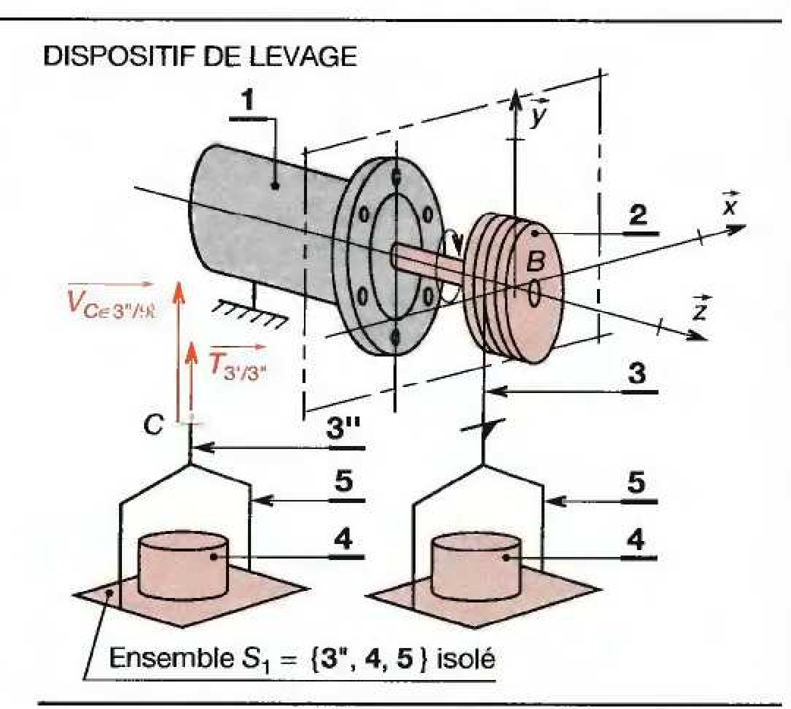
- Recenser les actions extérieures (voir tableau ci-contre).
- Écrire le théorème du moment statique / $(O, \vec{z})$ en B :

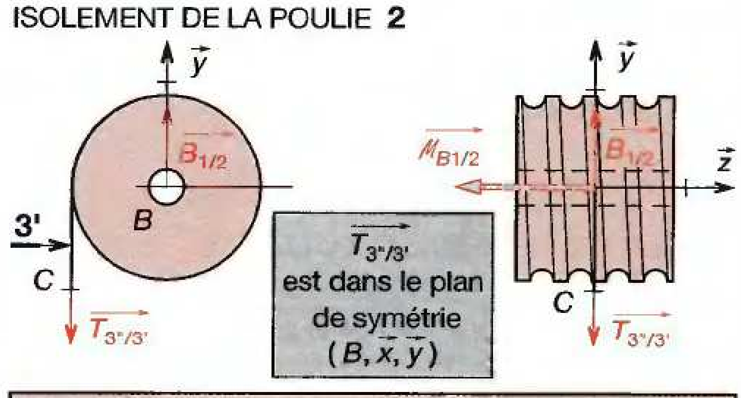
$N_B + \|\overrightarrow{T_{3''/3'}}\| \cdot d/2 = 0$

$N_B + 1\,800 \times 150/2 = 0$

$N_B = -\,135\,000$ N.mm ; $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{T_{3''/3'}})} = -\,135\ N.m}$.

$N_B = C_m = -135$ N.m est le couple moteur exercé sur la poulie **2**.





Torseurs appliqués sur (S) = {2, 3'}
$\left\{\mathrm{Coh}_{3''/3'}\right\}_C = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{C_{3''/3'}} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C = \left\{\begin{matrix}0 & 0 \\ -1800 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_C$
$\left\{B_{1/2}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{B_{1/2}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B1/2}}\end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & N_B\end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

59■4 Puissance absorbée par les actions de contact

■ Lorsqu'une **liaison est parfaite** (facteur de frottement μ nul) la puissance absorbée par les actions de contact est **nulle**.

Par exemple, si la masselotte **2** glisse **sans frottement** sur la tige **1** en rotation uniforme autour de $(O, \vec{z})$ on peut écrire :

$$P = \overrightarrow{A_{1/2}} \cdot \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} = 0 \qquad (\overrightarrow{A_{1/2}} \perp \overrightarrow{V_{A \in 2/1}})$$

■ **Lorsque le facteur de frottement μ n'est pas nul**, la résultante des actions de contact de **1/2** peut être projetée sur une normale et une tangente à la surface de contact :

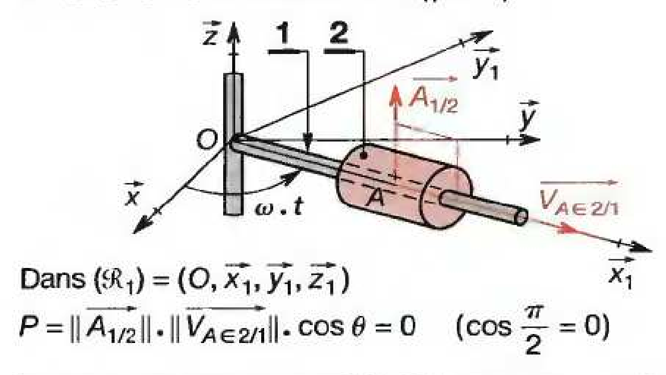
$$\overrightarrow{A_{1/2}} = \overrightarrow{N_{1/2}} + \overrightarrow{T_{1/2}} \qquad \text{(voir § 32.2).}$$

Le travail de la force tangentielle est **résistant** et **non nul**. Il est transformé essentiellement en chaleur.

REMARQUE :

Dans le cas **d'un roulement sans glissement ($\mu \neq 0$) avec un contact ponctuel**, le travail (et donc la puissance) de l'action de contact est **nul** (voir § 58.71).

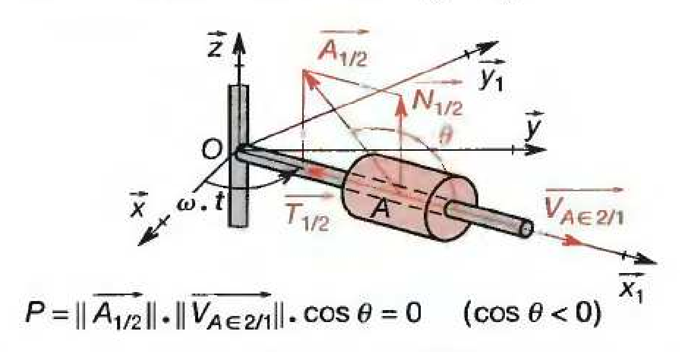
MASSELOTTE COULISSANTE ($\mu = 0$)



Dans $(\mathcal{R}_1) = (O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$

$P = \|\overrightarrow{A_{1/2}}\| \cdot \|\overrightarrow{V_{A \in 2/1}}\| \cdot \cos\theta = 0 \qquad (\cos\frac{\pi}{2} = 0)$

MASSELOTTE COULISSANTE ($\mu \neq 0$)



$P = \|\overrightarrow{A_{1/2}}\| \cdot \|\overrightarrow{V_{A \in 2/1}}\| \cdot \cos\theta = 0 \qquad (\cos\theta < 0)$

59■51 UN SEUL DEGRÉ DE LIBERTÉ

Nature du mouvement	1. Translation selon $(O, \vec{x})$	2. Rotation autour de $(O, \vec{z})$	3. Pivotement autour de $(O, \vec{y})$	4. Roulement autour de $(O, \vec{z})$
Actions de contact	$\overrightarrow{A_{2/1}}$, $\overrightarrow{N_{2/1}}$, $\vec{y}$, 1, $\vec{x}$, 2, $\overrightarrow{T_{2/1}}$, $\vec{P}$, $\overrightarrow{V_{M \in 1/2}}$	$\vec{y}$, $\overrightarrow{N_{2/1}}$, 1, $\overrightarrow{A_{2/1}}$, $\vec{x}$, O, 2, A, $\overrightarrow{T_{2/1}}$, $\omega_{1/2}$	$\vec{y}$, $\overrightarrow{A_{2/1}}$, $\overrightarrow{\omega_{1/2}}$, 1, A, 2, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}}$	$\overrightarrow{A_{2/1}}$, $\overrightarrow{N_{2/1}}$, 1, O, $\overrightarrow{\omega_{1/2}}$, 2, $\overrightarrow{T_{2/1}}$, δ
Puissance absorbée	$P = \overrightarrow{A_{2/1}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in 1/2}}$ $P = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \mu \|\overrightarrow{V_{M \in 1/2}}\|$	$P = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(A_{2/1})} \cdot \overrightarrow{\omega_{1/2}}$ $P = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \mu \cdot \frac{D}{2} \|\overrightarrow{\omega_{1/2}}\|$	$P = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A2/1}} \cdot \overrightarrow{\omega_{1/2}}$ $P = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \mu \cdot \frac{D}{3} \|\overrightarrow{\omega_{1/2}}\|$	$P = \overrightarrow{\mathcal{M}_{Oz}(N_{2/1})} \cdot \overrightarrow{\omega_{1/2}}$ $P = \delta \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \cdot \|\overrightarrow{\omega_{1/2}}\|$

EXEMPLE DE CALCUL :

Un arbre **1** de diamètre 60 mm est en liaison pivot par rapport à **2**. Il est soumis à une force radiale de 2 500 N. Le facteur de frottement entre **2** et **1** est $\mu = 0{,}1$. La fréquence de rotation de **1/2** est $n = 50$ t/min.

Calculer la puissance absorbée par le palier **2**.

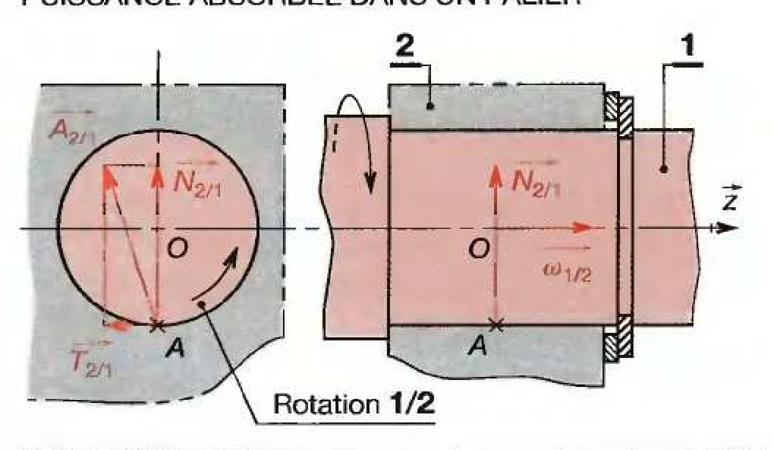
RÉSOLUTION :

Nous sommes dans le 2e cas du tableau :

$$P = \|\overrightarrow{N_{2/1}}\| \cdot \mu \cdot \frac{D}{2} \cdot \|\overrightarrow{\omega_{1/2}}\|$$

$$P = 2\,500 \times 0{,}1 \times 0{,}03 \times \frac{2\,\pi \times 50}{60} \qquad \mathbf{P \approx 39{,}3\ W.}$$

PUISSANCE ABSORBÉE DANS UN PALIER



59.52 Plusieurs degrés de liberté

Soit un solide en rotation autour de $(A, \vec{x})$ et en translation selon $(A, \vec{x})$ par rapport à S_0 (exemple de la liaison pivot glissant). Le torseur cinématique de $(S)/\mathcal{R}_0$ s'écrit en A :

$$_A\{v_{S/\mathcal{R}0}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} \end{Bmatrix} \quad (\mathcal{R}_0 \text{ est lié à } S_0)$$

Le torseur des actions de contact de $(S_0)/(S)$ en A est :

$$_A\{A_{(S)/(S0)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} \end{Bmatrix}$$

La puissance totale des actions mécaniques de $(S_0)/(S_1)$ est égale à la somme de la puissance développée par $\vec{R}$ et de celle développée par $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$:

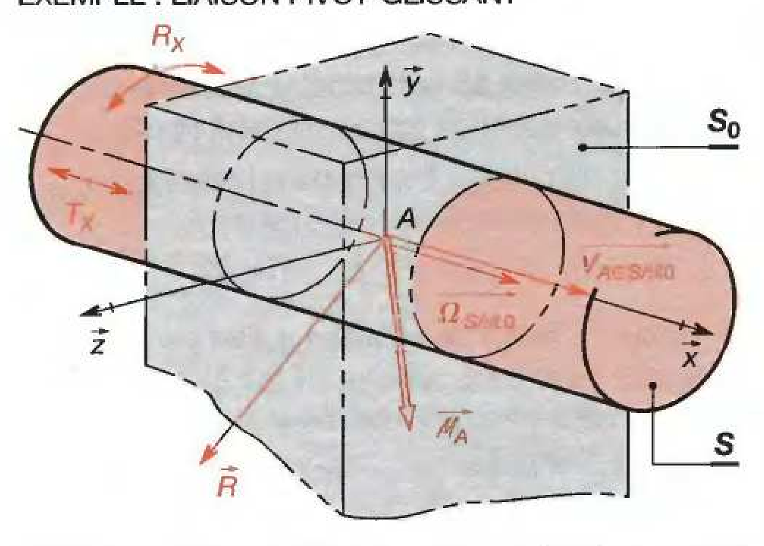
$$P = \vec{R} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_A} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}}$$

$\vec{R}$: résultante des actions mécaniques de (S_0) sur (S).
$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$: moment des actions mécaniques de (S_0) sur (S) en A.
$\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}}$: vitesse angulaire de (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$.
$\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}}$: vitesse de A lié à (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$.

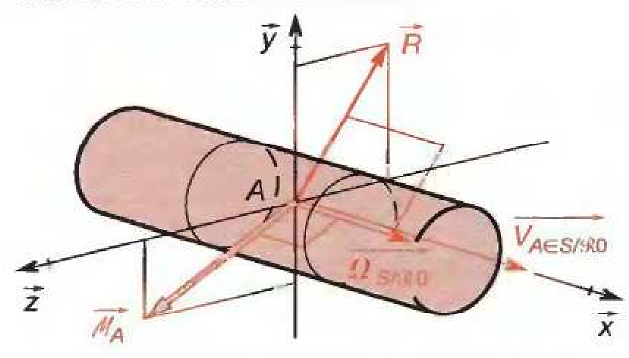
P est donc le comoment suivant :

$$P = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} \end{Bmatrix} \cdot {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} \end{Bmatrix}$$

EXEMPLE : LIAISON PIVOT-GLISSANT



CAS DE LA PUISSANCE NULLE



$P = 0$, si on a simultanément :
$\vec{R} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}} = 0$: $\vec{R} \perp$ à $\overrightarrow{V_{A\in S/\mathcal{R}0}}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}_A} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}} = 0$: $\overrightarrow{\mathcal{M}_A} \perp$ à $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}0}}$

59.6 Puissance absorbée par la résistance de l'air

- Cette dernière absorbe une grande partie de la puissance du moteur d'une automobile.
- Le vent sur le toit d'un bâtiment provoque une charge importante.

D'après le § 18.3 :

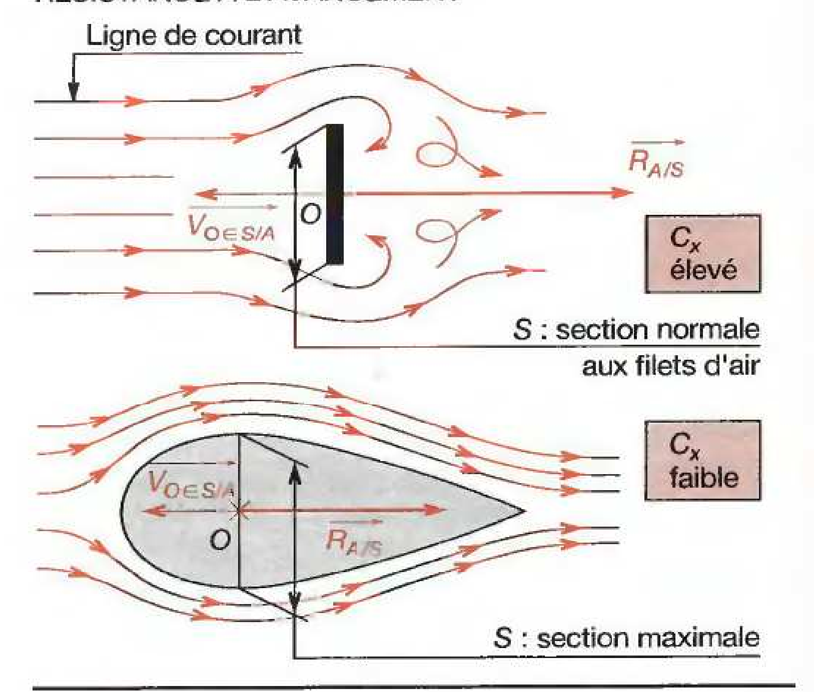
$$\|\overrightarrow{R_{A/S}}\| = 0{,}5 . C_x . \rho . S . \|\overrightarrow{V_{S/A}}\|^{2\,*}$$

C_x : coefficient de traînée (dépend de la forme, de la rugosité du corps).
ρ : masse volumique de l'air (kg/m^3).
S : section maximale du corps normale aux filets d'air (m^2).
$\overrightarrow{V_{(S/A)}}$: vitesse du solide (S) par rapport à l'air (A) (m/s).

La puissance correspondante absorbée est :

$$P = \|\overrightarrow{R_{A/S}}\| . \|\overrightarrow{V_{S/A}}\| \;;\; P = 0{,}5 . C_x . \rho . S . \|\overrightarrow{V_{S/A}}\|^3$$

RÉSISTANCE À L'AVANCEMENT



60 Énergie

60 ■ 1 Définition

Un système isolé possède de l'énergie si cette **grandeur physique peut être transformée en travail mécanique**.

On distingue différentes formes d'énergie, par exemple :

- **l'énergie mécanique** : elle est directement transformable en travail (mécanismes avec ressorts, fluides comprimés, etc).
- **l'énergie électrique** : liée à la circulation d'électrons dans un conducteur (moteur électrique).
- **l'énergie chimique** : liée à la combinaison de plusieurs corps (ex. : la combustion de l'essence provoque un travail dans le moteur à combustion interne).
- **l'énergie solaire** : liée au rayonnement solaire, à son aspect lumineux (photopiles) ou calorifique.
- **l'énergie nucléaire** : liée à la transformation de la structure des atomes (réacteur nucléaire).

La figure 1 montre, sous forme symbolique, quelques transformations possibles de l'énergie.

60 ■ 2 Rendement énergétique

Le rendement d'une machine qui transforme une forme d'énergie quelconque en énergie mécanique est défini par le rapport suivant (voir fig. 2) :

$$\eta = \frac{P_s}{P_e}$$

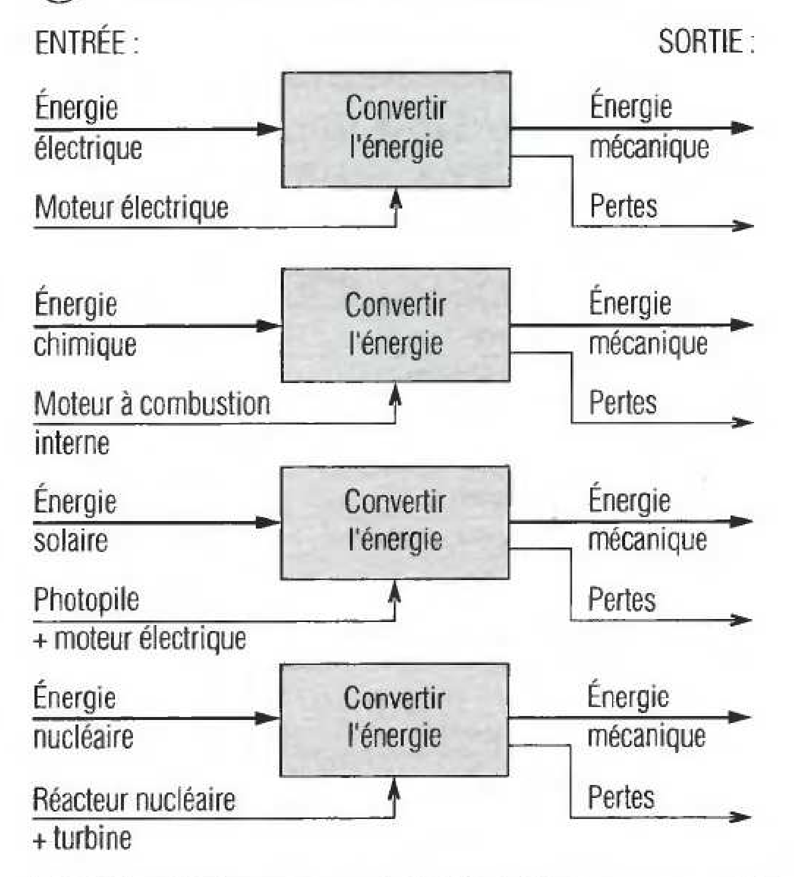
η : rendement (lire êta). Nombre sans dimension.
P_e : puissance d'entrée dans le système isolé (W).
P_s : puissance de sortie du système isolé (W).

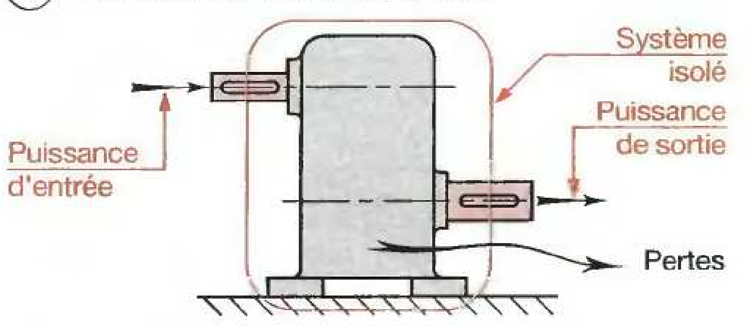
REMARQUES :

- La puissance dissipée par les pertes (frottements, effet Joule, pertes calorifiques...) est égale à la différence entre la puissance d'entrée et la puissance de sortie.
- η est toujours inférieur à 1 ; $\eta < 1$.*
- Si un mécanisme est constitué d'un ensemble de mécanismes montés en série (voir fig. 3) ayant chacun un rendement connu ($\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots \eta_n$), le rendement global η du mécanisme est :

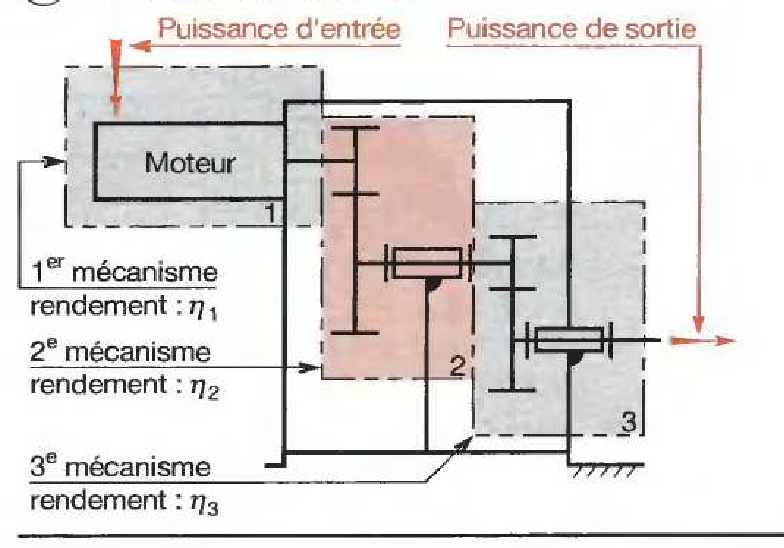
$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \eta_n$$

* Pour certains calculs, on prendra $\eta = 1$.









60 ■ 3 Valeurs de rendements de mécanismes

Pour les calculs de rendements de mécanismes :

■ soit on calcule les valeurs à partir de relations faisant intervenir le facteur de frottement entre matériaux (voir chapitre 12 et chapitre 32).

■ soit on utilise les valeurs expérimentales du tableau ci-dessous. Une place particulière est faite aux systèmes vis-écrou à billes, étant donné leur importance dans les parties opératives des machines à commandes d'axes numériques et des systèmes asservis.

Mécanismes particuliers	Rendement η
Arbres sur paliers à roulements	0,98
Arbres sur paliers lisses bien lubrifiés	0,95
Commandes par courroie	0,95
Engrenages droits rectifiés, bien lubrifiés	0,98
Engrenages taillés, bien lubrifiés	0,95 à 0,97
Arbres sur paliers lisses à graissage discontinu	0,9 à 0,92
Engrenages taillés mal lubrifiés	0,9 à 0,92
Engrenages bruts de matriçage, selon montage et entretien	0,75 à 0,85
Roue et vis sans fin : – réversible bien lubrifié – irréversible, lubrifié à la graisse	 0,4 à 0,8 0,3 à 0,4
Vis et écrou d'assemblage (irréversible)	0,15 à 0,3

SYSTÈME VIS-ÉCROU

① Rendement η des vis-écrou à billes (utilisation normale) *

Utilisation normale : tourner la vis pour obtenir un déplacement en translation de l'écrou.

Rendement η (1 ; 0,9 ; 0,8 ; 0,7 ; 0,6 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1)

$\mu = 0{,}003$; $\mu = 0{,}005$; $\mu = 0{,}01$ — Vis à billes

$\mu = 0{,}1$; $\mu = 0{,}2$ — Vis traditionnelle

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Angles d'hélice (degrés) : α

Exemple : on donne : $\alpha = 2°$; $\mu = 0{,}01$.
Quel est le rendement de η ?
La courbe donne : $\eta = 0{,}78$.

② Rendement η des vis-écrou à billes (utilisation inversée) *

Utilisation inversée : translater l'écrou pour obtenir une rotation de la vis.

Rendement η (1 ; 0,9 ; 0,8 ; 0,7 ; 0,6 ; 0,5 ; 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1)

$\mu = 0{,}003$; $\mu = 0{,}005$; $\mu = 0{,}01$ — Vis à billes

$\mu = 0{,}1$ — Vis traditionnelle ou de roulement

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Angles d'hélice (degrés) : α

Exemple : on donne : $\alpha = 2°$; $\mu = 0{,}01$.
Quel est le rendement de η ?
La courbe donne : $\eta = 0{,}7$.

$\mu = \tan \varphi$
Facteur de frottement ou de frottement équivalent.

* D'après Korta.

61 Énergie potentielle

Dans certains cas particuliers, le travail d'une force appliquée sur un corps dépend **uniquement des positions initiale et finale** du corps, et non de la façon dont le parcours s'est effectué. Dans ce cas, la force est dite **conservative**, elle dépend d'une **fonction E_p, appelée énergie potentielle**.

61 ▪ 1 Énergie potentielle de pesanteur

Un solide (S) de masse m, **placé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$**, se déplace de 1 à 2. Le travail de son poids $\vec{P}$ dans le déplacement d'une hauteur : $h = z_1 - z_2$, s'écrit :

$$W(\vec{P})_{1\text{-}2} = mg(z_1 - z_2) \;;\; W(\vec{P})_{1\text{-}2} = mgz_1 - mgz_2$$

▪ Par définition, l'énergie potentielle de pesanteur en 1 ou 2, définie à une constante près C, est :

$$E_{p1} = mgz_1 + C \;;\; E_{p2} = mgz_2 + C$$

E_{p1} : énergie potentielle en un lieu 1 (J).
E_{p2} : énergie potentielle en un lieu 2 (J).
m : masse du solide (S) (kg).
z_1 : altitude du lieu 1 par rapport à l'origine de $\mathfrak{R}$ (m).
z_2 : altitude du lieu 2 par rapport à l'origine de $\mathfrak{R}$ (m).

REMARQUE :
Si conventionnellement E_p est nulle pour $z = 0$, la constante est nulle et $E_p = mgz$*.

▪ Le travail du poids $\vec{P}$ peut s'écrire ainsi :

$$W(\vec{P})_{1\text{-}2} = E_{p1} - E_{p2} \;;\; W(\vec{P})_{1\text{-}2} = mgh$$

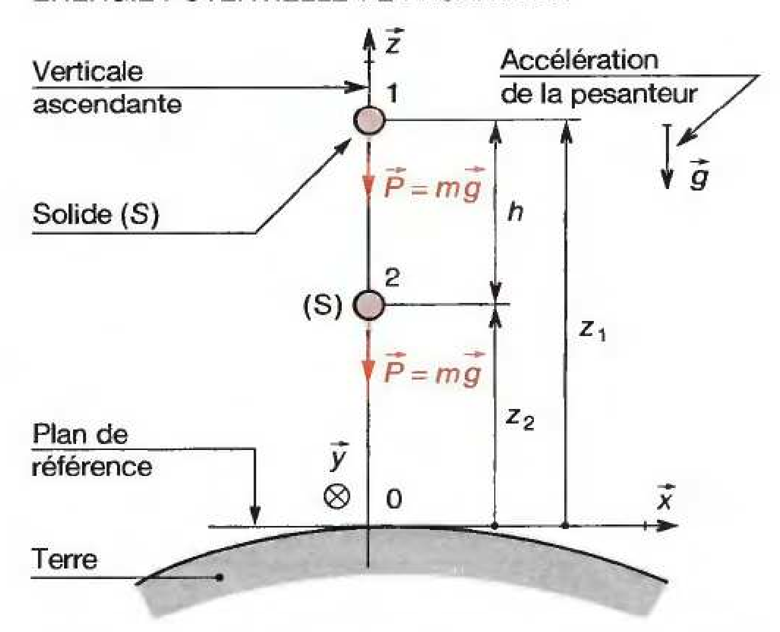
61 ▪ 2 Énergie potentielle d'élasticité

Un ressort **1** comprimé, exerce sur un piston **2**, un effort $\vec{F_{1/2}}$: lorsque **2** passe du point **1** au point **2**, le travail de la force d'élasticité $\vec{F_{1/2}}$ du ressort s'écrit :

$$W(\vec{F})_{1\text{-}2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \;;\; W(\vec{F})_{1\text{-}2} = E_{p1} - E_{p2}$$

E_{p1} : énergie potentielle d'élasticité au point 1 (J).
E_{p2} : énergie potentielle d'élasticité au point 2 (J).
k : raideur du ressort (N/m).
x_1 : abscisse du point 1 (m).
x_2 : abscisse du point 2 (m).

ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR

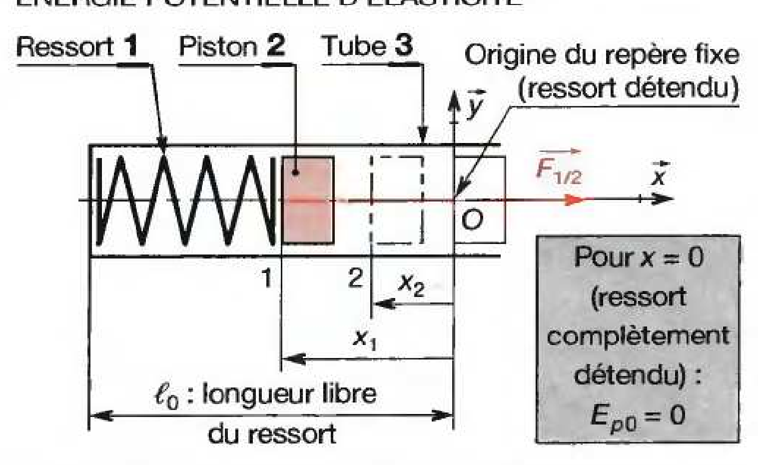


EXEMPLE DE CALCUL

Un corps de masse M = 300 kg descend de 3 m. Sachant que $\|\vec{g}\|$ = 10 m/s², calculer la variation d'énergie potentielle de pesanteur au cours du déplacement : $h = z_1 - z_2$; h = 3 m.

$$W(\vec{P})_{1\text{-}2} = 300 \times 10 \times 3 = 9\,000\ \text{J}.$$

ÉNERGIE POTENTIELLE D'ÉLASTICITÉ



RAPPEL

▪ **La force exercée par un ressort est proportionnelle à sa flèche x : $\vec{F_{1/2}} = -kx.\vec{x}$.**
Si $x < 0$ (cas ci-dessus) $F_{1/2} > 0$.

▪ **Le travail élémentaire est $dW = -kx\,dx$**.**

$$W(\vec{F})_{1\text{-}2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2.$$

* Sinon on peut exploiter simplement la différence d'énergie potentielle, ce qui permet d'éliminer la constante. ** Voir chapitre 58.

61 ▪ 3 Énergie potentielle d'un gaz

Un gaz que l'on comprime accumule de l'énergie (§ 58.72). On dit alors qu'il augmente son énergie potentielle car il pourra restituer le travail correspondant lors de sa détente.

$$W(\text{gaz})_{1\text{-}2} = E_{p2} - E_{p1}$$

$W(\text{gaz})_{1\text{-}2}$: travail reçu par le gaz entre les états 1 (p_1, v_1, T_1) et 2 (p_2, v_2, T_2) (J).

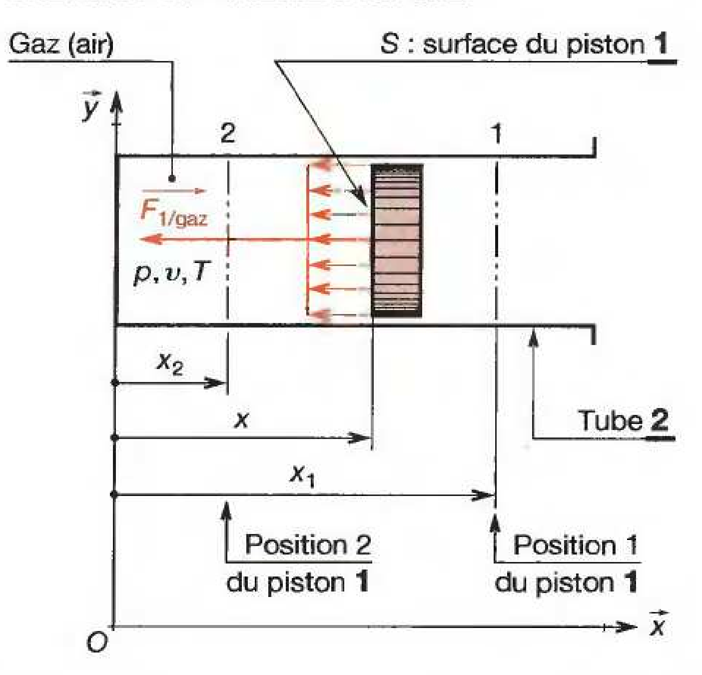
E_{p2} : énergie potentielle finale du gaz (état 2).

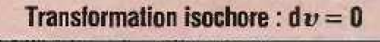
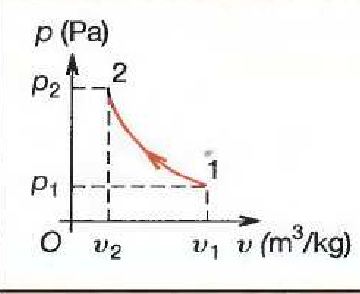
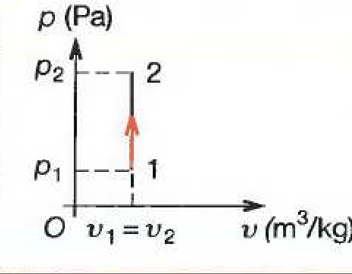
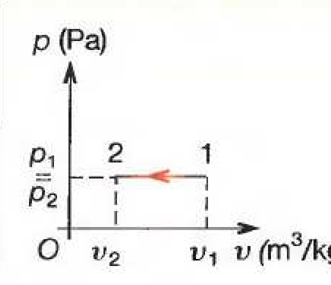
E_{p1} : énergie potentielle initiale du gaz (état 1).

On peut aussi écrire :

$$\Delta E_{p1\text{-}2} = E_{p2} - E_{p1} = \int_{v1}^{v2} - p.\mathrm{d}v$$

ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN GAZ



DÉMARCHE DE CALCUL	GRANDEURS PHYSIQUES
1° Pour calculer l'intégrale ci-dessus, il faut connaître la loi de variation de p en fonction de la variation de volume. **2° Identifier le type de transformation dans le tableau ci-dessous (transformation en vase clos d'une masse de 1 kg de gaz située en permanence dans le même récipient*).** **3° Calculer p_1, v_1 à l'état 1 et p_2, v_2 à l'état 2.** **4° Calculer $W_{1\text{-}2}$ selon la loi définie ci-dessous.**	**p : pression effective du gaz (Pa).** **v : volume occupé par le gaz (m³ / kg).** **T : température absolue (K).** **r : constante caractéristique du gaz (J / (kg . K)).** **$\vec{F}$: force exercée par le gaz sur le piston (N) avec $\vec{F} = p.S.\vec{x}$.** **dW (gaz) : travail élémentaire du gaz (J / kg) avec dW(gaz) $= \vec{F}.\mathrm{d}\vec{x}$.**
Transformation isotherme : T = Cte	**Transformation isochore : dv = 0** 
 Loi de Mariotte : T = Cte; pv = Cte **Travail échangé 1-2 :** $W_{1\text{-}2} = -p_1 v_1 \ell_n \dfrac{v_2}{v_1}$	 $p_1 v_1 = r \cdot T_1$ $p_2 v_2 = r \cdot T_2$ $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{T_1}{T_2}$ **Travail échangé 1-2 :** $W_{1\text{-}2} = 0$
Transformation isobare : dp = 0	**Transformation isentropique : dQ = 0**
 $p_1 v_1 = r \cdot T_1$ $p_2 v_2 = r \cdot T_2$ $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{T_1}{T_2}$ **Travail échangé 1-2 :** $W_{1\text{-}2} = -p\,(v_2 - v_1)$	p (Pa), p_2, 2, p_1, 1, O, v_2, v_1, v (m³/kg) pv^{γ} = Cte **Travail échangé 1-2 :** $W_{1\text{-}2} = \dfrac{1}{\gamma - 1}(p_2 v_2 - p_1 v_1)$ $W_{1\text{-}2} = \dfrac{r}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$

* Étude insuffisante pour aborder les machines thermiques dans lesquelles le gaz s'écoule.

62 Énergie cinétique

C'est l'énergie acquise par un solide (S) qui se déplace à une vitesse v par rapport à un référentiel ($\mathcal{R}$).

Tout corps en mouvement peut fournir un travail lorsque sa vitesse diminue (un marteau qui arrive avec une vitesse sur une tôle, est capable de la déformer).

62 ■ 1 Solide en translation

On définit la variation d'énergie cinétique $\Delta E_{k\,1\text{-}2}$ d'un solide (S) entre deux instants t_1 et t_2 par :

$$\Delta E_{k\,1\text{-}2} = \frac{1}{2}\, m . v^2_{2\,S/\mathcal{R}} - \frac{1}{2}\, m . v^2_{1\,S/\mathcal{R}}$$

m : masse de (S) (kg).
v_1 : vitesse d'un point (S) par rapport à ($\mathcal{R}$) à l'instant t_1 (m/s).
v_2 : vitesse d'un point (S) par rapport à ($\mathcal{R}$) à l'instant t_2 (m/s).

Par définition, la grandeur scalaire **positive** $\frac{1}{2}\, m . v^2_{1\,S/\mathcal{R}}$ **est l'énergie cinétique du solide (S)**, à l'instant t_1 considéré, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$*. On peut aussi écrire :

$$\Delta E_{k\,1\text{-}2} = E_{k\,2} - E_{k\,1}$$

$\Delta E_{k\,1\text{-}2}$: variation d'énergie cinétique entre t_1 et t_2 (J).

62 ■ 2 Solide en rotation

On définit la variation d'énergie cinétique $\Delta E_{k\,1\text{-}2}$ d'un solide (S) entre deux instants t_1 et t_2 par :

$$\Delta E_{k\,1\text{-}2} = \frac{1}{2}\, J_{Oz} . \omega^2_{2\,S/\mathcal{R}} - \frac{1}{2}\, J_{Oz} . \omega^2_{1\,S/\mathcal{R}} = E_{k\,2} - E_{k\,1}$$

J_{Oz} : moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe ($O, \vec{z}$) de rotation de (S)/($\mathcal{R}$) (kg . m²).
$\omega_{1S/\mathcal{R}}$: vitesse angulaire de (S)/($\mathcal{R}$) à l'instant t_1 (rad/s).
$\omega_{2S/\mathcal{R}}$: vitesse angulaire de (S)/($\mathcal{R}$) à l'instant t_2 (rad/s).

APPLICATION :

Calculer la variation d'énergie cinétique du volant ***V*** de masse $m = 120$ kg, de forme cylindrique de rayon $R = 0{,}5$ m, entre l'instant t_1 de fréquence de rotation $n_1 = 900$ tr/min et l'instant t_2 : $n_2 = 0$ tr/min.

SOLUTION :

Calculer le moment d'inertie du volant par rapport à ($O, \vec{z}$)

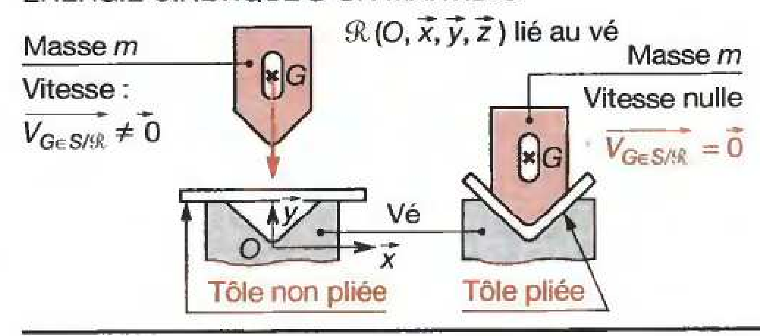
$$J_{Oz} = \frac{m R^2}{2} \; ; \; J_{Oz} = \frac{120 \times 0{,}5^2}{2} \; ; \; J_{Oz} = 15 \text{ kg . m}^2$$

La vitesse angulaire à t_1 est $\omega_{1(V/\mathcal{R})} = \dfrac{900 \times 2\pi}{60} = 30\,\pi$ rad/s.

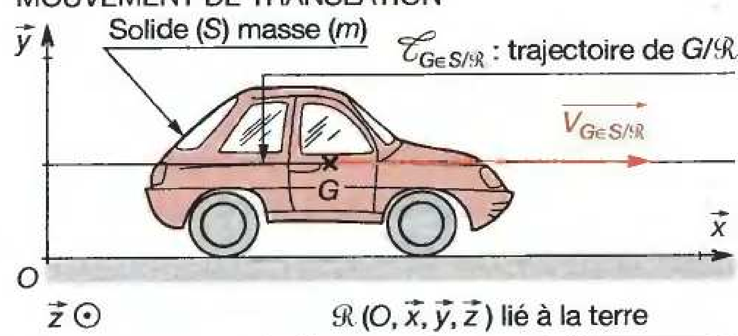
Calculer la variation d'énergie cinétique entre t_1 et t_2 :

$$E_{k2} - E_{k1} = 0 - \frac{1}{2} \times 15 \times (30\,\pi)^2 \; ; \; \mathbf{\Delta E_{k\,1\text{-}2} = -\,6\,620\ J}$$

ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN MARTEAU

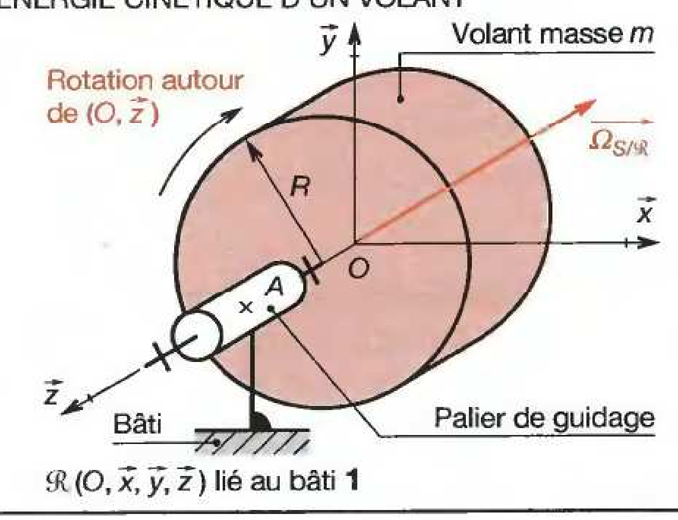


MOUVEMENT DE TRANSLATION



TRANSLATION : EXEMPLE DE CALCUL
Calculer la variation d'énergie cinétique d'une automobile dont la masse en charge est de 1 600 kg lorsqu'elle passe d'une vitesse $v_1 = 110$ km/h à l'arrêt ($v_2 = 0$) par rapport à un référentiel ($\mathcal{R}$) lié à la terre.
SOLUTION :
Convertir la vitesse à l'instant t_1 en m/s :
$v_1 = \dfrac{110 \times 10^3}{3\,600}$; $v_1 = \dfrac{11}{36} \times 10^2$ m/s
Calculer $\Delta E_{k\,1\text{-}2} = E_{k\,2} - E_{k\,1}$:
$\Delta E_{k\,1\text{-}2} = 0 - \dfrac{1}{2} \times 1\,600 \times \left(\dfrac{11}{36}\right)^2 \times 10^4$ (pour $v_2 = 0$ $\quad E_{k\,2} = 0$)
$\Delta E_{k\,1\text{-}2} \approx -\,746\,913{,}6$ J $\approx -\,747$ kJ

ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN VOLANT



* Si $v_{1S/\mathcal{R}1}$ est nulle par rapport au repère ($\mathcal{R}_1$), E_{k1} et nulle par rapport à ($\mathcal{R}_1$), ce qui ne veut pas dire qu'elle soit nulle par rapport à un autre repère ($\mathcal{R}_2$).

62 ■ 3 Mouvement quelconque

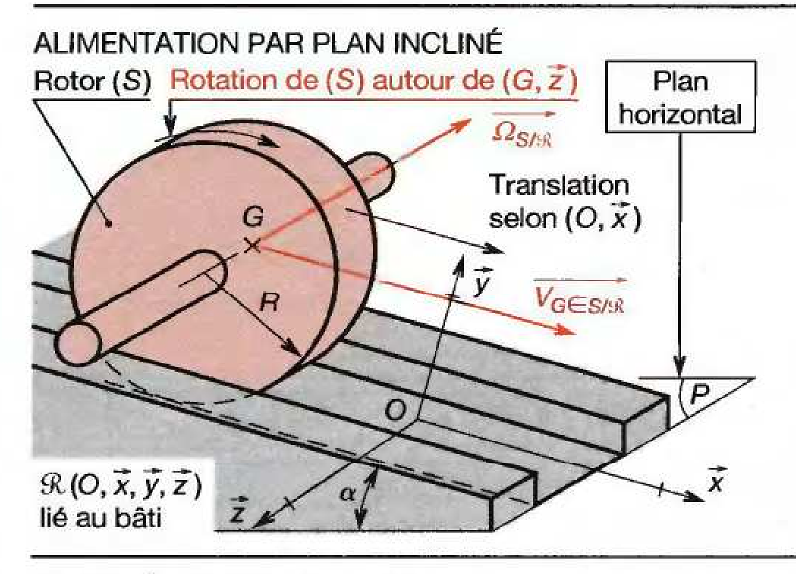
Lorsqu'un solide (*S*) est animé d'un mouvement quelconque, celui-ci est le résultat de la composition de deux mouvements (ex. : alimentation en rotors d'un poste de montage).

■ Celui du centre de gravité *G* de (*S*) dont le vecteur vitesse à l'instant *t* est : $\overrightarrow{V_{G\in S/\mathcal{R}}}$.

■ Celui du solide (*S*) autour d'un axe $(G, \vec{z})$ passant par *G*, dont le vecteur vitesse angulaire est : $\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}$.

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot \|\overrightarrow{V_{G\in S/\mathcal{R}}}\|^2 + \frac{1}{2} J(O, \vec{z}) \, \|\overrightarrow{\Omega_{S/\mathcal{R}}}\|^2$$

L'énergie cinétique, à l'instant *t*, par rapport au référentiel ($\mathcal{R}$) d'un solide tournant autour d'un axe d'orientation fixe passant par son centre de gravité *G* est la somme de l'énergie cinétique due au mouvement de translation de *G* par rapport à ($\mathcal{R}$) et de l'énergie cinétique due au mouvement de rotation autour de cet axe, par rapport au même référentiel ($\mathcal{R}$).



62 ■ 4 Théorème de l'énergie cinétique

Dans un repère galiléen ($\mathcal{R}_g$), la variation d'énergie cinétique d'un système (*S*) isolé, entre l'instant t_1 et l'instant t_2, est égale à la somme des travaux des forces extérieures et intérieures agissant sur (*S*) entre ces deux instants considérés :

$$W(\overrightarrow{Fext/S})_{1\text{-}2} + W(\overrightarrow{Fint/S})_{1\text{-}2} = E_{k2} - E_{k1}$$

$W(\overrightarrow{Fext/S})_{1\text{-}2}$: travail des forces extérieures appliquées sur (*S*) entre t_1 et t_2 (J).

$W(\overrightarrow{F\text{int}/S})_{1\text{-}2}$: travail des forces intérieures à (*S*) entre t_1 et t_2 (J).

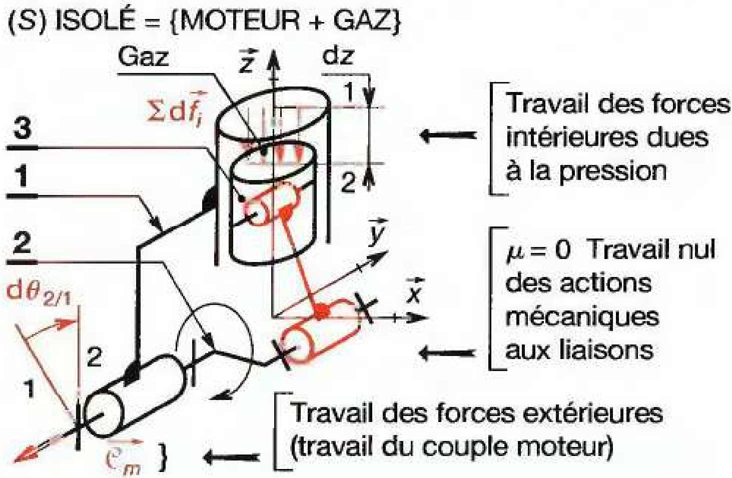
E_{k2} : énergie cinétique de (*S*) à l'instant t_2 (J).

E_{k1} : énergie cinétique de (*S*) à l'instant t_1 (J).

REMARQUES :

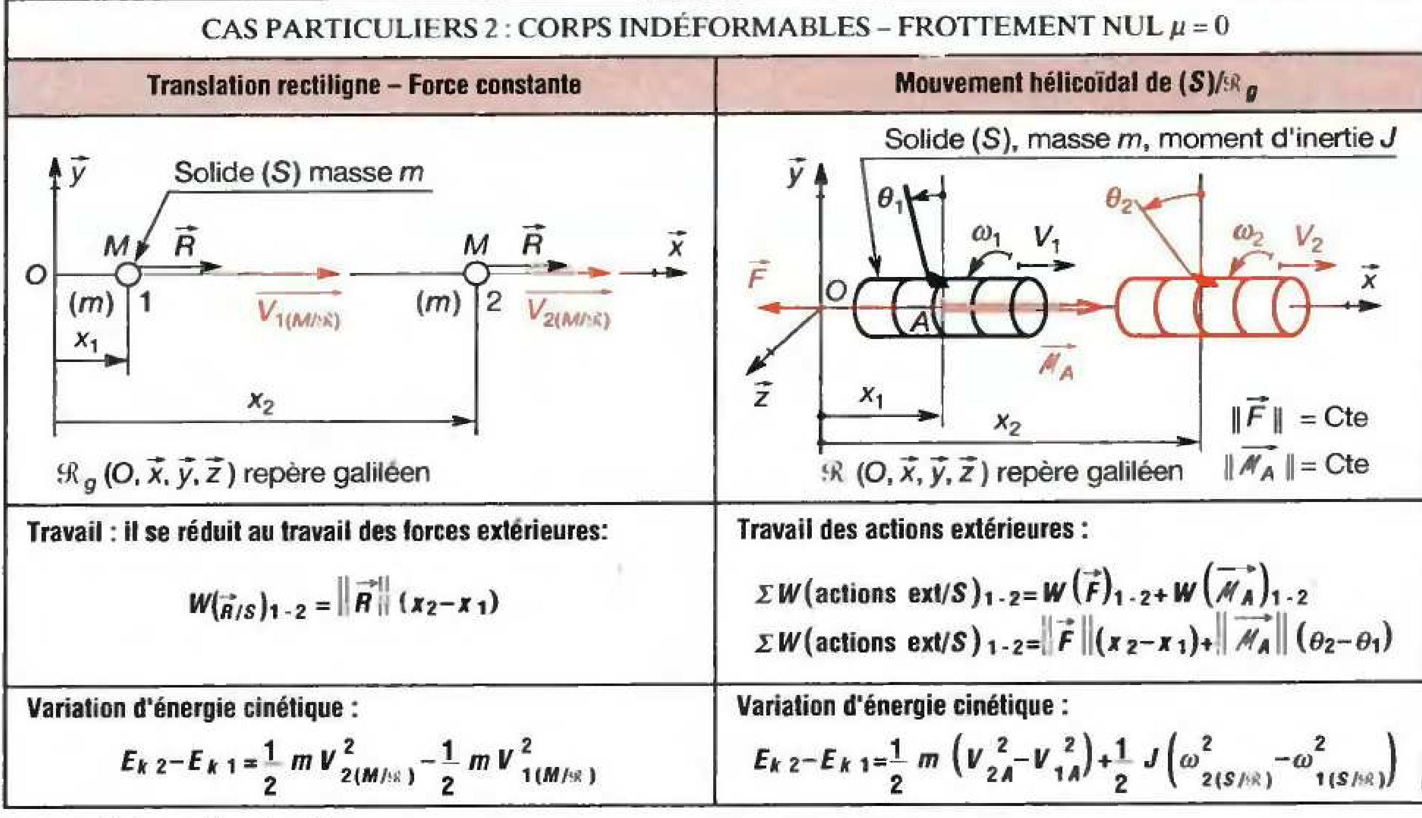
■ **Le travail des forces intérieures à (*S*) n'est pas nul si** les corps sont déformables (cas de la compression - extension d'un gaz, d'un ressort...), et/ou les liaisons sont réelles (frottement non nul : $\mu \neq 0$) *.

■ Le théorème de l'énergie cinétique est **très bien adapté** à l'étude des systèmes aux mouvements « unidimensionnels » (translation ou rotation) car il ne fournit qu'une seule équation scalaire.



CAS PARTICULIERS 1
Corps indéformables. Liaisons parfaites $\mu = 0$ *
$W(\overrightarrow{Fext})_{1\text{-}2} = E_{k2} - E_{k1}$ $\quad W(\overrightarrow{Fint})_{1\text{-}2} = 0$
Corps indéformable en translation $\mu = 0$ *
$W(\overrightarrow{Fext})_{1\text{-}2} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$ **v_2 : vitesse du corps au point 2/($\mathcal{R}_g$)** **v_1 : vitesse du corps au point 1/($\mathcal{R}_g$)**
Système déformable en rotation $\mu = 0$ *
$W(\overrightarrow{Fext})_{1\text{-}2} = J_2 \frac{\omega_2^2}{2} - J_1 \frac{\omega_1^2}{2}$ **$J_2, J_1, \omega_2, \omega_1$: moments d'inertie et vitesses angulaires aux points 2 et 1/($\mathcal{R}_g$)**
Système indéformable en rotation $\mu = 0$ *
$W(\overrightarrow{Fext})_{1\text{-}2} = \frac{J}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$ $J = \text{Cte}$; $W(\overrightarrow{Fint})_{1\text{-}2} = 0$

* $\mu = \tan \varphi = 0$; facteur de frottement nul.



CAS PARTICULIERS 2 : CORPS INDÉFORMABLES – FROTTEMENT NUL $\mu = 0$	
Translation rectiligne – Force constante	**Mouvement hélicoïdal de (S)/$\Re_g$**
Solide (S) masse m ; $\Re_g (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère galiléen	Solide (S), masse m, moment d'inertie J ; $\Re (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère galiléen ; $\lVert \vec{F} \rVert$ = Cte ; $\lVert \vec{M_A} \rVert$ = Cte
Travail : il se réduit au travail des forces extérieures: $W(\vec{R}/S)_{1-2} = \lVert \vec{R} \rVert (x_2 - x_1)$	**Travail des actions extérieures :** $\Sigma W(\text{actions ext}/S)_{1-2} = W(\vec{F})_{1-2} + W(\vec{M_A})_{1-2}$; $\Sigma W(\text{actions ext}/S)_{1-2} = \lVert \vec{F} \rVert (x_2 - x_1) + \lVert \vec{M_A} \rVert (\theta_2 - \theta_1)$
Variation d'énergie cinétique : $E_{k\,2} - E_{k\,1} = \frac{1}{2} m V^2_{2(M/\Re)} - \frac{1}{2} m V^2_{1(M/\Re)}$	**Variation d'énergie cinétique :** $E_{k\,2} - E_{k\,1} = \frac{1}{2} m \left(V^2_{2A} - V^2_{1A}\right) + \frac{1}{2} J \left(\omega^2_{2(S/\Re)} - \omega^2_{1(S/\Re)}\right)$

EXEMPLE 1 (freinage d'un chariot) :

Un chariot **1** de masse $m = 15$ kg roule sur deux rails horizontaux **2**. Il est arrêté par une butée {**3**,**5**} à ressort, fixée sur le bâti **4**. La force F exercée par le ressort **6** sur le piston **5** est proportionnelle à sa flèche x.

$F_{6/5} = -11\,538\,x$ (F en N ; x en m). La course maximale de la butée est $x_{max} = 100$ mm.

Calculer la vitesse maximale du chariot par rapport à ($\Re$) lié au bâti, compatible avec la course de la butée :

HYPOTHÈSES :

- la résistance au roulement en A et B est nulle,
- le facteur de frottement est nul en A et B ($\mu = 0$) et entre le piston **5** et le corps **3** de la butée,
- la résistance de l'air est négligée,
- le moment d'inertie des roues est négligé.

SOLUTION :

1° Isoler le système S = {chariot 1, butée 3}

2° Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre :

1 : début du contact **1** - **3** et 2 : fin de course butée.

- **Calculer les travaux des actions extérieures à (S) de 1 à 2 :**

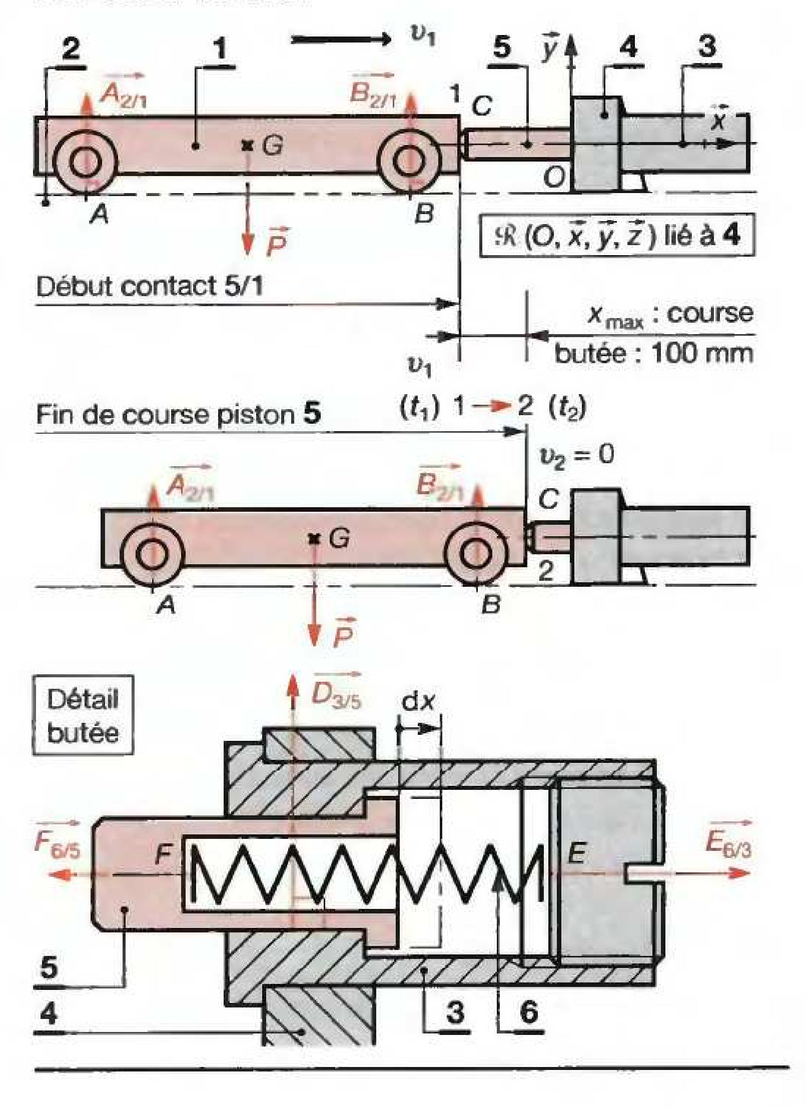
$\vec{P}$, $\vec{A_{2/1}}$, $\vec{B_{2/1}}$, sont verticales ($\mu = 0$) donc perpendiculaires au déplacement $d\vec{x}$. Leur travail est nul.

$$W(\vec{P})_{1-2} + W(\vec{A_{2/1}})_{1-2} + W(\vec{B_{2/1}})_{1-2} = 0$$

- **Calculer les travaux des actions intérieures à (S) de 1 à 2 :**

$\vec{D_{3-4}}$ est verticale ($\mu = 0$) donc perpendiculaire au déplacement $d\vec{x}$: $W(\vec{D_{3/5}})_{1-2} = \vec{D_{3/5}} \cdot d\vec{x} = 0$

DISPOSITIF D'ARRÊT



$\overrightarrow{E_{6/3}}$ ne travaille pas car son point d'application est fixe *.

$\overrightarrow{F_{6/5}}$ est colinéaire au déplacement de son point d'application.

Le travail de la force d'un ressort est : $W\left(\overrightarrow{F_{6/5}}\right) = -\frac{1}{2} F_{6/5max} \cdot f^2_{max}$ **

$W\left(\overrightarrow{F_{6/5}}\right)_{1-2} = -\frac{1}{2} \times 11\,538 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = \mathbf{-57{,}7\ J}$

- **Calculer la variation d'énergie cinétique entre t_1 et t_2 :**

$\Delta E_{k1\text{-}2} = E_{k2} - E_{k1}$; $E_{k2} = 0$ car $v_2 = 0$; $\Delta E_{k1\text{-}2} = 0 - 7{,}5\, v_1^2$

- **Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre 1 et 2 :**

$E_{k2} - E_{k1} = W\left(\overrightarrow{F_{6/5}}\right)_{1-2}$; $0 - 7{,}5\, v_1^2 = -57{,}7$

- **Résoudre l'équation, calculer v_1 :**

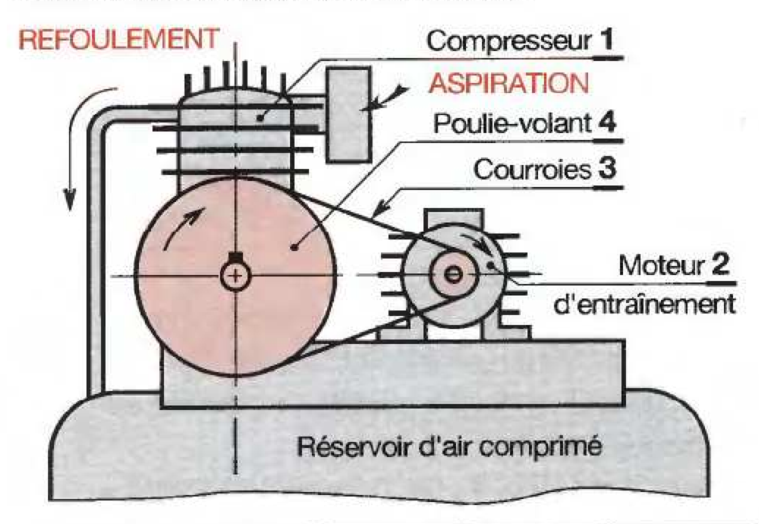
$v_1^2 = 7{,}69$; $v_1 = \sqrt{7{,}69}$; $\mathbf{v_1 = 2{,}77\ m/s}$

MÉTHODE
1° Isoler un système (*S*).
2° Choisir deux points 1 et 2 où sont connues certaines grandeurs (vitesse, forces ...).
3° Calculer l'énergie cinétique en 1 et 2.
4° Faire le bilan des actions mécaniques. Calculer leur travail entre 1 et 2.
5° Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
6° Résoudre et calculer l'inconnue.
7° Si impossibilité, choisir un nouveau couple de points et recommencer le calcul.

EXEMPLE 2 (calcul d'un volant d'inertie) :

Un moteur **2** fournit un travail de 1000 J par tour à un compresseur monocylindrique. Le travail nécessaire à l'aspiration de l'air pendant le demi-tour de 1 à 2 est négligeable alors que le travail fourni par le moteur reste constant. Le compresseur prend donc de la vitesse. Pendant le demi-tour suivant de 2 à 1, le travail nécessaire à la compression de l'air entraîne une chute de vitesse. La poulie-volant **4** joue le rôle de volant d'inertie pour réguler la vitesse de rotation du compresseur.

COMPRESSEUR MONO-CYLINDRIQUE



HYPOTHÈSES :

- les liaisons entre les solides sont sans frottements,
- les masses et les moments d'inerties des solides en mouvement, autres que la poulie-volant, sont négligés.

Calculer le moment d'inertie J_{Oz} de la poulie afin que la vitesse angulaire ω du compresseur reste comprise entre $1{,}5\,\pi$ et $2\,\pi$ rad/s, le couple moteur restant constant.

SOLUTION :

1° Isoler le système S = {1, 4, air dans la chambre}.

2° Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le point 1 (point mort haut) et 2 (point mort bas). (Phase aspiration.)

3° Calculer l'énergie cinétique aux points 1 puis 2 :

En 1 : vitesse min : $\omega = 1{,}5\,\pi$ rad/s ; $E_{k2} = \frac{1}{2}\, J_{Oz} \times (1{,}5\,\pi)^2$.

En 2 : vitesse max : $\omega = 2\,\pi$ rad/s ; $E_{k2} = \frac{1}{2}\, J_{Oz} \times (2\,\pi)^2$.

4° Calculer les travaux des forces extérieures et intérieures :

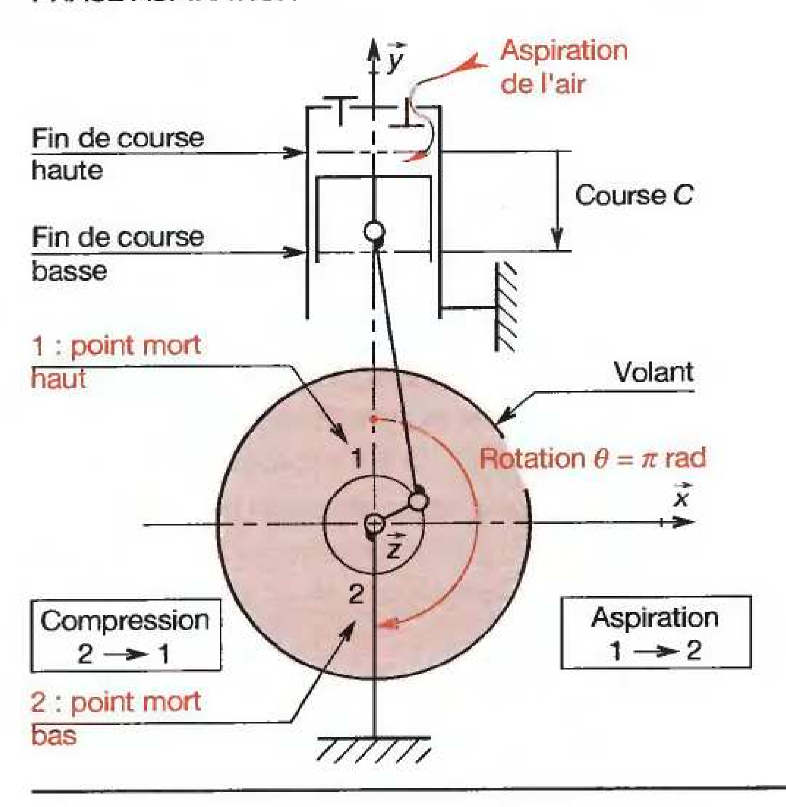
Les forces intérieures aux liaisons ne travaillent pas (frottement nul), le travail d'aspiration de l'air est nul. Le travail du couple moteur, supposé constant, de 1 à 2 est :

$W\left(\overrightarrow{C_m}\right)_{1-2} = \frac{1\,000}{2}$; $W\left(\overrightarrow{C_m}\right)_{1-2} = 500$ J

5° Écrire le théorème de l'énergie cinétique :

$\frac{1}{2} \cdot J_{Oz}[(2\,\pi)^2 - (1{,}5\,\pi)^2] = 500$; $J_{Oz} \approx 57{,}9$ kg . m³

PHASE ASPIRATION



* Il en est de même pour les autres forces de liaison dont le point d'aplication est fixe. ** Voir § 58.73.

63 Conservation de l'énergie

63.1 Notion de système isolé

Un système (S) est dit isolé lorsqu'il n'échange aucune énergie (mécanique, calorifique, chimique…) avec le milieu extérieur.

- Dans le cas, par exemple, de la chute d'un corps sous l'effet de l'attraction terrestre, le système isolé est constitué **du corps (*C*)**. La perte d'énergie potentielle de (C) n'est pas échangée avec l'extérieur mais convertie en énergie cinétique de (C) (en négligeant la résistance de l'air).
- Le système isolé ne peut comporter de contacts avec frottement. Ces forces absorbent de l'énergie, pour l'essentiel convertie en chaleur, cédée à l'extérieur.

63.2 Principe de la conservation de l'énergie mécanique

Pour un système isolé (S), dans lequel toutes les forces dépendent d'une énergie potentielle* et les actions de contact ne travaillent pas, l'énergie mécanique totale E_m est constante entre deux instants t_1 et t_2 (voir fig. 2). L'énergie mécanique étant la somme de l'énergie potentielle E_p et de l'énergie cinétique E_k, on peut écrire :

$$E_m = E_p + E_k = Cte$$

L'énergie potentielle ayant trois formes, on peut écrire :

$$E_m = E_k + E_{p\,(pes)} + E_{p\,(élas)} + E_{p\,(press)} = Cte$$

$E_{p(pes)}$: énergie potentielle de pesanteur (J).
$E_{p(élas)}$: énergie potentielle d'élasticité (J).
$E_{p(press)}$: énergie potentielle de pression (J).

REMARQUES :

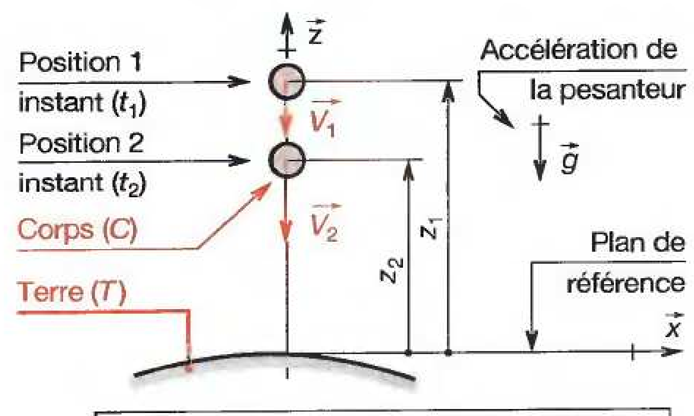
- L'énergie mécanique étant constante, elle est en général déterminée par les conditions initiales du mouvement (fig. 3).
- S'il existe d'autres forces $\vec{F_i}$ ne dépendant pas d'une énergie potentielle, on peut écrire que la variation Δ d'énergie mécanique entre t_1 et t_2 est égale au travail de ces forces $\vec{F_i}$ entre 1 et 2 (Δ est négatif si le système perd de l'énergie.)

$$\Delta(E_c + E_p)_{1\text{-}2} = W(\vec{F_i})_{1\text{-}2}$$

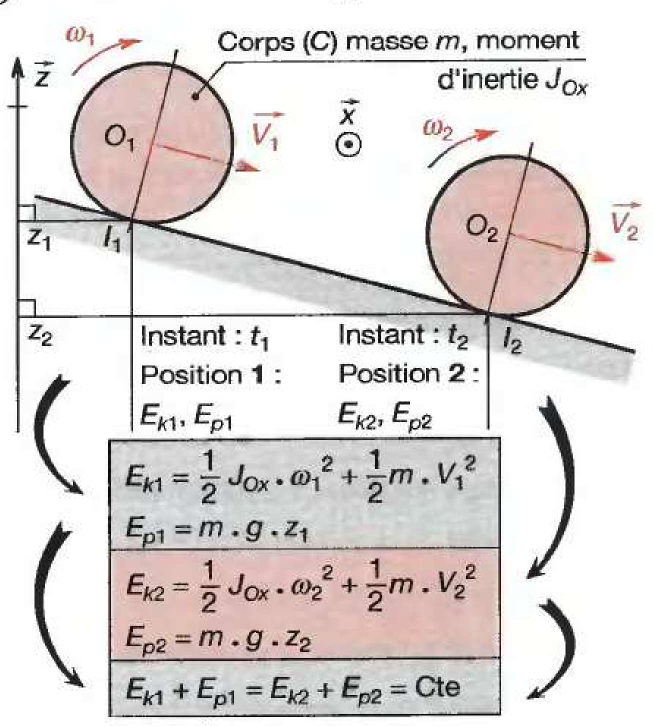
C'est le cas d'un corps soumis à la force de frottement de l'air : l'énergie mécanique diminue car $W(\vec{F_i}) < 0$.**

* On appelle ces forces : forces conservatives. ** Il s'agit d'un travail résistant.

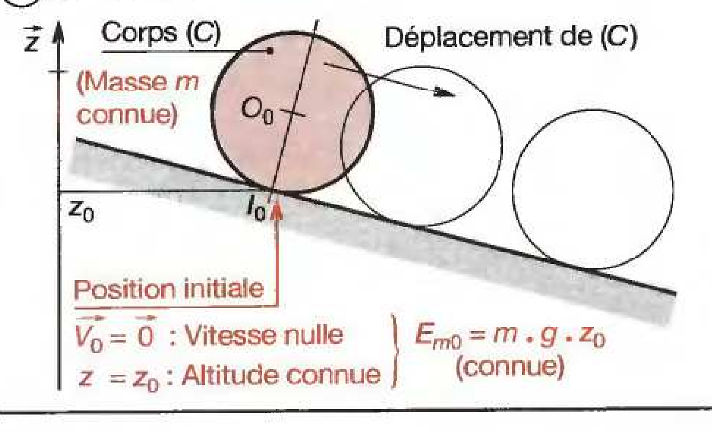
SYSTÈME ISOLÉ $S = \{C\}$



Lorsque C passe de 1 à 2 :
- $\vec{V_2} > \vec{V_1}$: l'énergie cinétique augmente
- $z_2 < z_1$: l'énergie potentielle diminue







EXEMPLE DE CALCUL :

Soit un pendule simple composé d'un fil de longueur ℓ et d'une particule M de masse m liée à l'extrémité du fil, l'autre extrémité étant liée au support fixe en A. On écarte le pendule d'un angle par rapport à la verticale. On appelle M_0, d'altitude z_0, la position initiale écartée de α, et M_1, d'altitude z_1, la position de M à la verticale de A. On abandonne M en M_0 sans vitesse initiale. Calculer la vitesse $\| \overrightarrow{V(M/\mathcal{R}_g)} \|$ au passage de M en M_1. ($\mathcal{R}_g$ est un repère galiléen lié à la terre.)

HYPOTHÈSES:

- la masse du fil est négligeable,
- le fil est inextensible et parfaitement flexible*,
- la masse M est ponctuelle, la résistance de l'air est négligée.

SOLUTION :

Isoler le système (S) constitué par la masse ponctuelle (M) :

1° Recenser les actions mécaniques s'exerçant sur (M)

- **Une force conservative** découlant de l'énergie potentielle de pesanteur : le poids $\vec{P}$ de M.
- **Une force non conservative** développant un travail nul : tension $\vec{T}$ du fil est constamment perpendiculaire au déplacement $d\vec{\ell}$, (dirigée selon la droite AM, $\overrightarrow{AM} \perp d\vec{\ell}$). (Résistance de l'air négligée.)

2° Calculer l'énergie mécanique à la position initiale 0

L'énergie cinétique est : $E_{k0} = 0$ car $\overrightarrow{V(M0/\mathcal{R}_g)} = \vec{0}$.

L'énergie potentielle est : $E_{p0} = m \cdot g \cdot z_0$; $E_{m0} = m \cdot g \cdot z_0$.

3° Calculer l'énergie mécanique à la position verticale 1

L'énergie cinétique est : $E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \| \overrightarrow{V(M1/\mathcal{R}_g)} \|^2$.

L'énergie potentielle est : $E_{p1} = m \cdot g \cdot z_1$.

d'où : $E_m = \frac{1}{2} m \| \overrightarrow{V(M1/\mathcal{R}_g)} \|^2 + m \cdot g \cdot z_1 = E_{k1} + E_{p1}$.

4° Écrire le principe de la conservation de l'énergie entre les 2 instants t_0 et t_1

$$0 + m \cdot g \cdot z_0 = \frac{1}{2} m \| \overrightarrow{V(M1/\mathcal{R}_g)} \|^2 + m \cdot g \cdot z_1$$

$$\| \overrightarrow{V(M1/\mathcal{R}_g)} \|^2 = 2 \cdot g \cdot (z_0 - z_1)$$

Dans le triangle AHM_0, on peut écrire : $\cos \alpha = \frac{AH}{AM_0}$

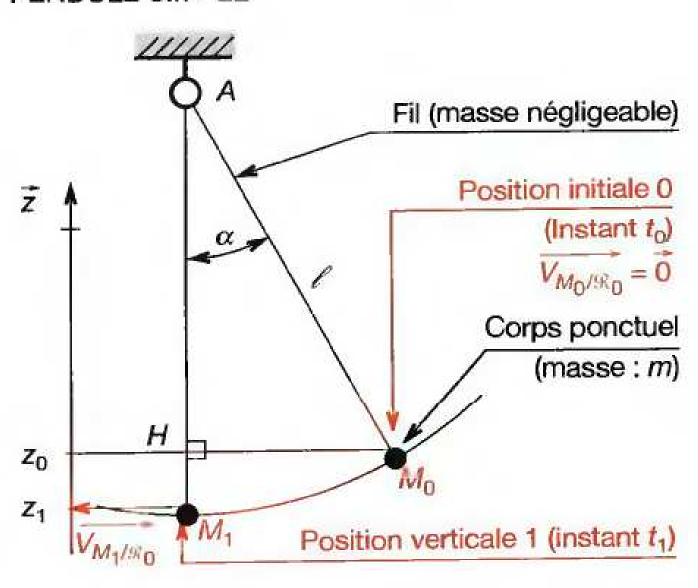
d'où : $AH = \ell \cdot \cos \alpha$

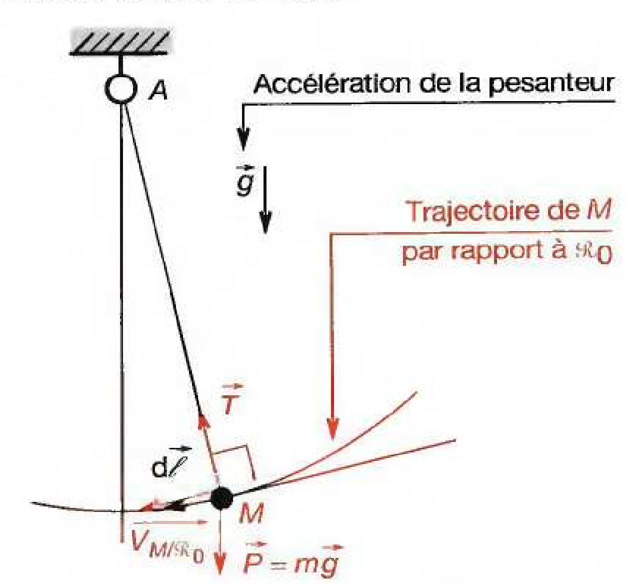
et : $z_0 - z_1 = \ell - \ell \cos \alpha = \ell (1 - \cos \alpha)$

La vitesse $\| \overrightarrow{V(M1/\mathcal{R}_g)} \|$ s'écrit :

$$\| \overrightarrow{V(M1/\mathcal{R}_g)} \| = \sqrt{2 g \ell (1 - \cos \alpha)}$$

* Voir chapitre 1.





MÉTHODE DE RÉSOLUTION
1° Isoler un système (S).
2° Faire le bilan des forces découlant de l'énergie potentielle agissant sur (S).
3° Vérifier que les autres forces (forces aux liaisons, résistance de l'air ...) ne travaillent pas.
4° Calculer l'énergie mécanique à la position initiale 0 : $E_{p0} + E_{k0} = E_{m0}$
5° Calculer l'énergie mécanique à la position 1 : $E_{p1} + E_{k1} = E_{m1}$
6° Écrire le théorème de la conservation de l'énergie entre 1 et 2 : $E_{m0} = E_{m1}$
7° Résoudre, calculer l'inconnue.

64 Hydrostatique

64.1 Fluide incompressible

Un fluide incompressible est un milieu matériel continu, déformable, sans forme propre, capable de s'écouler ou d'occuper la forme du récipient qui le contient et dont les variations de volume sous de fortes variations de pression, restent négligeables.

On classe, dans cette catégorie, les liquides : eau, huile, etc.

REMARQUES :

- La masse volumique d'un fluide incompressible reste constante.

Masse volumique : ρ (kg/m ^{3}) constante

- $\frac{\Delta V}{V} = -\chi_\theta \cdot \Delta p$

V : volume initial (m^3) ; ΔV = variation du volume (m^3).
χ_θ : coefficient de compressibilité (m^2/N).
Δp : variation de pression (Pa).

64.2 Pression statique en un point

La pression p en un point se calcule par la relation :

F répartie uniformément	F répartie non uniformément
$p = F/S$	$p = \mathrm{d}F/\mathrm{d}S$

p : pression (Pa ou N/m^2).
dF : force élémentaire de F (N), normale à la surface.
dS : surface élémentaire de S (m^2).

PROPRIÉTÉ :

La pression est identique dans toutes les directions autour du point.

REMARQUE :

Autres unités de pression :

- Le bar (bar) :

1 bar = 10^5 Pa = 0,1 N/mm^2

- Hauteur d'eau ou hauteur de mercure (m). Voir § 64.34.

COEFFICIENT DE COMPRESSIBILITÉ χ_θ DES LIQUIDES	Eau	Mercure
χ_θ (m^2/N)	5×10^{-10}	$3{,}9 \times 10^{-11}$

EXEMPLE :

Soit à déterminer la diminution de volume de 1 litre d'eau sous 20 bars.

On a : $$\frac{\Delta V}{V} = -\chi_\theta \cdot \Delta p$$

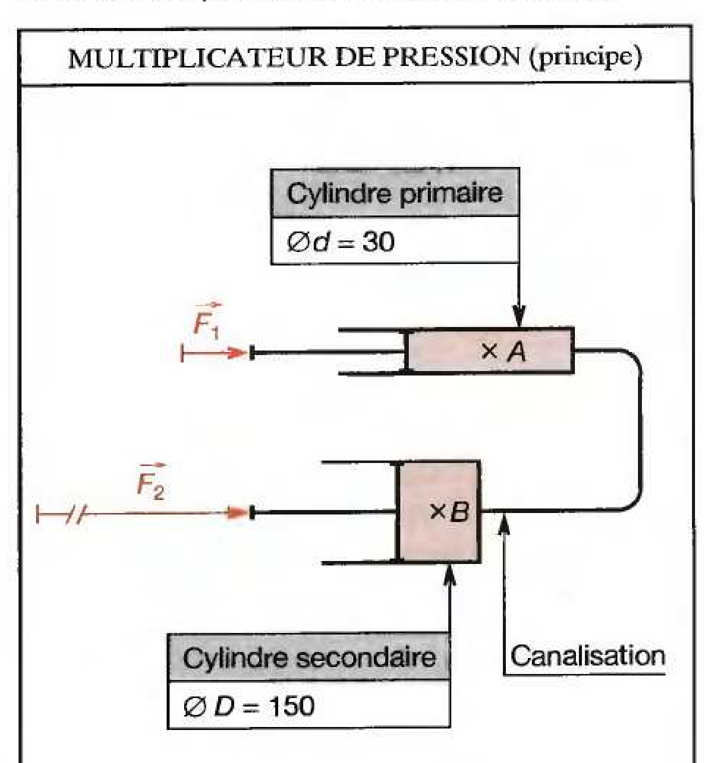
$$\frac{\Delta V}{V} = -5 \times 10^{-10} \times 20 \times 10^5 = \frac{-1}{1000}$$

Pour V = 1 litre = 1000 cm^3

$$\Delta V = -1 \text{ cm}^3$$

Dans la plupart des calculs, on néglige cette variation de volume et l'on considère que l'eau est incompressible.
Il en est de même pour les huiles et l'ensemble des liquides.

MULTIPLICATEUR DE PRESSION (principe)



On exerce une force F_1 sur le piston du cylindre primaire ; il en résulte une force F_2 sur le piston du secondaire.

$$p_A = \frac{F_1}{S_1} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d_1^2} \qquad p_B = \frac{F_2}{S_2} = \frac{4 \cdot F_2}{\pi \cdot d_2^2}$$

$$p_A = p_B \quad (\text{§ } 64.31) \Rightarrow F_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot F_1 = 25\, F_1$$

64▪3 Équation fondamentale de l'hydrostatique

64▪31 Énoncé

La différence de pression entre deux points d'un liquide en équilibre est égale au poids d'une colonne de ce liquide, de section unité, ayant pour hauteur la différence de profondeur séparant ces deux points.

$p_A - p_B = \rho . g .(h_A - h_B)$	$\Delta p = \rho . g . \Delta h$

p_A, p_B, Δp en pascals (Pa).
ρ : masse volumique du liquide (kg/m^3).
g : accélération de la pesanteur (9,81 m/s^2).
h_A, h_B, Δh : différence de hauteur (m).

REMARQUE :

Si p_B est une pression ambiante p_{amb} et p_A, une pression mesurée, on pose :

- p_A = pression absolue en A,
- $\Delta p = p_A - p_{amb} = p_{eff}$: pression effective.

64▪32 Applications immédiates

EXEMPLE 1 :

On trouvera ci-contre le calcul des **pressions statiques** dans une canalisation.

Généralement, dans les circuits hydrauliques des machines, les **faibles variations de hauteur, engendrent des variations de pressions souvent négligeables.**

EXEMPLE 2 :

La surface libre d'un liquide au repos est toujours plane et horizontale.

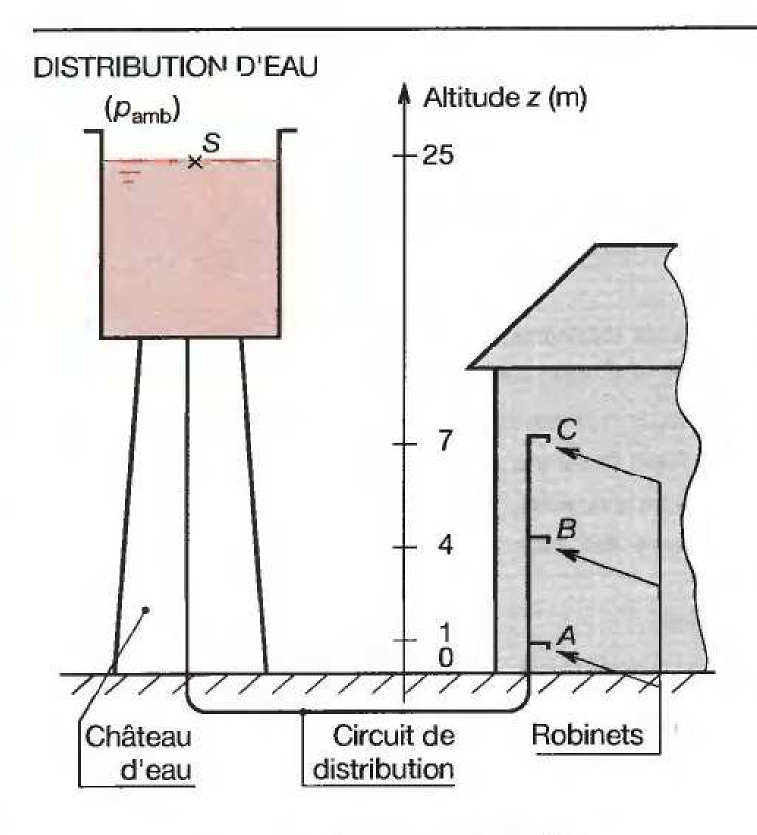
La pression est constante dans tout plan horizontal situé à l'intérieur du liquide (surface isobare).

(Appliquer l'équation fondamentale entre deux points de la surface horizontale.)

EXEMPLE 3 :

La surface de séparation de deux liquides non miscibles au repos est plane et horizontale.

(Les masses volumiques ρ différentes imposent $\Delta h = 0$ entre deux points de la surface de séparation.)



$$\Delta p = p - p_{amb} = \rho . g . \Delta h$$

avec ρ (eau) = 1 kg/ dm^3 = 10^3 kg/m^3 ; g = 9,81 m/s^2

D'où :

$p_A - p_{amb} = 10^3 \times 9{,}81 \times (25-1) = 2{,}35 \times 10^5 \text{Pa} = 2{,}35$ bar

$p_B - p_{amb} = 10^3 \times 9{,}81 \times (25-4) = 2{,}06 \times 10^5 \text{Pa} = 2{,}06$ bar

$p_C - p_{amb} = 10^3 \times 9{,}81 \times (25-7) = 1{,}77 \times 10^5 \text{Pa} = 1{,}77$ bar

REMARQUE :

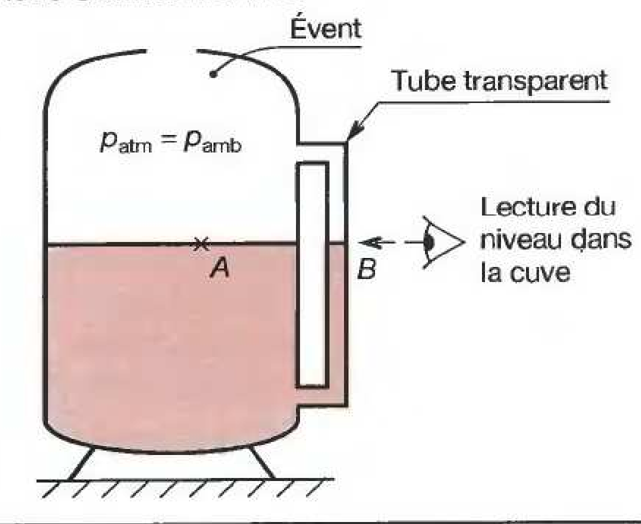
Entre A et B, $\Delta z = 3$ m
et $p_A - p_B = 10^3 \times 9{,}81 \times (3) = 2{,}94 \times 10^5$ Pa = 0,29 bar
(négligeable)

SURFACE DE NIVEAU	LIQUIDES NON MISCIBLES
A, B — Surfaces isobares	Liquide 1, Liquide 2, A, B, h, ? — Surface de séparation
$\left.\begin{array}{l} p_A - p_B = 0 \\ \rho \neq 0 ;\ g \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta h = 0$	$p_B - p_A = \rho_1 . g . h$ $p_B - p_A = \rho_2 . g . h$ $\rho_1 \neq \rho_2 \Rightarrow h = 0$

64 ■ 33 Vases communicants

On utilise le principe des vases communicants pour repérer, grâce à un tube transparent relié à une cuve, la hauteur de liquide contenu dans cette cuve. En effet, dans un même liquide, les surfaces soumises à la même pression, sont dans le même plan horizontal (§ 64.32).

VASES COMMUNICANTS



64 ■ 34 Évaluation d'une pression en hauteur de liquide

■ Considérons un réservoir fermé contenant un liquide. Celui-ci est soumis sur sa surface libre à une pression ambiante p_{amb}. Relions ce réservoir à un tube dont l'autre extrémité est à l'air libre.

La hauteur de liquide au dessus de la surface libre, dans le tube, permet d'évaluer la pression qui règne dans le volume libre du réservoir.

$$p_{amb} - p_{atm} = \rho \cdot g \cdot h$$

On pose :

$$p_{amb} - p_{atm} = p_e \text{ : pression effective}$$

EXEMPLE :

La cuve contient du vin (densité 0,99) et on relève $h = 0{,}6$ m.

$$p_{amb} - p_{atm} = p_e = \rho \cdot g \cdot h$$

avec $\rho = 990$ kg/m³, $g = 9{,}81$ m/s², $h = 0{,}60$ m

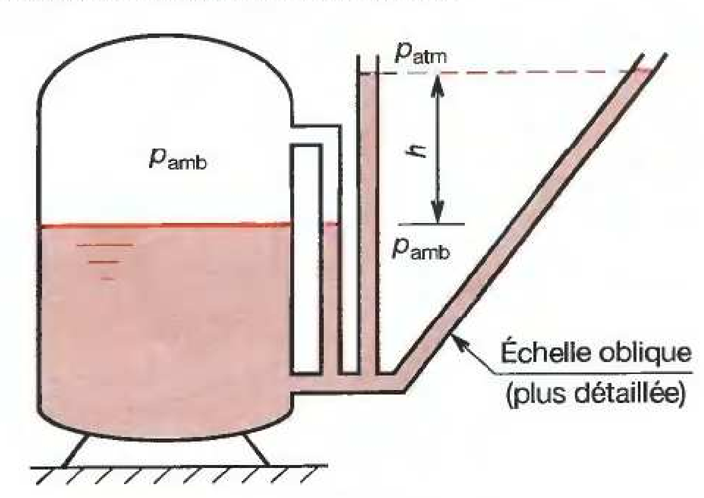
Soit, une pression effective :

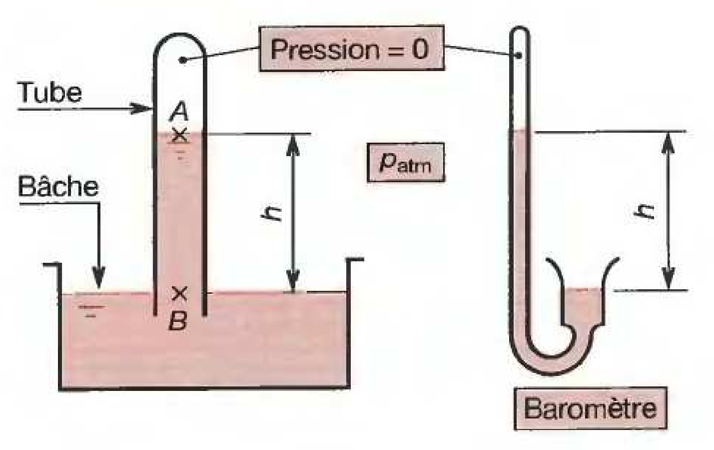
$$p_e \approx 5\,830 \text{ Pa} \quad \text{soit} \quad 0{,}058 \text{ bar}$$

■ Retournons un tube plein de liquide sur sa bâche. Le liquide descend dans le tube en créant un vide absolu et se stabilise à la hauteur h. Entre A et B, on peut écrire :

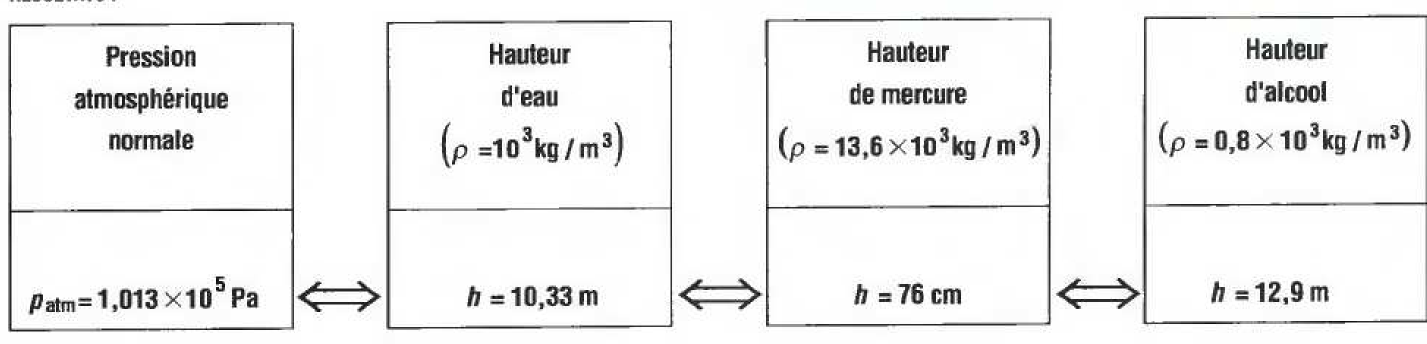
$$p_B - 0 = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{p_B}{\rho \cdot g} = \frac{p_{atm}}{\rho \cdot g}$$

PRESSION EN HAUTEUR DE LIQUIDE





RÉSULTATS :



Pression atmosphérique normale		Hauteur d'eau ($\rho = 10^3$ kg/m³)		Hauteur de mercure ($\rho = 13{,}6 \times 10^3$ kg/m³)		Hauteur d'alcool ($\rho = 0{,}8 \times 10^3$ kg/m³)
$p_{atm} = 1{,}013 \times 10^5$ Pa	⟺	$h = 10{,}33$ m	⟺	$h = 76$ cm	⟺	$h = 12{,}9$ m

64■4 Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible au repos, toute variation de pression en un point A engendre la même variation de pression en tous points B du fluide.

APPLICATION :

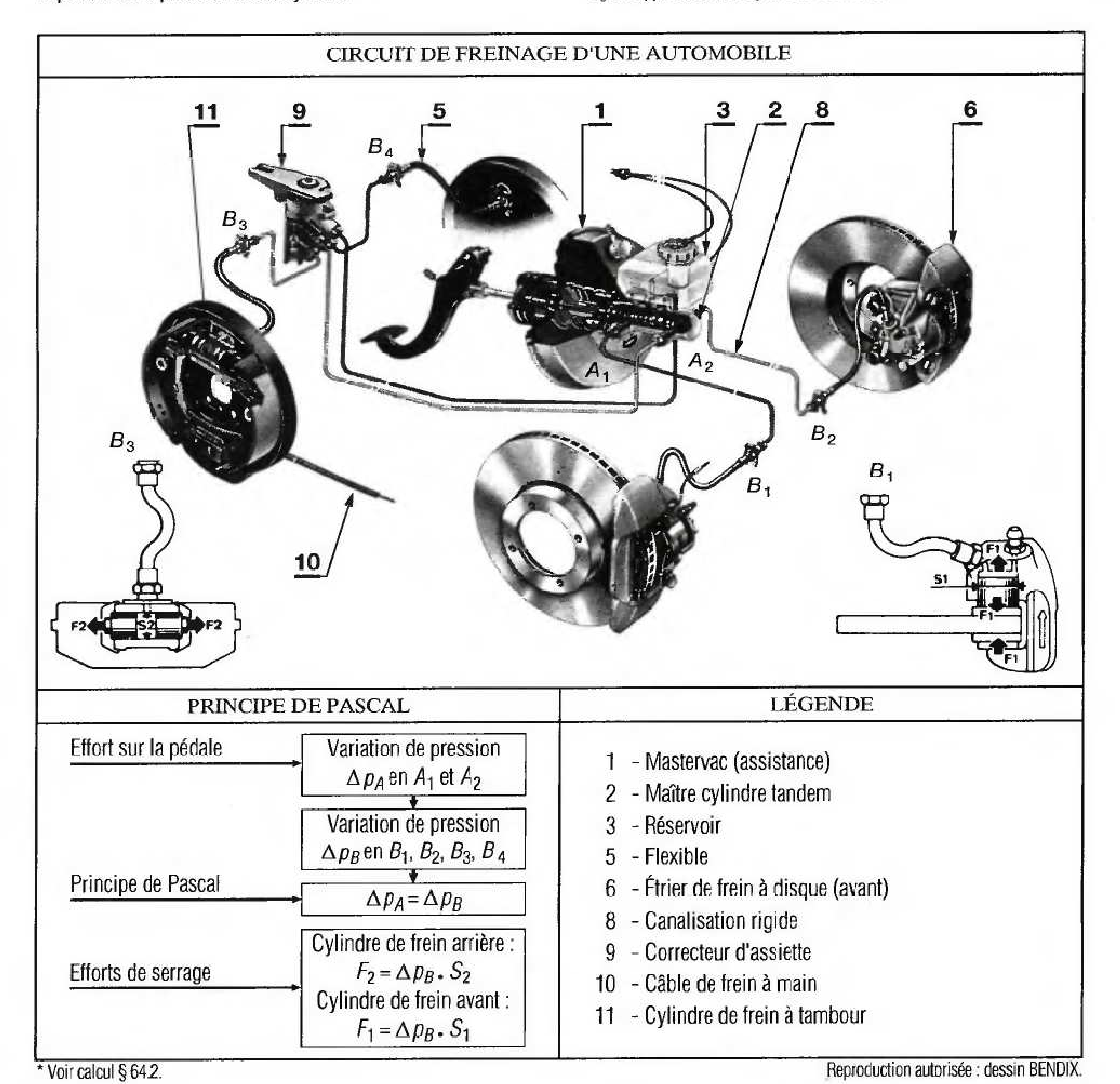
Soit le système constitué par le maître cylindre et les cylindres de frein d'un véhicule automobile. Des canalisations les relient et un réservoir assure un remplissage exempt de poches d'air.

■ Le principe Mastervac permet d'obtenir un freinage assisté : un effort modéré sur la pédale de frein se traduit par un effort plus important sur le piston du maître cylindre.

■ Le maître cylindre tandem permet de séparer le système de freinage en deux circuits indépendants (obligatoire en France depuis juillet 1976). En cas d'incident sur l'un des circuits, l'autre reste actif.

■ L'application d'un effort supplémentaire ΔF sur la pédale de frein engendre une augmentation Δp_A de la pression aux sorties A_1 et A_2.

■ Il en résulte des variations de pression Δp_B aux points B_1, B_2, B_3 et B_4 proches des cylindres de freins.*



PRINCIPE DE PASCAL

Effort sur la pédale → Variation de pression Δp_A en A_1 et A_2

↓ Variation de pression Δp_B en B_1, B_2, B_3, B_4

Principe de Pascal → $\Delta p_A = \Delta p_B$

Efforts de serrage → Cylindre de frein arrière : $F_2 = \Delta p_B \cdot S_2$; Cylindre de frein avant : $F_1 = \Delta p_B \cdot S_1$

LÉGENDE

1 - Mastervac (assistance)
2 - Maître cylindre tandem
3 - Réservoir
5 - Flexible
6 - Étrier de frein à disque (avant)
8 - Canalisation rigide
9 - Correcteur d'assiette
10 - Câble de frein à main
11 - Cylindre de frein à tambour

* Voir calcul § 64.2.

64.5 Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un liquide reçoit de ce liquide une poussée hydrostatique de bas en haut, égale au poids du volume de liquide déplacé.

Cette poussée ne dépend donc pas de la nature de (S).

$$\|\vec{F_\ell}\| = \rho \cdot g \cdot V$$

ρ : masse volumique du liquide (kg/m^3).
g : accélération de la pesanteur (m/s^2).
V : volume du liquide déplacé (m^3).

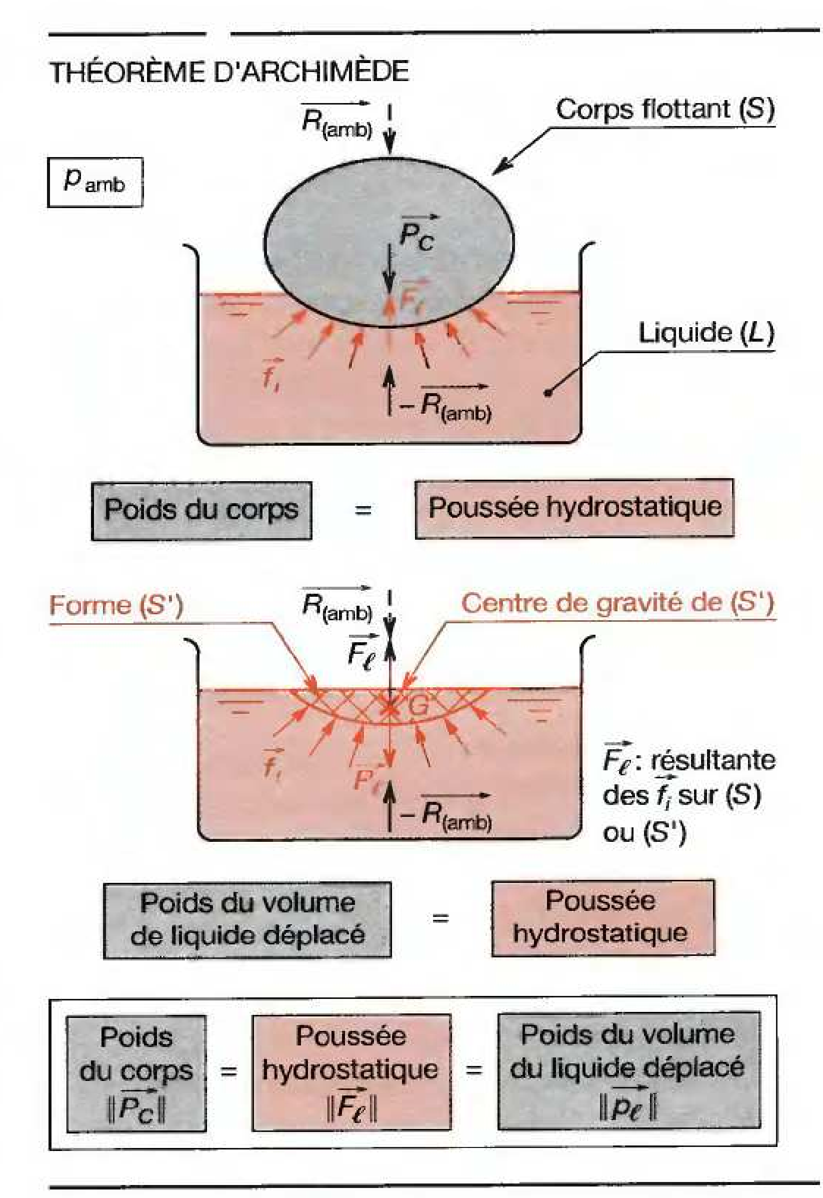
APPLICATION :

Soit un corps (S_1) de poids $\vec{P_C}$ flottant sur un liquide (L).
Il reçoit de ce liquide, des forces $\vec{f_i}$. Ces mêmes forces $\vec{f_i}$ agissent sur la forme (S') de liquide qui occuperait la place de (S) en son absence.

ÉQUILIBRE DE (S') :

Cette portion de liquide est soumise à :

- son poids $\left\{ \begin{matrix} \vec{P_\ell} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ (G = centre de gravité de (S')),
- l'action du reste du liquide : forces $\vec{f_i}$ perpendiculaires aux surfaces. Étant en équilibre « sous deux forces », la forme (S') reçoit donc du reste du liquide, une action mécanique égale et opposée à son poids.





64.51 Densimètre (ou aréomètre)

$$\text{Densité} = \frac{\text{Masse du corps de densité inconnue}}{\text{Masse du même volume d'eau pure à 4°}}$$

REMARQUE :

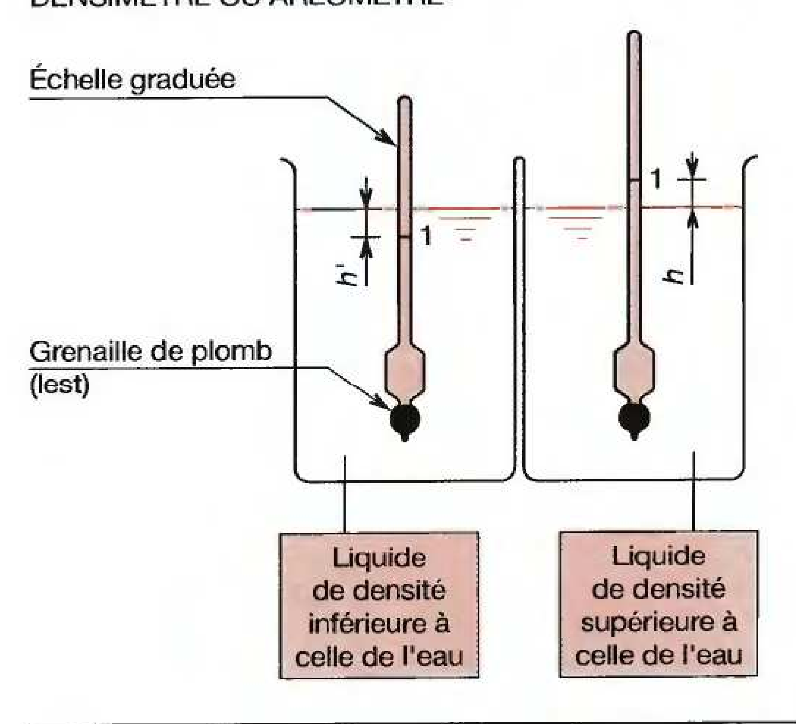
La masse volumique de l'eau pure à 4 °C valant $\rho_{eau} = 1$ kg/dm^3, on peut aussi noter :

$$\text{Densité} = \frac{\text{Masse volumique du corps (kg/m}^3\text{)}}{1\ \text{kg/m}^3}$$

La densité est un nombre sans dimension ; elle s'exprime donc sans unité.

REMARQUE :

La mesure de la densité d'un liquide peut s'effectuer à l'aide d'un densimètre (ou aréomètre). Cet instrument est un flotteur lesté dont la tige graduée s'enfonce plus ou moins selon la densité du liquide dans lequel il est plongé.



64.52 Flotteur de mécanisme

ANALYSE :

Pour la chasse d'eau considérée, le système de fermeture d'arrivée d'eau au réservoir est réalisé pour l'essentiel d'un flotteur **2** en polystyrène expansé, vissé sur un tube de liaison **3** en PVC. Ce tube coulisse, grâce à un jeu radial conséquent (3 mm), le long du corps **1** en entraînant le levier **4** de fermeture de l'orifice de mise à la pression atmosphérique.
En réglant la position du flotteur **2**, sur le tube **3**, on agit sur la hauteur d'eau maximale dans le réservoir.

APPLICATION :

Données et hypothèses :

Le tube **3** peut être modélisé par un cylindre :
$\varnothing\, d = 30$ mm ; $\varnothing\, D = 50$ mm ; $H = 200$ mm.
Le flotteur **2** correspond à un cylindre :
$\varnothing\, d' = 50$ mm ; $\varnothing\, D' = 70$ mm ; $H' = 50$ mm.
L'ensemble a une masse de 120 grammes.
En vissant le flotteur de façon à ce que sa face supérieure affleure celle du cylindre **3**, on constate que l'eau dans le réservoir s'arrête à mi-hauteur de ce polystyrène lorsque cesse le remplissage.

Calculer l'action du flotteur sur l'axe du levier **4**.

Solution :

Il suffit d'appliquer le théorème d'Archimède lorsque cesse le remplissage.

Volume d'eau déplacé :

$$V = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot \left(H - \frac{H'}{2}\right) + \frac{\pi}{4}(D'^2 - d'^2) \cdot \frac{H'}{2}$$

En remplaçant par les valeurs respectives, on trouve :

$$V \approx 2{,}67 \times 10^5\ \text{mm}^3 \quad \text{soit} \quad V \approx 0{,}267\ \text{dm}^3.$$

Le poids du volume d'eau déplacé est donc :

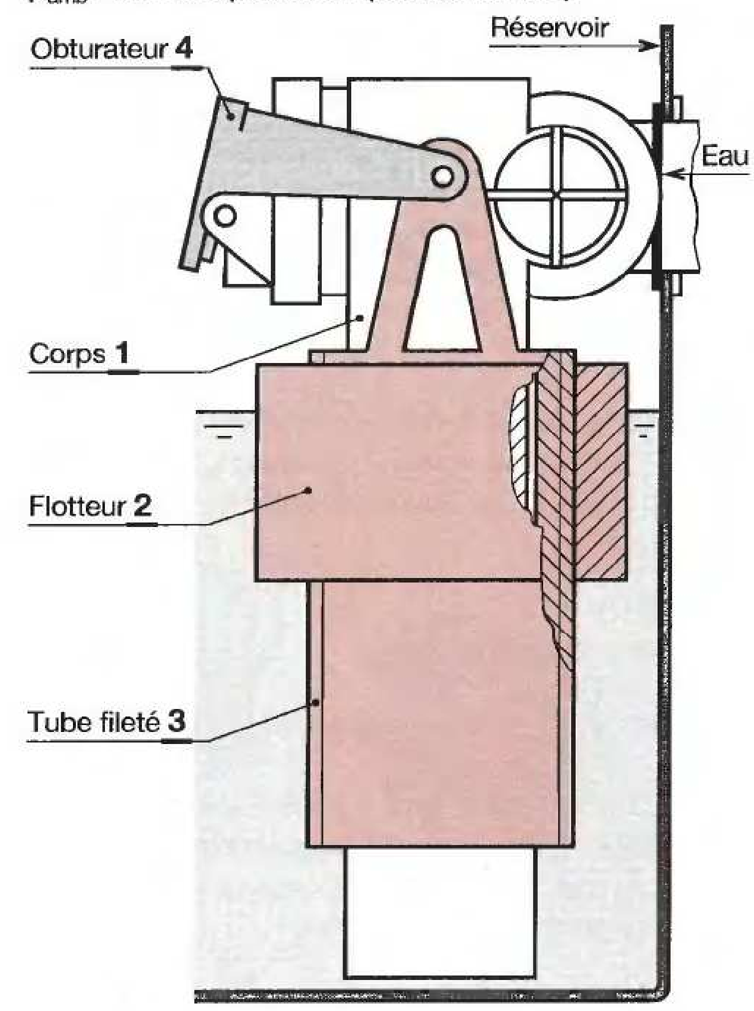
$P = M \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$ avec $\rho = 1$ kg/dm^3 et $g = 9{,}81$ m/s^2.

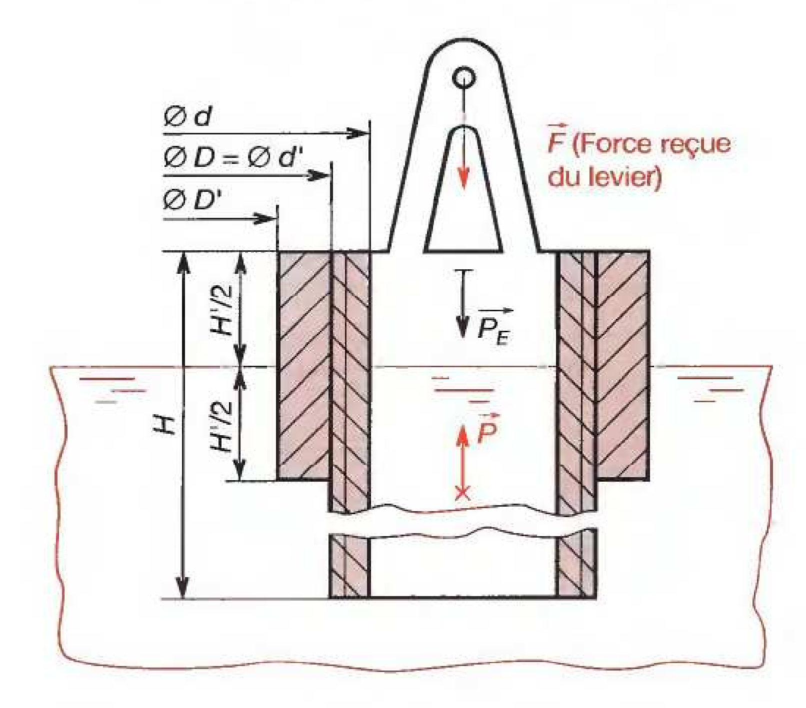
D'où l'effort exercé sur le levier **4** :

$$F = P - P_E = 2{,}62 - 1{,}2 \quad \text{soit} \quad \mathbf{F \approx 1{,}4\ N.}$$

FLOTTEUR DE MÉCANISME DE CHASSE D'EAU SANITAIRE

p_{amb} : voir nota précédent (résultante nulle)





P_E : poids de l'ensemble flotteur ($P_E = m \cdot g$)

65 Cinématique des fluides incompressibles

65 ■ 1 Description d'un écoulement

En injectant dans le fluide des produits colorés de densités voisines, on peut visualiser les mouvements des particules élémentaires.

■ **Trajectoire :**
Courbe décrite par une particule au cours du temps. Le vecteur-vitesse est tangent à cette trajectoire.

■ **Ligne de courant :**
Courbe tangente aux vecteurs-vitesses des particules de fluide. Elle donne une image des directions des vecteurs-vitesses à un instant donné.

■ **Écoulement permanent :**
Les particules situées sur une trajectoire particulière, continuent de décrire cette trajectoire au cours du temps. Elles passent toutes à la même vitesse en un point particulier. Les trajectoires se confondent alors avec les lignes de courant.

■ **Écoulement perturbé :**
Les particules changent de trajectoire au cours du temps. La vitesse de passage en un point varie. Les trajectoires se distinguent alors des lignes de courant.

■ **Écoulement laminaire :**
Les particules suivent des trajectoires sensiblement parallèles aux parois de la canalisation. Le nombre de Reynolds (§ 65.3) permet de mettre cet écoulement en évidence.

■ **Écoulement turbulent :**
Les particules suivent des trajectoires erratiques par rapport aux parois : on dit qu'il existe des turbulences. Le nombre de Reynolds (§ 65.3) le met en évidence.

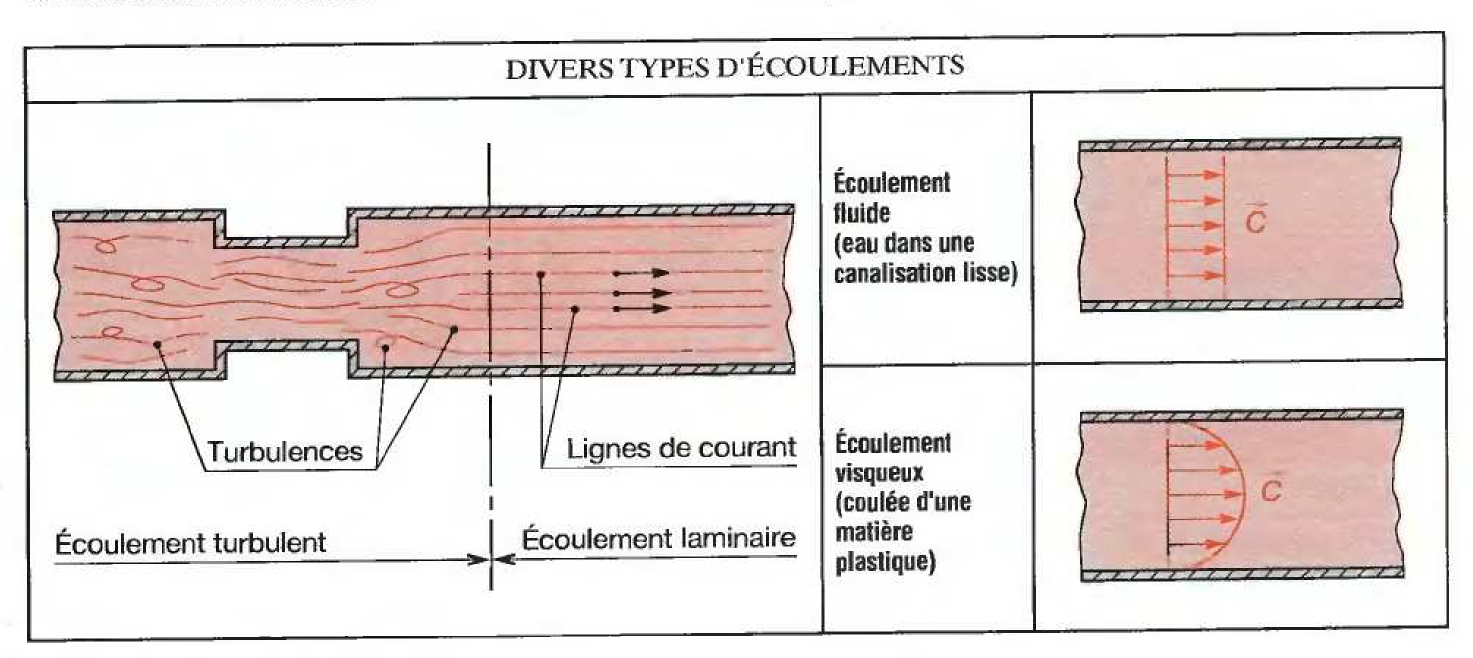
■ **Écoulement intermittent :**
Il cesse et reprend de temps à autre.

■ **Écoulement fluide :**
Le frottement est négligeable entre :
- les particules,
- particules et parois.

Dans une section droite de la canalisation, toutes les particules ont une même vitesse (ou célérité C en m/s).

■ **Écoulement visqueux :**
Le frottement ne peut être négligé entre :
- les particules,
- particules et parois.

Dans une section droite de la canalisation, la vitesse des particules n'est plus uniforme.



65 ▪ 2 Viscosité

65 ▪ 21 Viscosité dynamique μ

L'expérience de Couette permet de la déterminer :

- Entre deux cylindres coaxiaux de rayons voisins, on place un fluide et l'on entraîne le cylindre extérieur en rotation.
- On mesure un couple sur le cylindre intérieur qui se trouve, par conséquent, soumis au frottement du fluide.
- Comme e est faible devant r, on peut schématiser l'expérience par deux plans (C'_1) et (C'_2) de surface $S = 2\,\pi r . h$, distants de e, avec (C'_1) se déplaçant à $C = \omega . r$ (m/s).
- Sur (C'_2) apparaît donc une force F parallèle à ce plan, due aux frottements dans le fluide.
- Tant que ω reste inférieur à une valeur critique, on relève alors une relation entre F et les divers paramètres :

$$F = \mu . \frac{S . C}{e}$$

F : force tangentielle (N).
μ : viscosité dynamique (Pa . s).
S : surface mouillée (m^2).
C : célérité ou vitesse relative (m/s).
e : distance entre les surfaces (m).

Cet effet, dû à la viscosité, est mis à profit dans les coupleurs et convertisseurs de couples.

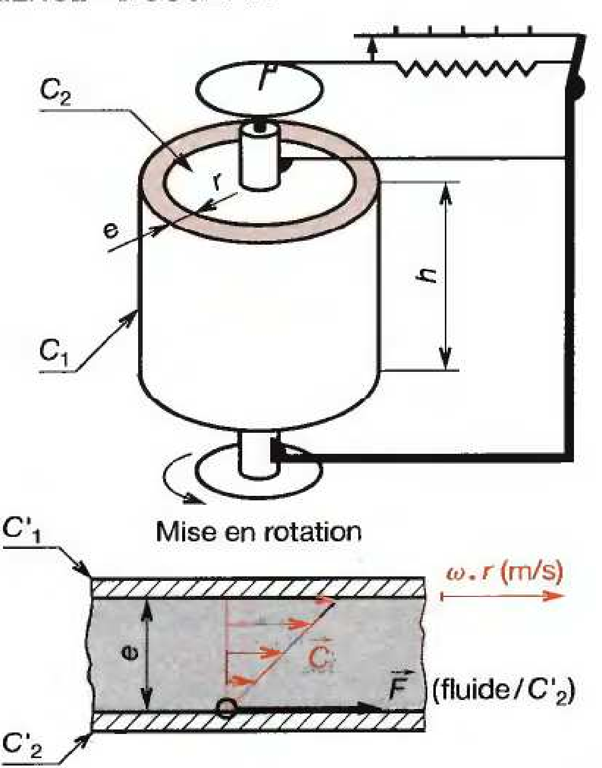
65 ▪ 22 Viscosité cinématique ν

Elle se déduit de la viscosité dynamique et de la masse volumique du fluide par la relation :

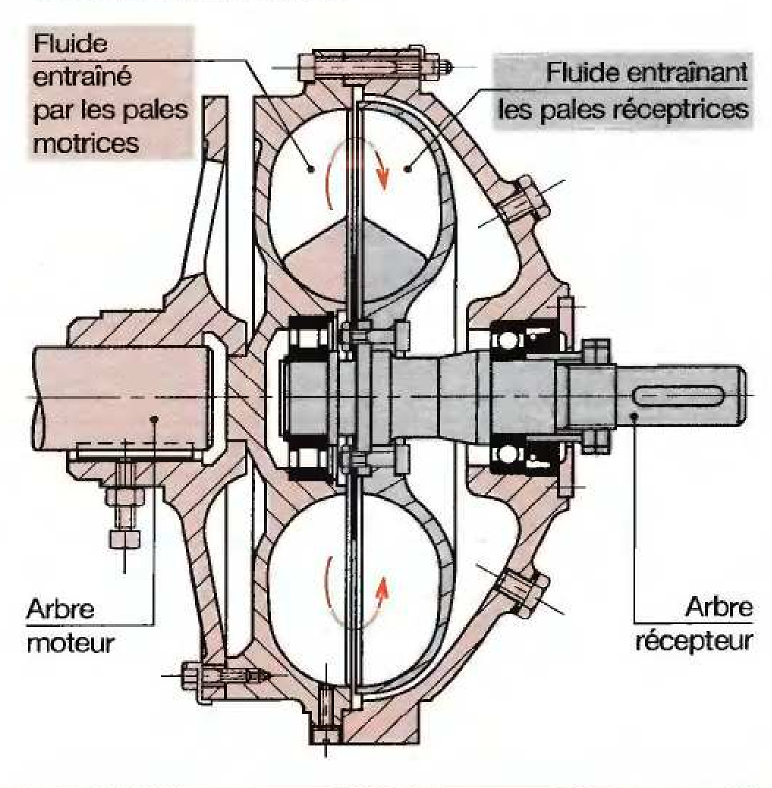
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ν : viscosité cinématique (m^2/s).
μ : viscosité dynamique (Pa . s).
ρ : masse volumique du fluide (kg/m^3).

EXPÉRIENCE DE COUETTE



COUPLEUR DE COUPLE



Produit (masse volumique) à 20 °C sous 1 bar	μ (Pa . s)	ν (m^2/s)
Eau (1 kg/dm^3)	10^{-3}	10^{-6}
Huile de graissage (0,9 kg/dm^3) de viscosité moyenne	0,27 à 0,35	$1{,}1 \times 10^{-3}$ à $3{,}9 \times 10^{-4}$
Huile de graissage (0,9 kg/dm^3) de viscosité fluide	0,085	$9{,}5 \times 10^{-5}$

65 ▪ 3 Nombre de Reynolds $\mathcal{R}$

Ce nombre,sans dimension, permet de prévoir le type d'écoulement dans une conduite.

$$\mathcal{R} = C \cdot \frac{d}{\nu}$$

$\mathcal{R}$: nombre de Reynolds (sans dimension).
C : célérité (vitesse) du fluide dans la conduite (m/s).
d : diamètre de la conduite (m).
ν : viscosité cinématique fluide (m^2/s).

$\mathcal{R} < 2300$: écoulement laminaire
$\mathcal{R} > 3000$: écoulement turbulent
$\mathcal{R} \in (2300, 3000)$: on ne peut rien dire

65 ▪ 4 Débits

▪ Débit volume q_v (m^3/s).
Volume de liquide qui traverse une section en une seconde.

$$q_v = S \cdot C$$

q_v : débit volume (m^3/s).
S : section de passage (m^2).
C : célérité (vitesse) de passage du fluide (m/s).

▪ Débit masse q_m (kg/s).
Masse de fluide traversant une section en une seconde.

$$q_m = \rho \cdot q_v$$

q_m : débit masse (kg/s).
ρ : masse volumique du fluide (kg/m^3).
q_v : débit volume du fluide (m^3/s).

65 ▪ 5 Équation de continuité

Lors d'un écoulement continu, le débit est identique en toutes sections droites de la conduite.

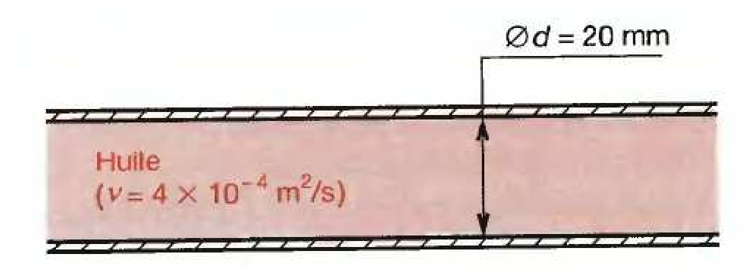
$$q_v = S_1 \cdot C_1 = S_2 \cdot C_2$$

q_v : débit volume (m^3/s).
S_1 : section de passage dans la section 1 (m^2).
S_2 : section de passage dans la section 2 (m^2).
C_1 : vitesse (célérité) de passage dans la section 1 (m/s).
C_2 : vitesse (célérité) de passage dans la section 2 (m/s).

REMARQUE :
La vitesse augmente lorsque la section diminue...

EXEMPLE 1

De l'huile ayant pour viscosité cinématique $\nu = 4 \times 10^{-4}\ m^2/s$ circule dans une canalisation de Ø d = 20 mm.
Calculer le débit volume maximal de cette huile pour que l'écoulement reste laminaire.



Pour que l'écoulement reste laminaire, il faut que :

$$\mathcal{R} = C \cdot \frac{d}{\nu} \leqslant 2\,300$$

soit : $C \leqslant 2\,300 \frac{\nu}{d}$ avec $\left| \begin{array}{l} \nu = 4 \times 10^{-4}\ m^2/s \\ d = 2 \times 10^{-2}\ m \end{array} \right.$

donc : $C \leqslant 46$ m/s

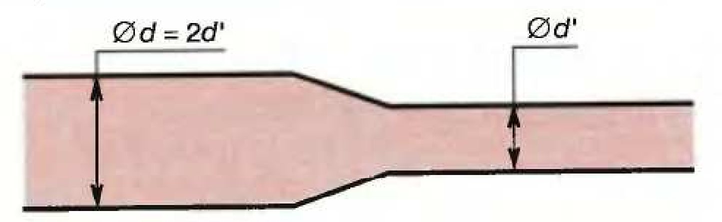
On en déduit le débit maximal :

$$q_v = S \times C = \frac{\pi}{4} \times (2 \times 10^{-2})^2 \times 46 = 1{,}445 \times 10^{-2}\ m^3/s$$

$$\mathbf{q_v = 14{,}45\ \ell/s = 867\ \ell/min}$$

EXEMPLE 2

Un fluide circule dans une canalisation de diamètre d à la vitesse C = 10 m/s.
Cette canalisation se réduit localement à $d' = 0{,}5\ d$.
Exprimer la vitesse C' dans le rétrécissement en fonction de C, d et d'.



$$S \cdot C = S' \cdot C' \Leftrightarrow d^2 \cdot C = d'^2 \cdot C'$$

donc : $C' = C\left(\frac{d}{d'}\right)^2 = C \times 2^2$

$$\mathbf{C' = 40\ m/s}$$

66 Dynamique des fluides incompressibles

66 ■ 1 Théorème d'Euler ou des quantités de mouvement

Ce théorème établit une relation entre les éléments cinématiques d'un fluide et les efforts qui lui sont appliqués.

La somme vectorielle des forces appliquées à un tronçon de fluide en écoulement permanent est égale au produit du débit massique par la différence vectorielle des vitesses du fluide en aval et en amont de ce tronçon.

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} = q_m(\overrightarrow{C_2} - \overrightarrow{C_1})$$

$\Sigma \overrightarrow{Fext}$: somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un tronçon de fluide isolé (N).

q_m : débit massique du fluide (kg/s).

$\overrightarrow{C_2}$: vitesse vectorielle du fluide à l'aval (m/s).

$\overrightarrow{C_1}$: vitesse vectorielle du fluide à l'amont (m/s).

REMARQUE :

Les particules de fluide (assimilables à de petites sphères indépendantes, en mouvement) sont extrêmement mobiles : un effort très petit suffit à les déplacer. Par conséquent, tant que le fluide n'est pas emprisonné dans une canalisation par exemple, il règne au sein du fluide une pression égale à la pression ambiante extérieure à l'écoulement. Les efforts dus à cette pression ambiante s'annulent mutuellement.

EXEMPLE (jet d'eau sur une plaque) :

■ En appliquant le théorème d'Euler au volume de fluide situé entre la sortie de la buse et la plaque :

$$\vec{F} = q_m(\vec{C_2} - \vec{C_1}).$$

■ En projection sur l'axe $(O, \vec{y})$, on obtient :

$$F.\vec{y} = Fy = -q_m.C_1.\cos\alpha = -\rho.q_v.C_1.\cos\alpha.$$

Comme $C_1 = q_v/s$: $\quad Fy = (-\rho.q_v^2.\cos\alpha)/s$.

L'action mutuelle de l'eau sur la plaque s'en déduit :

$$F'y = (+\rho.q_v^2.\cos\alpha)/s.$$

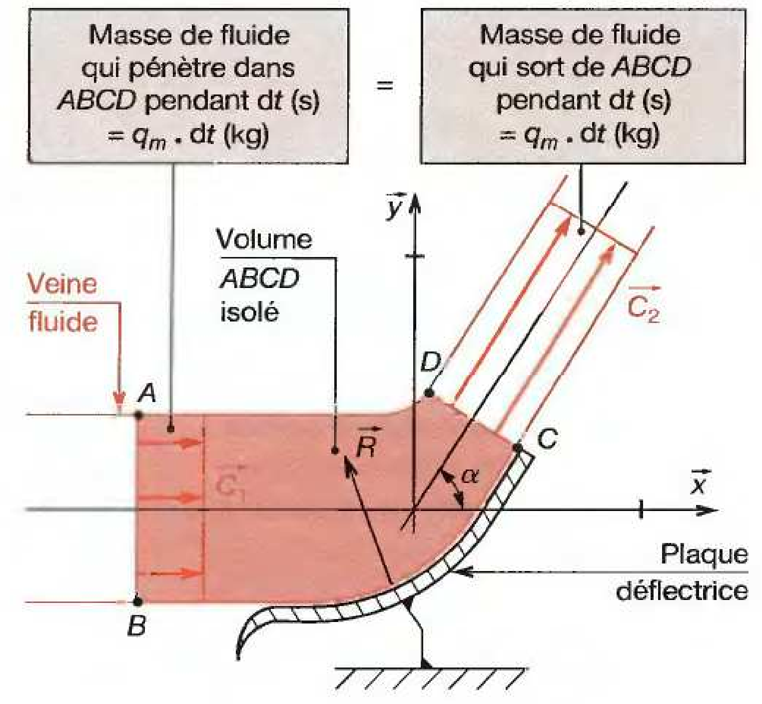
■ Pour la position d'équilibre de la plaque, la somme des moments par rapport à $(O, \vec{z})$ est nulle :

$$F'y.h/\cos\alpha = Mg.\ell/2.\sin\alpha.$$

■ D'où : $\sin\alpha = (\rho.q_v^2.h)/(S.Mg.\ell/2)$

on trouve : $\alpha = \mathbf{4{,}87°}$.

THÉORÈME D'EULER



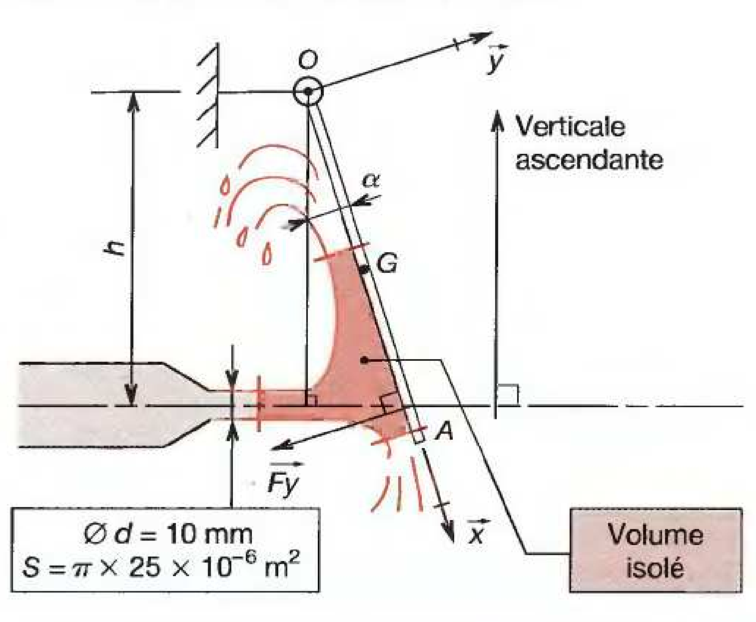
En projections, on obtient :

sur $\vec{x}$: $x = q_m(C_2 . \cos\alpha - C_1)$

sur $\vec{y}$: $y = q_m . C_2 . \sin\alpha$

$\vec{R}(x, y)$: résultante de la plaque déflectrice sur le fluide

JET D'EAU SUR UNE PLAQUE ARTICULÉE

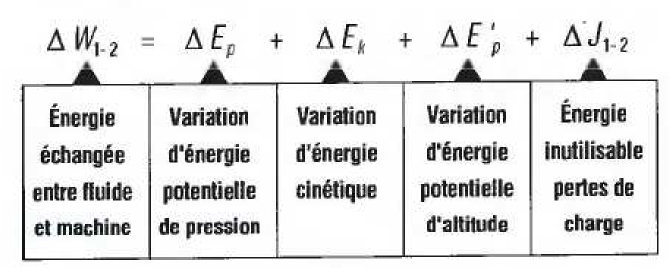


Plaque	Eau
$\overrightarrow{OA} = \ell\vec{x}$	$\rho = 10^3$ kg/m^3
$\ell = 0{,}6$ m	$q_v = 2 \times 10^{-4}$ m^3/s
Masse $M = 1$ kg	$h = 0{,}5$ m
Pivot parfait en O	$\varnothing d = 10$

(Volume d'eau isolé de poids négligeable.)

66 ▪ 2 Équation de Bernoulli

Considérons une machine (pompe ou turbine) qui échange de l'énergie avec un fluide. D'une façon générale, on peut dire que cette énergie se conserve même si elle se transforme :



$$\Delta W_{1\text{-}2} = \Delta E_p + \Delta E_k + \Delta E'_p + \Delta J_{1\text{-}2}$$

Énergie échangée entre fluide et machine	Variation d'énergie potentielle de pression	Variation d'énergie cinétique	Variation d'énergie potentielle d'altitude	Énergie inutilisable pertes de charge

■ Convention de signe

$\Delta W_{1\text{-}2} > 0$: Le fluide reçoit de l'énergie de la machine ; il s'agit donc d'une pompe.

$\Delta W_{1\text{-}2} < 0$: Le fluide fournit de l'énergie à la machine ; il s'agit alors d'une turbine.

■ $\Delta E_p = p_2 . S_2 . \Delta \ell_2 - p_1 . S_1 . \Delta \ell_1$

(Variation des travaux des forces $p_2 S_2$ et $p_1 S_1$ de pression.)

Mais $S_2 . \Delta \ell_2 = S_1 . \Delta \ell_1$ (équation de continuité)

$= \Delta . v = \frac{1}{\rho}$ (volume massique pour 1 kg)

Donc $\Delta E_p = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$ pour 1 kg de fluide.

■ $\Delta E_k = \frac{1}{2} m . C_2^2 - \frac{1}{2} m . C_1^2 = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2}$ pour 1 kg ;

■ $\Delta E'_p = m . g . z_2 - m . g . z_1 = g(z_2 - z_1)$ pour 1 kg ;

■ $\Delta J_{1\text{-}2}$ dépend des conditions de l'écoulement (§ 67).

En définitive, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\Delta W_{1\text{-}2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \Delta J_{1\text{-}2}$$

$\Delta W_{1\text{-}2}$ et $\Delta J_{1\text{-}2}$ en J/kg,

p_2 et p_1 en Pa, ρ en kg/m^3,

C_2 et C_1 en m/s,

z_2 et z_1 en m,

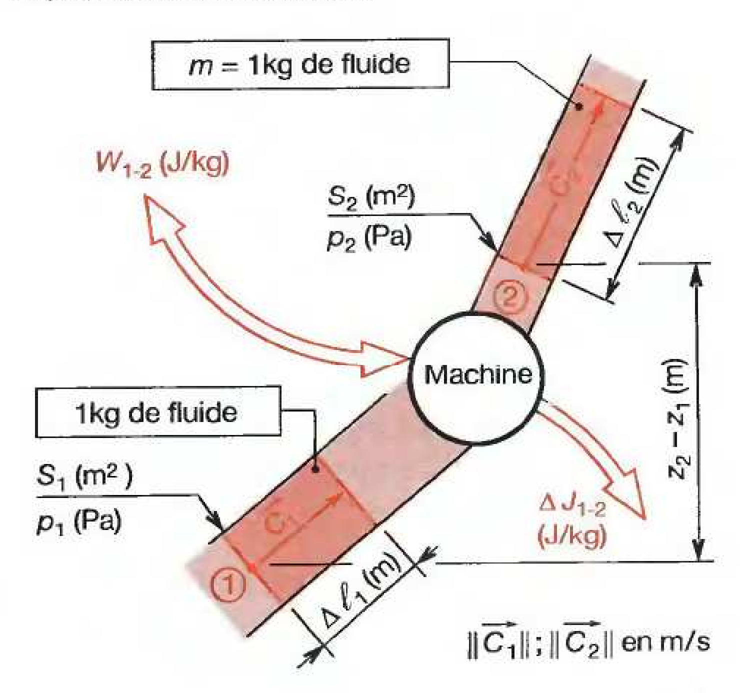
g en m/ s^2.

REMARQUE :

Écoulement dans une conduite (sans machine) : $\Delta W_{1\text{-}2} = 0$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \Delta J_{1\text{-}2} = 0$$

ÉQUATION DE BERNOULLI



AUTRES FORMES DE L'ÉQUATION

■ En termes de pression :

il suffit de multiplier chaque terme par la masse volumique ρ du fluide :

$$\Delta W_{1\text{-}2} = p_2 - p_1 + \frac{\rho}{2}(C_2^2 - C_1^2) + \rho . g(z_2 - z_1) + \Delta J_{1\text{-}2}$$

$$\text{Pa} \qquad \frac{kg}{m^3} . \frac{m^2}{s^2} = \frac{kg}{m . s^2} = \frac{N}{m^2} \qquad \text{Pa}$$

$$\frac{J}{kg} . \frac{kg}{m^3} = \frac{N}{m^2} \qquad \frac{kg}{m^3} . \frac{m}{s^2} . m = \frac{N}{m^2}$$

(voir aussi § 72.7)

■ En hauteur de liquide transporté :

il suffit de diviser chaque terme par l'accélération g de la pesanteur :

$$\Delta W_{1\text{-}2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho . g} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + z_2 - z_1 + \Delta J_{1\text{-}2}$$

$$\frac{N}{m^2} . \frac{m^3}{kg} . \frac{s^2}{m} = m \qquad \frac{m^2}{s^2} . \frac{s^2}{m} = m \qquad m$$

$$\frac{J}{kg} . \frac{s^2}{m} = \frac{N . m}{kg} . \frac{s^2}{m} = \frac{kg . m}{s^2} . \frac{m}{kg} . \frac{s^2}{m} = m$$

66.3 Applications

66.31 Calcul d'une pompe

Une pompe, située 2 m au-dessus d'un bassin d'alimentation, doit élever de l'eau dans un château d'eau dont le niveau est à 40 m. Elle doit débiter 30 ℓ/s grâce à des canalisations de ∅ $d = 100$ mm. On estime les pertes de charge à 0,1 m par mètre de dénivelée.

Calculer :

1° La vitesse du fluide dans la canalisation.

2° La puissance minimale de la pompe.

3° Les pressions à l'entrée et à la sortie de la pompe

$$p_{amb} = 10^5 \text{ Pa}.$$

HYPOTHÈSE :

Les niveaux du bassin d'alimentation et du château d'eau restent constants.

SOLUTION :

1° Vitesse du fluide dans le circuit

$q_v = S.C$ (§ 65.5) $\Rightarrow C = \dfrac{q_v}{S}$.

$$\left.\begin{array}{l} q_v = 30\ \ell/\text{s} = 30 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} \\ s = \pi \times 50^2 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow C \approx 3{,}82\ \text{m/s}.$$

REMARQUE :

$$\mathcal{R} = \frac{3{,}82 \times 10^{-1}}{10^{-6}} = 3{,}82 \times 10^5 \quad (\S\ 65.3).$$

L'écoulement est turbulent dans le conduit.

2° Puissance de la pompe

Appliquer l'équation de Bernoulli (§ 66.2) entre les points 0 et 3 :

$$W_{0\text{-}3} = \frac{p_3 - p_0}{\rho} + \frac{1}{2}(C_3^2 - C_0^2) + g(z_3 - z_0) + J_{0\text{-}3}.$$

$p_3 = p_0 = p_{amb}$;

$C_3 = C_0 = 0$ (fluide immobile hors du conduit) ;

$J_{0\text{-}3} = 0{,}1 \times 40 = 4$ m d'eau s'ajoutant à $z_3 - z_0$.

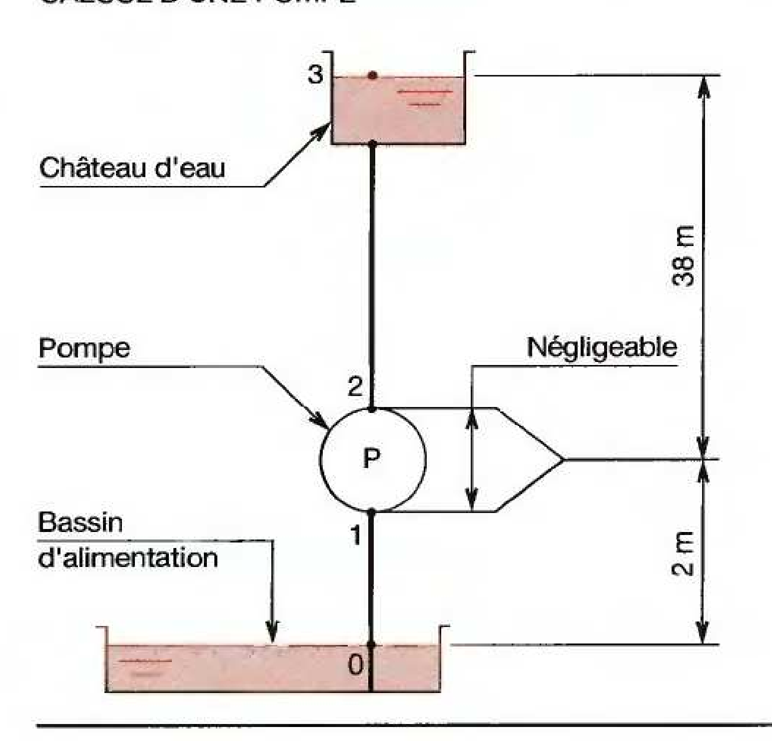
Il vient : $W_{0\text{-}3} = 9{,}81 \times (40 + 4) = 432$ J/kg.

La puissance de la pompe se calcule par :

$$\boldsymbol{P = W_{0\text{-}3} \cdot q_m}$$
où
$$\boldsymbol{q_m = \rho \cdot q_v}$$

$$\boldsymbol{P = 432 \times 30 = 1{,}295 \times 10^4\ \text{W} = 12{,}95\ \text{kW}.}$$

CALCUL D'UNE POMPE



3° Pressions

- Pression à l'entrée de la pompe

Entre les points 0 et 1, il n'y a pas d'échange de travail :

$$0 = \frac{p_1 - p_0}{\rho} + \frac{1}{2}(C_1^2 - C_0^2) + g(z_1 - z_0) + J_{0\text{-}1}.$$

p_1 = valeur cherchée.
$\rho = 10^3$ kg/m³ (eau).
$p_0 = p_{amb} = 10^5$ (pression ambiante).
$C_1 = 3{,}82$ m/s.
$C_0 = 0$ dans le bassin d'alimentation.
$z_1 - z_0 = 2$ m.
$J_{0\text{-}1} = 0{,}1 \times 2 = 0{,}2$ m d'eau.

On obtient : $\boldsymbol{p_1 = 0{,}711 \times 10^5\ \text{Pa} = 0{,}7\ \text{bar}}$.

Une pression, plus faible à l'entrée de la pompe explique la montée de l'eau.

- Pression à la sortie de la pompe

Entre les points 2 et 3, il n'y a pas d'échange de travail :

$$0 = \frac{p_3 - p_2}{\rho} + \frac{1}{2}(C_3^2 - C_2^2) + g(z_3 - z_2) + J_{2\text{-}3}.$$

$p_3 = 10^5$ Pa dans le château d'eau.
$C_3 = 0$ sur la surface libre.
$C_2 = 3{,}82$ m/s.
$z_3 - z_2 = 38$ m et $J_{2\text{-}3} = 3{,}8$ m.

On obtient : $\boldsymbol{p_2 = 5{,}03 \times 10^6\ \text{Pa} = 50{,}3\ \text{bar}}$.

66.32 Calcul d'une turbine

On veut prédéterminer une installation hydraulique de 1 GW située entre deux plans d'eau. Les altitudes diffèrent de 420 m. On peut estimer que les pertes de charge correspondent à 1/7 de l'énergie disponible. Les trois canalisations auront un diamètre $d = 3$ m.

1° Calculer l'énergie disponible sur l'installation de turbinage.

2° Pour un écoulement laminaire, combien faudrait-il prévoir de conduites en parallèle ?

3° En limitant à trois conduites et en considérant que les pertes de charge se produisent essentiellement avant les turbines, calculer la pression à l'entrée des turbines.

SOLUTION :

1° Énergie disponible

Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 4 :

$$W_{1\text{-}4} = \frac{p_4 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}(C_4^2 - C_1^2) + g(z_4 - z_1)$$

$$= g(z_4 - z_1) \text{ car } p_4 = p_1 \text{ et } C_4 = C_1 = 0$$

APPLICATION NUMÉRIQUE :

$g = 9{,}81$ m/s^2 ; $z_4 - z_1 = -420$: $W_{1\text{-}4} = -4\,120$ J/kg

(négatif car le fluide cède du travail – § 66.2).

Les pertes de charge s'élèvent donc à :

$J = 4\,120/7 = 589$ J/kg

L'installation dispose d'une énergie utile :

$W_{1\text{-}4u} = 4\,120 - 589 = 3\,531$ J/kg

2° Nombre de conduites pour un écoulement laminaire

Il faut que $\mathcal{R} < 2\,300$ (§ 65.3)

$$\mathcal{R} = \frac{C \cdot d}{\nu} \quad \text{et} \quad C = \frac{q_v}{S} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{4}{\pi \cdot \nu} \cdot \frac{q_v}{d}$$

On connait la puissance de l'installation :

$$P = W_{1\text{-}4u} \cdot q_m \Rightarrow q_m = \frac{P}{W_{1\text{-}4u}}$$

Avec $P = 10^9$ W et $W_{1\text{-}4u} = 3\,531$ J/kg :

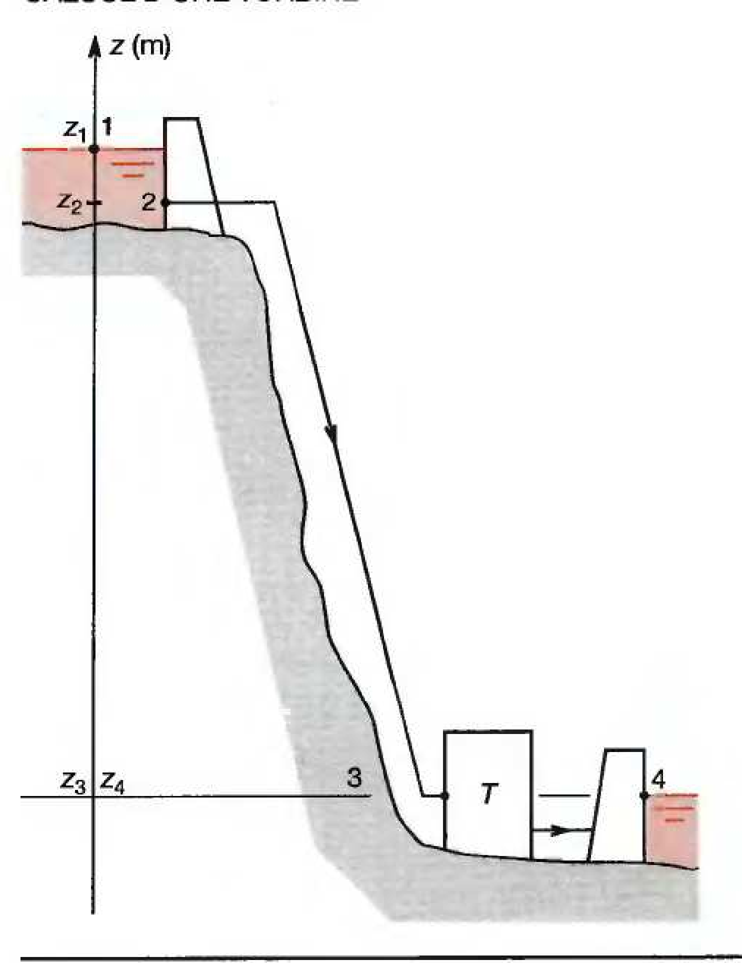
$$q_m = 2{,}83 \times 10^5 \text{ kg/s}$$

L'ensemble des n conduites doit avoir un débit volume :

$$q'_v = n \cdot q_v = 283 \text{ m}^3/\text{s}$$

Un écoulement laminaire nécessite :

$$\frac{4}{\pi \cdot \nu} \cdot \frac{q'_v}{n \cdot d} < 2\,300 \Rightarrow n > \frac{4 \cdot q'_v}{\pi \cdot \nu \cdot d \times 2\,300}$$



$$\left.\begin{array}{l} q'_v = 283 \text{ m}^3/\text{s} \\ \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ d = 3 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow n > 52\,000 \ldots$$

3° Pression à l'entrée des turbines

Avec trois conduites, l'écoulement sera turbulent.

Vitesse de l'eau dans une conduite :

$$q_v = S \cdot C \Rightarrow C = q_v/S \quad (\S\ 65.5)$$

$$\left.\begin{array}{l} q_v = 283/3 = 94{,}4 \text{ m}^3/\text{s} \\ S = \pi \times 1{,}5^2 = 7 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 13{,}35 \text{ m/s}$$

Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 3 (pas d'échange) :

$$0 = \frac{p_3 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}(C_3^2 - C_1^2) + g(z_3 - z_1) + J_{1\text{-}3}$$

$p_1 = 1{,}013 \times 10^5$ Pa — $g = 9{,}81$ m/s^2

$C_3 = 13{,}35$ m/s — $z_3 - z_2 = -420$ m

$C_1 = 0$ — $J_{1\text{-}3} = 589$ J/kg

D'où : $\mathbf{p_3 = 3{,}54 \times 10^6}$ **Pa = 35,4 bar**

67 Pertes de charges

Elles résultent d'une transformation d'une partie de l'énergie en chaleur, non récupérable.
On distingue les pertes de charges régulières et singulières.

67 ■ 1 Pertes de charges régulières

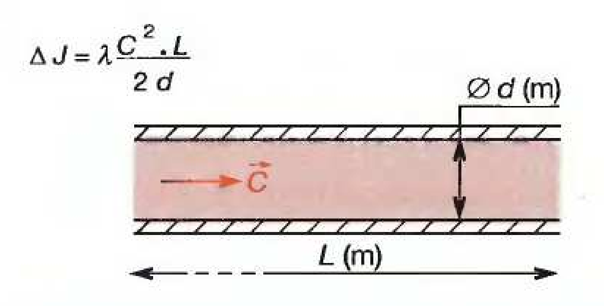
Elles se produisent le long des conduits rectilignes par frottement du fluide sur des parois plus ou moins rugueuses.
Elles varient selon le type d'écoulement.

67 ■ 2 Pertes de charges singulières

Elles se situent dans certaines sections présentant des variations brutales dans la conduite du fluide.

PERTES DE CHARGES RÉGULIÈRES

$$\Delta J = \lambda \frac{C^2 . L}{2\,d}$$



Écoulement laminaire	Écoulement turbulent $\mathcal{R} \leqslant 10^5$ (§ 65.1)
$\lambda = \dfrac{64}{\mathcal{R}}$	$\lambda = \dfrac{1}{(100\,\mathcal{R})^{0,25}}$
Pour $\mathcal{R} > 10^5$, il existe des abaques.	

NOTATIONS ET UNITÉS : J en J/kg ; C_1 et C_2 en m/s ; α en ° ; $\mathcal{R}$: nombre de Reynolds (§ 65.3)

Divergent (diffuseur)	Élargissement brusque	Arrivée d'une conduite	Rétrécissement progressif
α ; C_1	C_1, S_1 ; C_2, S_2	C_1	α ; C_1, S_1 ; C_2, S_2
$\alpha \leqslant 10° : J \approx 0$ $\alpha > 70° : J \approx 0{,}4 . C_1^2$ Variation linéaire entre 10 et 70°	$J \approx \left(1 - \dfrac{S_1}{S_2}\right)^2 . \dfrac{C_1^2}{2}$	$J \approx 0{,}54 . C_1^2$	$J \approx \left(\dfrac{1}{C} - 1\right)^2 . \sin\alpha . C_2^2$ si $\alpha \leqslant 90°$ $J \approx \left(\dfrac{1}{C} - 1\right)^2 . C_2^2$ si $\alpha > 90°$ où $C = 0{,}63 + 0{,}37\,(S_2/S_1)^3$

Rétrécissement brusque	Entrée d'une conduite		
C_2, S_2 ; C_1, S_1 ; σ : section contractée	C_2	C_2	C_2
$J \approx \left(\dfrac{1}{C} - 1\right)^2 . \dfrac{C_2^2}{2}$ $J \Rightarrow \sigma / S_2$ lorsque $\mathcal{R} \nearrow$	$J \approx \dfrac{C_2^2}{2}$	$J \approx 0$	$J \approx \dfrac{C_2^2}{4}$

Changement de direction		Soupape
Ø d ; C_1, S_1 ; r ; $\alpha°$	Ø d ; C_1 ; $\alpha°$	C_1
$J = \left[0{,}13 + 1{,}85\left(\dfrac{d}{2\,r}\right)^{3,5}\right] . \dfrac{\alpha°}{180} . C_1^2$	$J = \left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^4\dfrac{\alpha}{2}\right) . \dfrac{C_1^2}{2}$	$J \approx C_1^2$

68 Transfert de chaleur

68■1 Principe de l'équilibre thermique

À l'équilibre, deux corps en contact thermique (qui ont donc toutes possibilités d'échanger de la chaleur), atteignent une même température.

L'énergie existant sous forme de chaleur, s'exprime en joules (J).

Unités anciennes : la calorie (1 cal = 4,18 J),
la frigorie (1 frigorie = − 1 cal),
la thermie (1 thermie = 4 180 kJ).

Ce principe est mis en pratique avec les thermomètres.

68■2 Échelles de températures

68■21 Échelles thermométriques

Elles permettent de **comparer** des températures **sans** toutefois pouvoir les **mesurer** : grandeurs repérables. Elles établissent une correspondance entre un phénomène physique mesurable x qui évolue avec la température θ selon une loi de la forme $x = a\theta + b$. x s'appelle alors grandeur thermométrique :

- Volume apparent d'une certaine masse de liquide dans un tube de verre (alcool, mercure...).
- Pression d'une masse gazeuse évoluant dans un volume constant.

On calcule les constantes a et b en choisissant deux températures conventionnelles :

Pression atmosphérique normale	Échelles de températures θ		
	Celsius ou Centisémale	Réaumur	Fahrenheit
Glace fondante	0 °C	0 °R	32 °F
Vapeur d'eau bouillante	100 °C	80 °R	212 °F

68■22 Échelle thermodynamique*

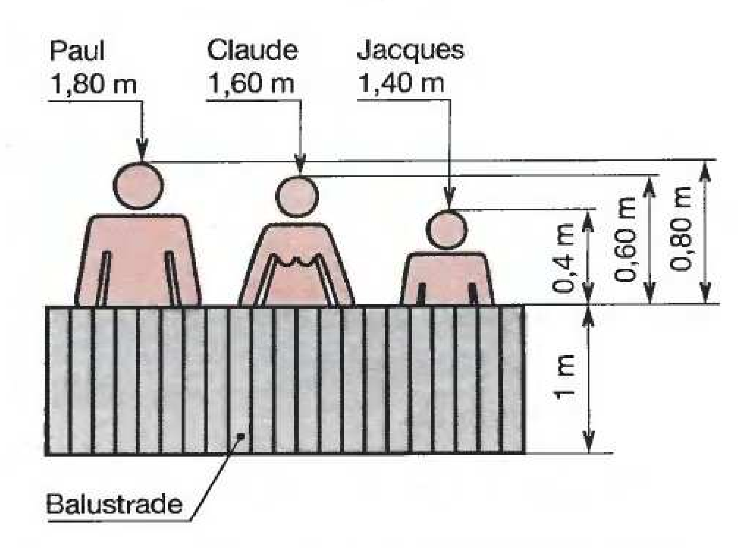
- Elle permet de **comparer** et **mesurer** des températures.
- Elle définit une **température absolue** T proportionnelle à la pression, à volume constant, d'un gaz parfait.
- Elle se déduit de l'échelle Celsius par la relation :

$$T \approx \theta + 273$$

Degré kelvin (K) (T) — **Degré Celsius (°C)** (θ)

* Ou absolue.

GRANDEURS REPÉRABLES
GRANDEURS MESURABLES



La taille des personnages dont on ne voit pas les pieds est une **grandeur repérable** à partir du sommet de la balustrade.

Cette référence est arbitraire au même titre que le 0 °C des températures.

On peut comparer :
Paul est plus grand que Claude, etc.

On ne peut calculer :
$0{,}80 = 2 \times 0{,}40 \Rightarrow$ Paul deux fois plus grand que Jacques est faux !

À partir du sol, référence commune aux trois personnages (comme le 0 K où tous les gaz ont une énergie nulle), la taille devient une **grandeur mesurable**. On peut comparer et mesurer :

Paul est $\dfrac{1{,}8}{1{,}6}$ fois plus grand que Claude...

DEVINETTE

Quel est le double de la température 20 °C ?

SOLUTION :

On ne peut effectuer des calculs que sur des températures absolues.
Donc 20 °C = 293 K.
2 × 293 K = 586 K.
Le double de 20 °C est donc 313 °C.

68 ▪ 3 Capacité thermique massique *C

La capacité thermique massique est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C (ou 1 K), la température de 1 kg d'un corps, sans modification de sa nature.

Par exemple, chauffer du métal ou de l'eau mais ne pas faire fondre de la glace.

$$\Delta Q = \dot{m} . C . \Delta\theta$$

ΔQ : quantité de chaleur échangée (J).
m : masse du corps (kg).
C : capacité thermique massique (J/kg.K).
$\Delta\theta$: variation de température (°C ou K).

REMARQUES :

- C dépend de la température ; toutefois, on peut utiliser des valeurs moyennes (voir tableau).
- Pour un gaz, on distingue :
C_p = capacité thermique massique à pression constante,
C_v = capacité thermique massique à volume constant.
(Pour 1 kg ou 1 kmole = 1 000 molécules de gaz.)

68 ▪ 4 Capacité thermique massique de fusion C_f

La capacité thermique massique de fusion est la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer 1 kg d'un corps donné de l'état solide à l'état liquide.

- Cette transformation est isotherme (à température constante).
- Les corps augmentent de volume en fondant exceptée la glace, la fonte, l'argent et le bismuth.

68 ▪ 5 Capacité thermique massique de vaporisation C_v

La capacité thermique massique de vaporisation est la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer 1 kg d'un corps, de l'état liquide à l'état gazeux (en vapeur saturante).

- Cette transformation est isotherme (à température constante).
- Quelques corps passent directement de l'état solide à l'état gazeux (exemple : naphtaline) ; ils subissent alors une sublimation.

* L'expression « chaleur massique », d'emploi courant, est déconseillée.

APPLICATION :

Un véhicule de masse m = 950 kg roule à 90 km/h. Il freine pendant 25 s jusqu'à l'arrêt.

En admettant que :

- 2/3 de l'énergie dissipée échauffe les freins tandis que le reste s'évacue par ventilation,
- les disques de freins peuvent être assimilés thermiquement dans leur ensemble à un bloc de 1,3 kg de fonte.

Calculer l'échauffement des freins.

SOLUTION :

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique (chapitre 62) entre le début et la fin de freinage :

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m . v^2 = \frac{1}{2} \times 950 \times \left(\frac{90 \times 10^3}{3\,600}\right)^2 = 297 \text{ kJ}.$$

Énergie conservée par les freins :

$$\Delta Q = 297 \times \frac{2}{3} = 198 \text{ kJ}$$

$$\Delta Q = m . C . \Delta\theta$$

d'où : $\Delta\theta = \dfrac{\Delta Q}{m . C}$

C = 530 J/(kg.K) (tableau).

On trouve : $\Delta\theta = \dfrac{198 \times 10^3}{1,3 \times 530} = \mathbf{287\ °C}$.

CAPACITÉS THERMIQUES (valeurs moyennes)			
Corps	**C (J/kg.K) § 68.3**	**C_f (J/kg) § 68.4**	**C_v (J/kg) § 68.5**
Acier	470	2×10^5	
Aluminium	905	$3,8 \times 10^5$	
Cuivre	394	$1,7 \times 10^5$	
Eau (glace)	2 090	$3,3 \times 10^5$	
Eau (liquide)	4 180		$2,2 \times 10^6$
Fonte	530	$1,3 \times 10^5$	
Laiton	385	$1,7 \times 10^5$	
Zinc	380	$1,2 \times 10^5$	

68.6 Transfert par conduction

Les matériaux ont la propriété de transmettre la chaleur d'un point à un autre de leur matière. On définit un **coefficient de conductivité** thermique λ par la relation :

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda . S . \frac{\Delta \theta}{e}$$

P : puissance échangée (W).
ΔQ : quantité de chaleur échangée Q (J).
Δt : durée de l'échange (s).
λ : coefficient de conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$).
S : surface d'échange (m^2).
$\Delta\theta$: différence de température (°C ou K).
e : épaisseur de paroi (m).

- Ce transfert s'effectue de la zone chaude vers la zone froide.
- La puissance de transfert est directement proportionnelle à λ.

On peut ainsi distinguer les conducteurs thermiques et les isolants (voir tableau).

68.7 Transfert par convection

- L'échauffement local d'un fluide modifie sa masse volumique à cet endroit. Cela engendre des courants de convection provoquant un déplacement de la zone chaude, donc un transport de chaleur.
- On définit un **coefficient de convection h_c.**

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = h_c . S . \Delta \theta$$

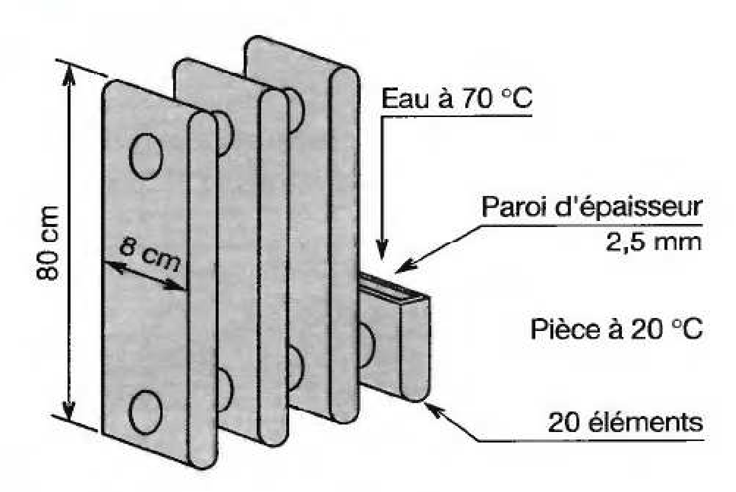
h_c s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

- La convection se produit aussi dans les solides.

Matériau \ Épaisseur (cm)	2	12	25
Béton	$h_c = 3{,}8$	$h_c = 3{,}4$	$h_c = 2{,}3$
Bois		$h_c = 1{,}7$	
Brique rouge		$h_c = 2{,}9$	$h_c = 2$
Fenêtre simple vitrage (e = 4 mm) : $h_c = 5{,}8$			
Fenêtre double vitrage (4 – 20 – 4) : $h_c = 2{,}9$			

Bons conducteurs thermiques λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	**Cuivre** 372	**Aluminium** 209	
Conducteurs thermiques moyens λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	**Fonte** 48,8	**Acier moulé** 46,5	
Mauvais conducteurs thermiques (isolants) λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	**Caoutchouc** 0,25	**Bois** 0,15	**Liège** 0,04

RADIATEUR EN FONTE



Calcul de la puissance dissipable :

$$P = 48{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}08 \times 2 \times 20 \times \frac{50}{2{,}5.10^{-3}}$$
$$= 2\,500 \text{ kW}.$$

DOUBLES VITRAGES

Un pavillon chauffé à 20 °C est formé de 120 m^2 de murs en béton ayant 25 cm d'épaisseur et de 25 m^2 de surface vitrée.

En admettant que l'ensemble des perditions de chaleur s'effectue par ces surfaces, calculer l'économie réalisée en prévoyant des doubles vitrages, lorsqu'il fait 0 °C à l'extérieur.

APPLICATION :

Puissance perdue avec des fenêtres simples :

$P_1 = 2{,}3 \times 120 \times 20 + 5{,}8 \times 25 \times 20 = 8\,420$ W.

Puissance perdue avec des doubles vitrages :

$P_2 = 2{,}3 \times 120 \times 20 + 2{,}9 \times 25 \times 20 = 6\,970$ W.

Soit un gain de 20,8 %.

68 ▪ 8 Transfert par rayonnement

Un corps à la température absolue T_1 rayonne un courant de chaleur dans un milieu à la température absolue T_2 selon une loi de la forme :

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = h_r \cdot S_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

P : puissance rayonnée, en watt (W).
ΔQ : quantité de chaleur rayonnée, en joules (J).
Δt : durée de rayonnement en secondes (s).
h_r : constante de rayonnement de l'émetteur ($W.m^{-2}.K^{-4}$).
S_1 : surface d'émission, en mètre carré (m^2).
T_1 : température du corps émetteur (K).
T_2 : température du récepteur (K).

■ **EXEMPLE :**

La porte vitrée d'un four de cuisinière a une surface de 20 dm^2. Quelle puissance dissipe-t-elle dans une pièce à 20 °C lorsqu'elle est portée à 180 °C ?

■ **SOLUTION :**

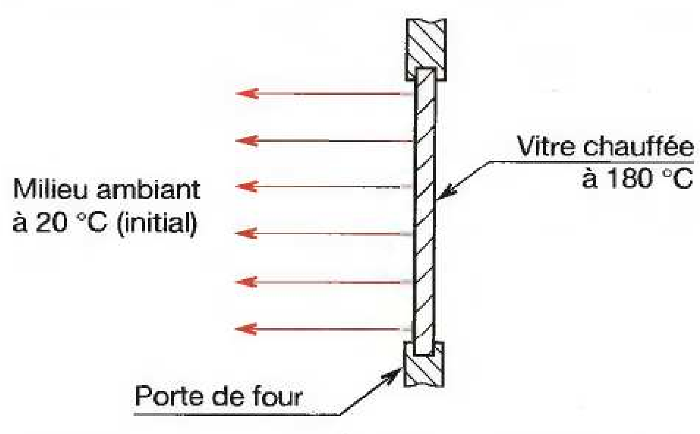
Il suffit d'appliquer la relation précédente, soit :

$$P = 5{,}2 \times (20 \times 10^{-2}) \times \left[\left(\frac{180 + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{20 + 273}{100} \right)^4 \right]$$

$= 361$ W.

CONSTANTES DE RAYONNEMENT h_r ($W.m^{-2}.K^{-4}$)	
Aluminium poli	0,4
Aluminium mat	0,3
Bois	5,1
Cuivre	0,23
Eau	3,7
Glace	3,5
Verre	5,2

RAYONNEMENT D'UNE VITRE DE PORTE DE FOUR



69 Contraintes thermiques

■ L'échauffement d'un matériau provoque une vibration de ses atomes autour de leurs positions d'équilibre. Il subit alors une dilatation thermique.

■ Une pièce de longueur ℓ_0* initiale, chauffée à $\Delta\theta$ °C s'allonge linéairement selon la loi :

$$\ell = \ell_0 (1 + \alpha_\ell . \Delta\theta)$$

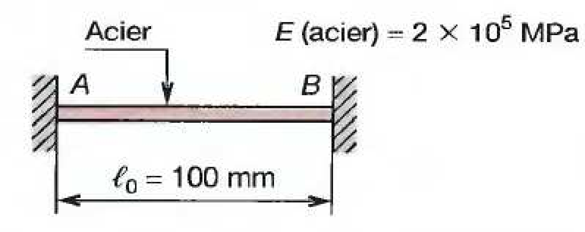
ℓ : longueur à chaud (mm).
ℓ_0 : longueur initiale (mm)*.
α_ℓ : coefficient de dilatation linéique ($°C^{-1}$ ou K^{-1}).
$\Delta\theta$: élévation de température (°C ou K).

Une température homogène n'entraîne pas de contraintes thermiques contrairement à une température variable à l'intérieur de la pièce.

Une poutre dont on gêne la libre dilatation subit une contrainte.

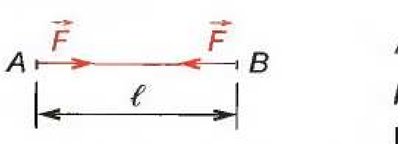
COEFFICIENT DE DILATATION LINÉIQUE α_ℓ ($°C^{-1}$ K^{-1})	
Acier	12×10^{-6}
Aluminium	$23{,}8 \times 10^{-6}$
Cuivre	$16{,}5 \times 10^{-6}$
Fonte	$10{,}5 \times 10^{-6}$
Invar (36 % Ni ; 64 % Fe)	$1{,}5 \times 10^{-6}$

POUTRE ENCASTRÉE CHAUFFÉE



À 20 °C, la poutre n'est soumise à aucune contrainte
Calculer la contrainte à 70 °C.

SOLUTION



$\Delta\ell = \ell - \ell_0 = \ell_0 . \alpha_\ell . \Delta\theta$

F doit raccourcir la poutre de $\Delta\ell$:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E . \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = E . \alpha_\ell . \theta$$

$\sigma = 2 \times 10^5 \times 12 \times 10^{-6} \times 50 =$ **120 MPa** (N/mm^2)

* En toute rigueur, ℓ_0 est la longueur à 0 °C mais l'approximation à une température différente est souvent acceptable.

70 Grandeurs et unités

NF X 02-001 à X 02-213

70■1 Principe de base

Une grandeur qualifie qualitativement et quantitativement un phénomène ou un corps.

Le symbole d'une grandeur doit être imprimé en caractère italique (penché), sans point final autre que celui de la ponctuation normale du texte où il s'insère.

EXEMPLES : C_p, E_k, …

Les symboles des unités et des préfixes associés ne doivent pas être altérés : pas de majuscule à la place de minuscules, de lettre latine à la place de lettre grecque et réciproquement.

Écrire par exemple	Ne pas écrire
kg	Kg ou kilog ou kgr, etc.
km	Km ou kmètre ou KM, etc.
°C ou K	°(pour une température), °K, etc.

MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES

Facteur	Préfixe	Symbole
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	téra	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	méga	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	déca	da
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

70■2 UNITÉS, MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES USUELS

Grandeurs et symboles	Unités S.I.	Multiples et sous-multiples	Autres unités usuelles	Observations
Angle plan $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$, etc.	rad (radian)	mrad µrad …	tr(tour) °(degré) '(minute) "(seconde)	1 tr = 2 π rad Ne pas écrire x Ne pas écrire min, mn, … Ne pas écrire sec, s, …
Longueur ℓ, L Largeur b Hauteur h Épaisseur d, δ Rayon r Diamètre d Longueur curviligne s	m (mètre)	km hm dam cm mm µm nm	in, ", (inch) ft, ' (foot)	1 in = 2,54 cm (unité anglo-saxonne) 1 ft = 0,3048 m (unité anglo-saxonne) Ne pas écrire m/m L'emploi de l'angström (Å) demeure interdit (1Å = 10^{-10}m)
Superficie, aire A, (s)	m^2 (mètre carré)	km^2 dm^2 cm^2 mm^2	a (are)	1 a = 10^2 m^2 L'exposant concerne l'unité et son préfixe : 1 km^2 = $(10^3)^2$ m^2 = 10^6 m^2
Volume V	m^3 (mètre cube)	dm^3 cm^3 mm^3	ℓ, L (litre)	1 L = 1dm^3 1 mL = 1cm^3
Temps t	s (seconde)	ms µs ns	d(j) (jour) h (heure) min (minute) semaine, mois, a (année)	1 d = 24h = 86 400 s 1 h = 60 min = 3 600 s 1 min = 60 s Ne pas écrire sec, ni " Ne pas écrire mn, ni '
Vitesse angulaire ω	rad/s (radian par seconde)			Pour un mouvement circuaire : $\omega = d\varphi / dt = \varphi'(t)$

Grandeurs et symboles	Unités S.I.	Multiples et sous-multiples	Autres unités usuelles	Observations
Fréquence de rotation n	s^{-1} (seconde moins un)	min^{-1}	tr/min tr/s	1 tr/min = 2 π rad/min 1 tr/s = 2 π rad/s
Vitesse u, v, ω, c	m/s (mètre par seconde)		km/h	Ne pas écrire kmh
Accélération angulaire α	rad/s^2 (radian par seconde au carré)			Pour un mouvement circulaire $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega'(t) = \varphi''(t)$
Accélération a	m/s^2 (mètre par seconde au carré)			L'accélération de la pesanteur se note g sa valeur conventionnelle est $g_n = 9,806\,65\ m/s^2$
Période T	s (seconde)	ms µs ns		Les unités de temps sont applicables
Fréquence f, ν	Hz (hertz)	GHz MHz kHz		Le hertz est la fréquence d'un phénomène de période 1 s : 1 Hz = 1 s^{-1}
Masse m	kg (kilogramme)	g mg µg	t (tonne)	L'unité contenant le préfixe kilo, les multiples et sous-multiples se forment à partir du gramme
Masse linéique ρ_ℓ	kg/m (kilogramme par mètre)	mg/m	tex (tex)	1 tex = 10^{-6} kg/m (employé dans l'industrie textile)
Masse surfacique ρ_A, (ρ_S)	kg/m^2 (kilogramme par mètre carré)	g/m^2		
Masse volumique ρ	kg/m^3 (kilogramme par mètre cube)	g/cm^3 kg/dm^3	t/m^3 g/mℓ	1 t/m^3 = 10^3 kg/m^3 = 1 g/cm^3 1 g/mℓ = 1 kg/ℓ = 1 t/m^3
Débit masse q_m	kg/s (kilogramme par seconde)			Utilisé en mécanique des fluides et en thermodynamique
Débit volume q_v	m^3/s (mètre cube par seconde)			Utilisé en mécanique des fluides et et en thermodynamique
Quantité de mouvement p	kgm/s (kilogramme mètre par seconde)			Utilisé en cinétique
Moment cinétique Moment de quantité de mouvement L	kg . m^2 / s (kilogramme mètre carré par seconde)			Utilisé en cinétique et en dynamique
Moment d'inertie I, J	kg . m^2 (kilogramme mètre carré)			Ne pas confondre avec le moment quadratique de surface utilisé en résistance des matériaux
Force F, Poids G, (P, W)	N (newton)	MN kN daN		Anciennement : 1 kgf = 10 N Ne pas confondre le newton-mètre (N . m) avec le millinewton (mN).
Moment d'une force M, T	N . m (newton-mètre)	MN.m kN.m CN.m		Les unités S.I. sont des scalaires ; elles n'ont pas à mettre en évidence l'aspect vectoriel ou autre, des grandeurs (ne pas écrire N × m)

Grandeurs et symboles	Unités S.I.	Multiples et sous-multiples	Autres unités usuelles	Observations
Pression p	Pa (pascal)	GPa MPa hPa	bar (bar) mbar	1 bar = 10^5 Pa = 0,1 MPa (utilisé en mécanique des fluides) 1 mbar = 1 hPa
Contrainte normale σ Contrainte tangentielle (ou de cission) τ	Pa (pascal)	GPa MPa hPa		1 N/mm^2 = 1 MPa 1 Pa = 1 N/m^2
Viscosité (dynamique) η . μ	Pa . s (pascal-seconde)	mPa . s		P (poise) : ancienne unité 1 cP = 1mPa . s
Viscosité cinématique ν	m^2/s mètre carré par seconde	mm^2/s		St (stokes) : ancienne unité 1 cst = 1 mm^2/s
Énergie E, (W) Travail W, (A) Énergie potentielle E_p, V, $Ø$ Énergie cinétique E_k, K, T	J (joule)	TJ GJ MJ kJ mJ	eV (électronvolt) Wh (wattheure) kWh	eV : utilisé en physique atomique et nucléaire Employé pour les combustibles gazeux et l'énergie électrique
Puissance P	W (watt)	GW kW		ch (cheval) : ancienne unité 1 ch = 736W
Température absolue ou thermodynamique T	K (kelvin)			Ne pas écrire °K
Température Celsius t, θ	°C (degré celsius)			$t = T - 273{,}15$K, 1°C = 1 K
Coefficient de dilatation ■ linéique α_ℓ ■ volumique α_V	K^{-1} (kelvin puissance −1)			
Chaleur, quantité de chaleur Q	J (joule)	MJ kJ		1 J = 1 N . m = 1 kg . m^2 . s^{-2}
Capacité thermique C Capacité massique c ■ à pression constante C_p ■ à volume constant C_V	J/(kg . K) (joule par kilogramme et kelvin)			Souvent nommé improprement «chaleur massique»

70■3 Écriture des nombres

■ Pour faciliter la lecture, on sépare les nombres par tranches de trois chiffres de part et d'autre du signe décimal. Cette séparation ne se matérialise que par un espace blanc.

■ Il est conseillé d'utiliser les puissances de dix et les préfixes même pour des unités non S.I. :
E = 210 000 MPa = 210 GPa = 0,210 TPa
1MF = 1 000 000 F
1 kF = 1 000 F.

Écrire	Ne pas écrire
N = 7 421 283,012 N ≈ 7,42 × 10^6	N = 7' 421' 283',012 N = 7 . 421. 283,012 N = 7421283,012
0,000 712 3 7, 123 × 10^{-4}	0, 0007123 0,000 . 712 . 3 0,000' 712' 3

70.4 Précisions des résultats

- La plupart des phénomènes physiques sont chiffrés avec une incertitude dépendant de leur origine (frottements, jeux...), des appareils de mesure, de l'observateur, etc.
- L'incertitude se note de la façon suivante :

  Valeur numérique (unité) ± incertitude (unité).
- Une valeur numérique seule sous-entend une incertitude égale à une demie unité du dernier chiffre.

ÉCRITURE DES RÉSULTATS

$L = 52{,}31$ mm $\pm 0{,}05$ mm
$L = (52{,}31 \pm 0{,}05)$ mm
$L = 52{,}31$ à 0,05 mm près
$L = 52{,}31$ signifie : $52{,}305 < L < 52{,}315$
$L = 52{,}0$ signifie : $51{,}95 < L < 52{,}05$

$m = 31{,}2$ kg ± 250 g
$m = (31{,}2 \pm 0{,}25)$ kg
$m = 31{,}2$ kg à 250 g près

70.5 Exemples d'écritures des symboles

Écrire	Ne pas écrire	Écrire	Ne pas écrire
12,35° (degré d'angle)	12°35	0,03g	0,03 gr
17 degrés 11 minutes 2 secondes	17 degrés, 11 minutes, 2 secondes	9,81 m/s²	9 m/s² 81
17°11'2"	17°, 11',2"	25,4 °C	25°4, ni 25,4° C
10 heures 25 minutes	10h25 ou 10h25'	3,75 cm	3cm75, ni 3 cm75
10h 25 min 8 s	10h25' 8 "	cinq kilomètres, 5 kilomètres	cinq km

70.6 Signes d'opérations

- Le signe normal de la multiplication entre des nombres est ×. Toutefois, on peut regrouper certains termes d'un produit :

  $a = 2{,}3 \,.\, 10^2$; $b = 2{,}3 \,.\, 10^2 \times 1{,}5 \,.\, 10^3$
- Le signe normal de la multiplication entre grandeurs est le point (éventuellement omis) :

  $a \,.\, b = ab$; $(4c + d) \,.\, e = (4c + d)e$
- Le produit scalaire de deux vecteurs se note :

  $\vec{A} \,.\, \vec{B}$ (ou $\vec{A}\ \vec{B}$)
- Le produit vectoriel* de $\vec{A}$ par $\vec{B}$ se note :

  $\vec{A} \times \vec{B}$
- La division se note : $\frac{a}{b}$ ou a/b.

70.7 Équations aux dimensions

- Le système d'unité S.I. étant cohérent, on a souvent intérêt à vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral à l'aide d'une équation aux dimensions.
- En mécanique, on utilise essentiellement trois grandeurs de base : longueur, masse et temps dont les dimensions sont respectivement indiquées par L, M et T.
- Le calcul dimensionnel suit les règles de l'algèbre.

EXEMPLE :
Flèche d'une poutre $f = (F \ell^3) / (48 E \,.\, I)$ (voir chapitre 52).

$$\dim f = \frac{\dim F \,.\, \dim \ell^3}{\dim E \,.\, \dim I} = \frac{M.L.T^{-2}.L^3}{ML^{-1}\,T^{-2}.L^4} = L$$

CONCLUSION :
La flèche est bien homogène à une longueur.

DIMENSIONS DE QUELQUES GRANDEURS

Grandeur	Dimension
Vitesse	$L \,.\, T^{-1}$
Vitesse angulaire	T^{-1}
Force	$M \,.\, L \,.\, T^{-2}$
Énergie	$L^2\, M\, T^{-2}$
Densité relative	sans dim.
Module de Young E	$M\, L^{-1}\, T^{-2}$
Moment quadratique de surface I	L^4
Contrainte	$M\, L^{-1}\, T^{-2}$
Masse volumique	$M\, L^{-3}$

* Le signe « ∧ » est toléré, avec réserves.

71 Éléments vectoriels

71 ■ 1 Bipoint (A,B) ou $\overrightarrow{AB}$

Le bipoint (A,B) est l'ensemble ordonné de deux points A (origine) et B (extrémité).

La norme du bipoint correspond à la distance séparant ces deux points ; on la note d (A,B).

On peut définir un bipoint par :

- son support : droite (D) passant par A et B ;
- son origine : le point A de (D) ;
- sa norme : la distance de A à B notée d (A,B) ;
- son sens : de A vers B.

REMARQUES :

- un bipoint nul a une origine et une extrémité confondues,
- deux bipoints peuvent être parallèles, colinéaires, de mêmes sens, de sens contraires, équipollents, opposés et même directement opposés.

71 ■ 2 Vecteur $\overrightarrow{V}$

L'ensemble de tous les bipoints équipollents à un bipoint (A,B) constitue une classe d'équivalence appelée vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{V}$.

REMARQUES :

- Pratiquement, on dessine un bipoint qui est un représentant du vecteur
- Un vecteur $\overrightarrow{V}$, représenté par un bipoint, désigne :

1° une direction (D) qui est celle du bipoint ;
2° un sens, celui de A vers B (axe Δ) ;
3° une norme (ou longueur ou intensité) notée $\|\overrightarrow{V}\|$;

- $\|\overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B) = V$ ou AB (nombre arithmétique) ;
- le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire si $\|\overrightarrow{u}\| = 1$;
- le vecteur $\overrightarrow{0}$ est nul si $\|\overrightarrow{0}\| = 0$.

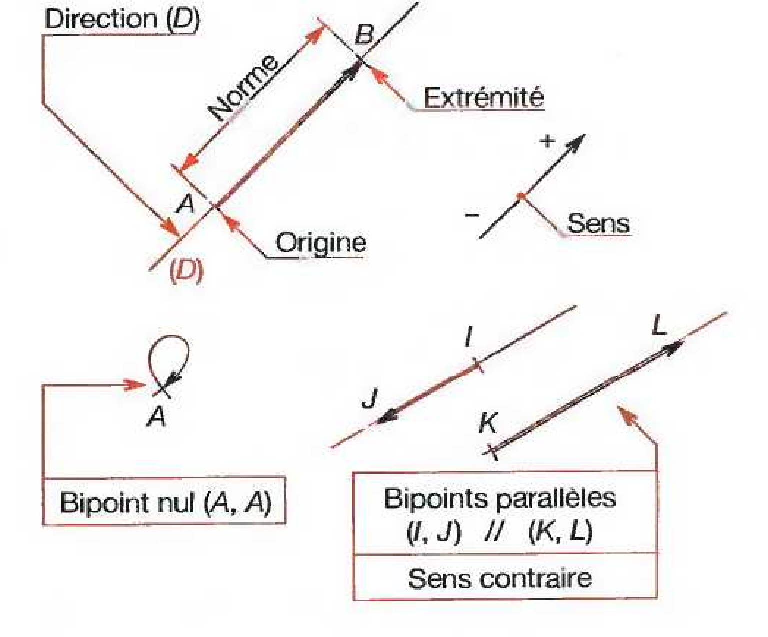
71 ■ 3 Pointeur $(A,\overrightarrow{V})$

L'association d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ et d'un point particulier A s'appelle un pointeur (anciennement : vecteur lié).

71 ■ 4 Glisseur $((D),\overrightarrow{V})$

L'association d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ et d'une droite particulière (D) s'appelle un glisseur (anciennement : vecteur glissant). La droite ne peut avoir que la direction de $\overrightarrow{V}$.

BIPOINTS



Bipoints colinéaires de même sens :

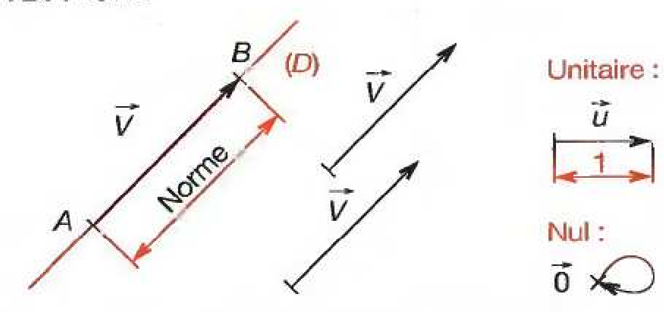
Bipoints colinéaires de sens contraires :

Bipoints opposés $(P, Q) = -(R, S)$: P Q S R

Bipoints directement opposés $(P', Q') = -(R', S')$:

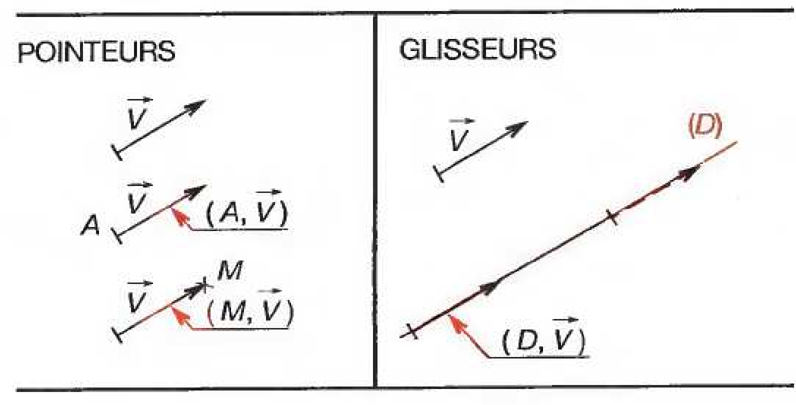


VECTEURS



POINTEURS

GLISSEURS

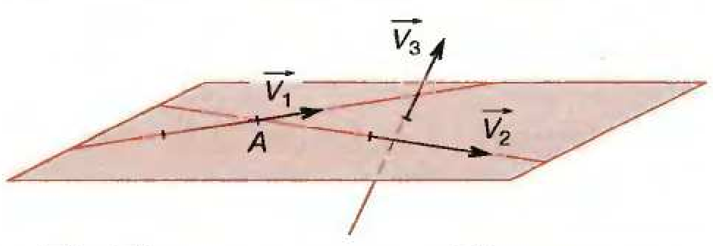


72 Repérage des vecteurs

72 ▪ 1 Vecteurs linéairement indépendants

Aucune combinaison linéaire de deux d'entre eux ne permet de définir le troisième.

VECTEURS LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS



A, $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ définissent un plan ; si $\vec{V_3}$ n'est pas parallèle à ce plan, les trois vecteurs sont linéairement indépendants.

72 ▪ 2 Base et repère

Trois vecteurs linéairement indépendants constituent une base, dans l'espace.

Trois bipoints de même origine, associés à chacun de ces vecteurs, forment un repère.

REMARQUES :

- une base définit des directions et une norme ;
- deux repères distincts $(\mathcal{R}_1) = (A, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{R}_2) = (O_1, \mathcal{B})$ sont donc associés à une même base $(\mathcal{B})$.

BASES ET REPÈRES		
Base : $(\mathcal{B}) = (\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$	**Repère :** $(\mathcal{R}_1) = (A, \mathcal{B}) = (A, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$	**Repère :** $(\mathcal{R}_2) = (O_1, \mathcal{B}) = (O_1, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$
$\vec{V_1}$ $\vec{V_3}$ $\vec{V_2}$	$\vec{V_3}$ $\vec{V_1}$ A $\vec{V_2}$	$\vec{V_3}$ $\vec{V_1}$ O_1 $\vec{V_2}$

72 ▪ 3 Base et repère orthonormés

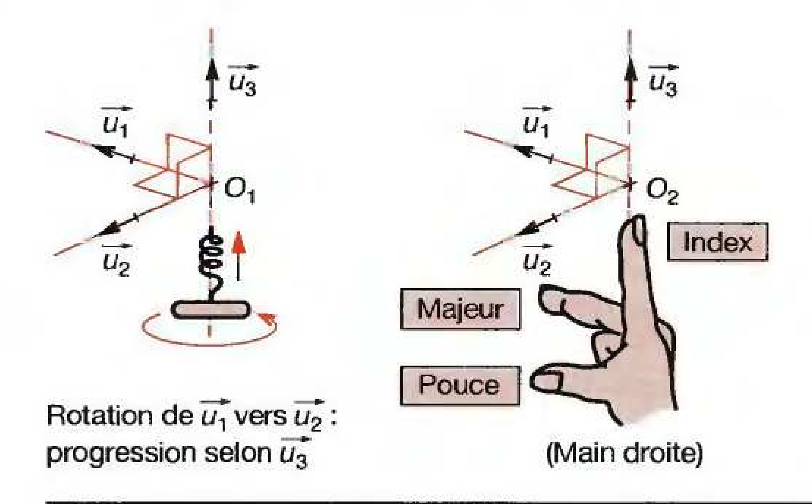
Les trois vecteurs linéairement indépendants définissant la base ou le repère doivent être à la fois orthogonaux et de norme égale à l'unité :

$$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1$$

72 ▪ 4 Base et repère orthonormés directs ou indirects

Si deux des vecteurs de la base ou du repère définissent le sens positif du troisième selon la «règle du tire-bouchon» ou selon la «règle des trois doigts» ou du «bonhomme d'Ampère», la base (ou le repère) est orthonormée directe ; sinon, elle est indirecte.

BASE (OU REPÈRE) ORTHONORMÉE DIRECTE



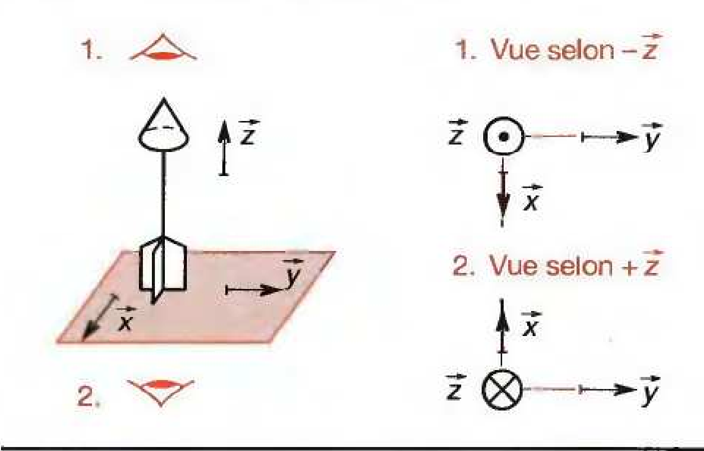
Rotation de $\vec{u_1}$ vers $\vec{u_2}$: progression selon $\vec{u_3}$

(Main droite)

REMARQUE :

Lorsque l'observation d'une base ou d'un repère s'effectue selon l'un de ses axes, on utilise la représentation conventionnelle décrite ci-contre.

OBSERVATION SELON L'UN DES AXES



72 ▪ 5 Coordonnées, composantes

- Coordonnées : ce sont les valeurs algébriques des projections d'un vecteur sur la base (ou sur le repère).
- Composantes : ce sont les projections vectorielles du vecteur sur la base (ou sur le repère).

EXEMPLE :

Le vecteur $\vec{V_1} = 5\,\vec{x} + 2\,\vec{y} - \vec{z}$ a pour :

- composantes : $\vec{V_{1x}} = 5\,\vec{x}$, $\vec{V_{1y}} = 2\,\vec{y}$, $\vec{V_{1z}} = -\vec{z}$
- coordonnées : + 5, + 2, − 1.

REMARQUES :

- On écrit souvent un vecteur sous forme matricielle :

$$\vec{V_1} = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})\begin{pmatrix} +5 \\ +2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5\,\vec{x} + 2\,\vec{y} - \vec{z} \text{ soit } \vec{V_1}(5\ \ 2\ \ -1)$$

$$\vec{V_2} = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\,\vec{x} - 2\,\vec{z} \text{ soit } \vec{V_2}(3\ \ 0\ \ -2)$$

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= 8\,\vec{x} + 2\,\vec{y} - 3\,\vec{z}$$

- On simplifie souvent l'écriture en omettant de préciser le terme $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

73 Opérations vectorielles

73■1 Multiplication par un scalaire

En multipliant le vecteur $\vec{V}$ par un scalaire (ou nombre algébrique) λ, non nul, on obtient le vecteur $\lambda\,\vec{V}$:

- colinéaire à $\vec{V}$;
- de même sens que $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ ou du sens contraire si $\lambda < 0$;
- de norme $\|\lambda\vec{V}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{V}\|$.

73■2 Somme vectorielle

C'est un vecteur $\vec{S}$ défini par l'addition des bipoints associés à chaque vecteur dont on cherche la somme.

EXEMPLE :

$\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} - \vec{V_3}$ ou $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + (-\vec{V_3})$

- $\vec{AB}$ représente le vecteur $\vec{V_1}$;
- $\vec{BC}$ représente le vecteur $\vec{V_2}$;
- $\vec{CD}$ représente le vecteur $-\vec{V_3}$;
- $\vec{AD}$ représente le vecteur $\vec{S}$.

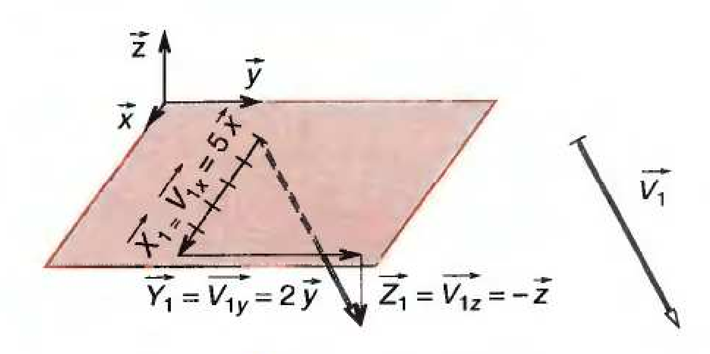
La somme vectorielle est associative :

si $\vec{S_3} = \vec{V_2} - \vec{V_3}$, alors $\vec{S_2} = \vec{V_1} + \vec{S_3}$

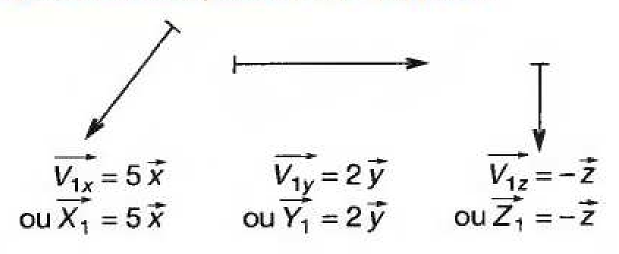
La somme vectorielle est commutative :

$$\vec{S_2} = \vec{V_1} + \vec{V_2} - \vec{V_3} = \vec{V_2} + \vec{V_1} - \vec{V_3} = -\vec{V_3} + \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

PROJECTIONS, COORDONNÉES, COMPOSANTES D'UN VECTEUR



Composantes de $\vec{V_1}$ dans $(\mathscr{B}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

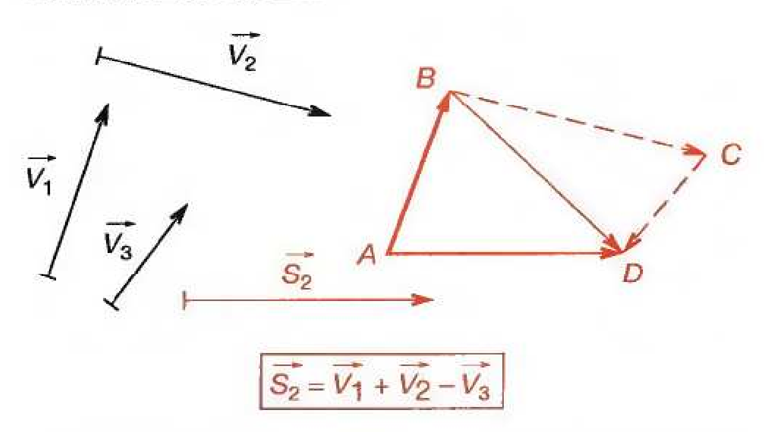


Coordonnées de $\vec{V_1}$ dans $(\mathscr{B}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{V_1}\,(5\ \ 2\ \ -1) \quad \text{ou} \quad \vec{V_1}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN SCALAIRE	
Données	**Résultat**
$\vec{V}$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$	$\lambda_1\vec{V} = 2\,\vec{V}$; $\lambda_2\vec{V} = -\vec{V}$

SOMME VECTORIELLE



La somme vectorielle a pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité l'extrémité du dernier.

73■3 Produit scalaire

Le produit scalaire* de deux vecteurs est un nombre algébrique calculé par la relation :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| . \|\vec{V}_2\| . \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

PROPRIÉTÉS :

- il est commutatif : $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \vec{V}_2 . \vec{V}_1$
- il est distributif : $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) . \vec{V}_3 = \vec{V}_1 . \vec{V}_3 + \vec{V}_2 . \vec{V}_3$
- $\lambda \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = (\lambda \vec{V}_1) . \vec{V}_2 = \vec{V}_1 . (\lambda \vec{V}_2)$

REMARQUE :

Si on donne $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, le calcul du produit scalaire conduit à :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = X_1 . X_2 + Y_1 . Y_2 + Z_1 . Z_2$$

EXEMPLE :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} ; \vec{V}_2\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} ; \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = 5 \times 3 + 2 \times 0 + 1 \times (-2) = +13$$

73■4 Produit vectoriel

Le produit vectoriel* de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur $\vec{W} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$

- perpendiculaire à un plan parallèle à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$,
- de sens défini par «la règle du tire-bouchon» (§ 74.4),
- de norme $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| . \|\vec{V}_2\| . |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|$.

PROPRIÉTÉS :

- il est anticommutatif : $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$,
- il est distributif : $\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \vec{V}_3$ (Varignon),
- $\lambda(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = (\lambda \vec{V}_1) \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \times (\lambda \vec{V}_2)$.

REMARQUE :

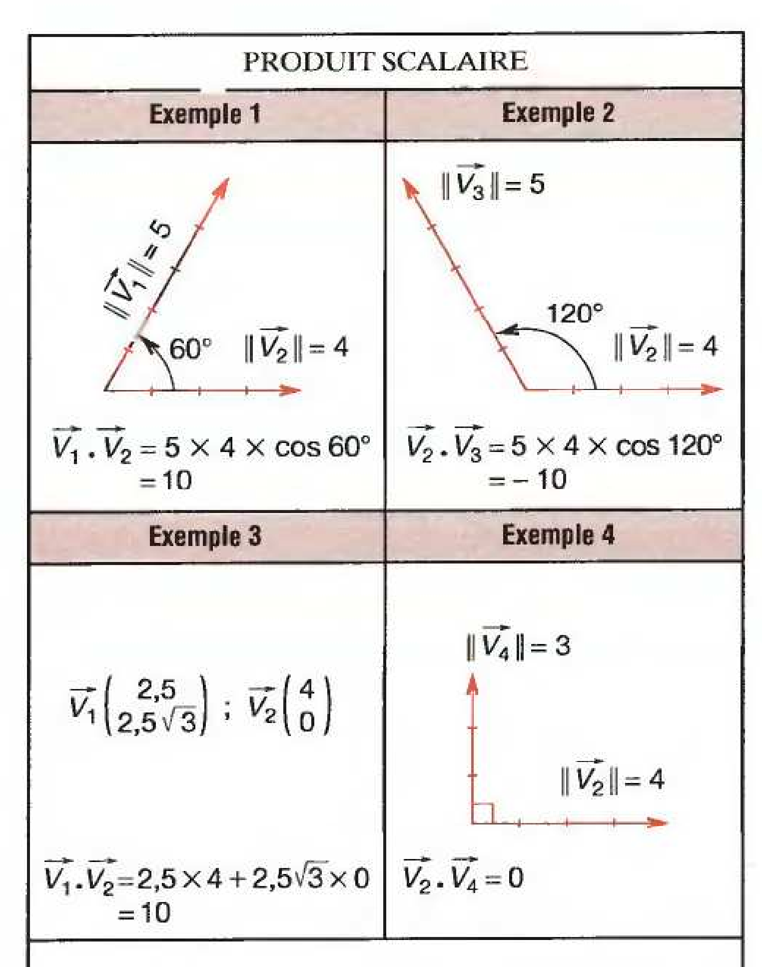
Si on donne $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, la détermination du produit vectoriel conduit à :

$$(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) : \begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{pmatrix} = \begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix}\begin{pmatrix}Y_1 . Z_2 - Z_1 . Y_2\\Z_1 . X_2 - X_1 . Z_2\\X_1 . Y_2 - Y_1 . X_2\end{pmatrix} : \vec{W}$$

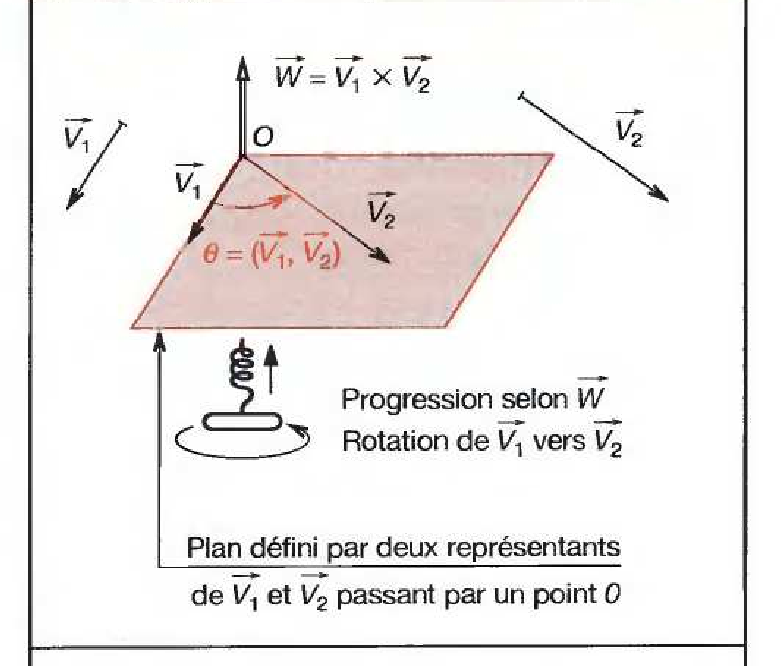
(schéma : X_1, Y_1 recopiés sous la première colonne ; X_2, Y_2 sous la seconde ; produits croisés ①, ②, ③ avec ⊖)

EXEMPLE :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} ; \vec{V}_2\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} ; \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 : \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\+13\\-6\end{pmatrix} : \vec{W}$$



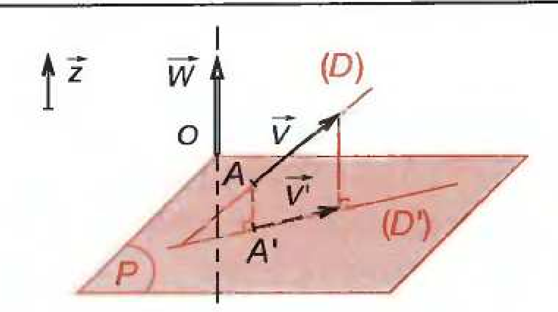
Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.



Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est toujours nul.

* Le signe «.» placé entre deux vecteurs désigne leur produit scalaire. Le signe « × » placé entre deux vecteurs indique leur produit vectoriel.

73■5 Moment d'un pointeur ou d'un glisseur

PAR RAPPORT À UN POINT	PAR RAPPORT À UN AXE
■ Le point O et le pointeur $(A, \vec{V})$, ou le glisseur $((D), \vec{V})$ déterminent un plan (P). ■ Le moment en O de $(A, \vec{V})$ ou de $((D), \vec{V})$ est un vecteur $\vec{W}$ noté : $\vec{W} = \vec{\mathcal{M}_O}(A, \vec{V}) = \vec{\mathcal{M}_O}((D), \vec{V})$ ■ Définition géométrique du moment : • direction perpendiculaire à (P) • sens selon la règle du tire-bouchon (§ 74.4) • norme $\lVert\vec{W}\rVert = \lVert\vec{V}\rVert \times d$ ■ Définition vectorielle : $\vec{W} = \vec{\mathcal{M}_O}((D), \vec{V}) = \vec{\mathcal{M}_O}(A, \vec{V}) = \vec{OA} \times \vec{V}$ REMARQUE : Lorsqu'on connaît la norme du vecteur et sa distance au point, il est souvent plus facile d'utiliser la définition géométrique.	 ■ Pour déterminer le moment par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$ du pointeur $(A, \vec{V})$ ou du glisseur $((D), \vec{V})$: 1° Projeter $\vec{V}$ en $\vec{V'}$ sur un plan (P) perpendiculaire à $(O, \vec{z})$; 2° Déterminer le moment par rapport à O du pointeur $(A', \vec{V})$. ■ Définition géométrique du moment : Elle se ramène au cas ci-contre. ■ Définition vectorielle : $\vec{W} = \vec{\mathcal{M}_{Oz}}(A, \vec{V}) = \vec{OA'} \times \vec{V'} = \left[(\vec{OA} \times \vec{V}).\vec{z}\right] \vec{z}$ REMARQUE : Après avoir projeté $\vec{V}$ sur le plan (P), la remarque concernant le moment par rapport à un point, s'applique également.

Il est souvent plus facile d'utiliser les relations vectorielles lorsqu'on connaît les coordonnées du vecteur, de son origine et du point O.

74 Torseurs

74■1 Définition

Soit un ensemble (E) de pointeurs (ou de glisseurs) notés $(A_1, \vec{f_1}), (A_2, \vec{f_2}), \ldots (A_n, \vec{f_n})$.
Leur torseur en un point A s'écrit :

$${}_A\{T(E)\} = {}_A\left\{\vec{R(E)}\ \vec{\mathcal{M}_A(E)}\right\} \text{ ou bien } {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R(E)}\\ \vec{\mathcal{M}_A(E)}\end{Bmatrix}$$

$\vec{R(E)}$: résultante du torseur.

$\vec{\mathcal{M}_A(E)}$: moment du torseur.

$\vec{R(E)} = \vec{f_1} + \vec{f_2} + \ldots + \vec{f_n}$ (somme des vecteurs).

$\vec{\mathcal{M}_A(E)} = \vec{\mathcal{M}_A}(A_1, \vec{f_1}) + \vec{\mathcal{M}_A}(A_2, \vec{f_2}) + \ldots$ (moment des pointeurs).

REMARQUES :

■ La résultante d'un torseur ne dépend pas du point ou l'on écrit ce torseur ;

■ Le moment d'un torseur dépend du point A choisi pour l'exprimer ;

■ En un point B, on a :

$${}_B\{T(E)\} = {}_B\left\{\vec{R(E)}\ \vec{\mathcal{M}_B(E)}\right\}$$

avec : $\vec{\mathcal{M}_B(E)} = \vec{\mathcal{M}_A(E)} + \vec{BA} \times \vec{R(E)}$

74.2 Équiprojectivité du moment

Lorsqu'on écrit (ou dessine) le torseur associé à un ensemble en deux points A et B, on constate que les projections algébriques des moments sur $\overrightarrow{AB}$ sont égales :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A(E)}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}_B(E)}.\overrightarrow{AB}$$

74.3 Invariant scalaire J

Le produit scalaire de la résultante et du moment d'un torseur est indépendant du point où l'on écrit le torseur :

$$_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A(E)} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{Bmatrix} \Rightarrow J = X.L_A + Y.M_A + Z.N_A$$

$$_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(E)} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B(E)} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X & L_B \\ Y & M_B \\ Z & N_B \end{Bmatrix} \Rightarrow J = X.L_B + Y.M_B + Z.N_B$$

$J = J_1 = J_2$: constant en tous points

La projection du moment d'un torseur sur sa résultante est constante en tous points.

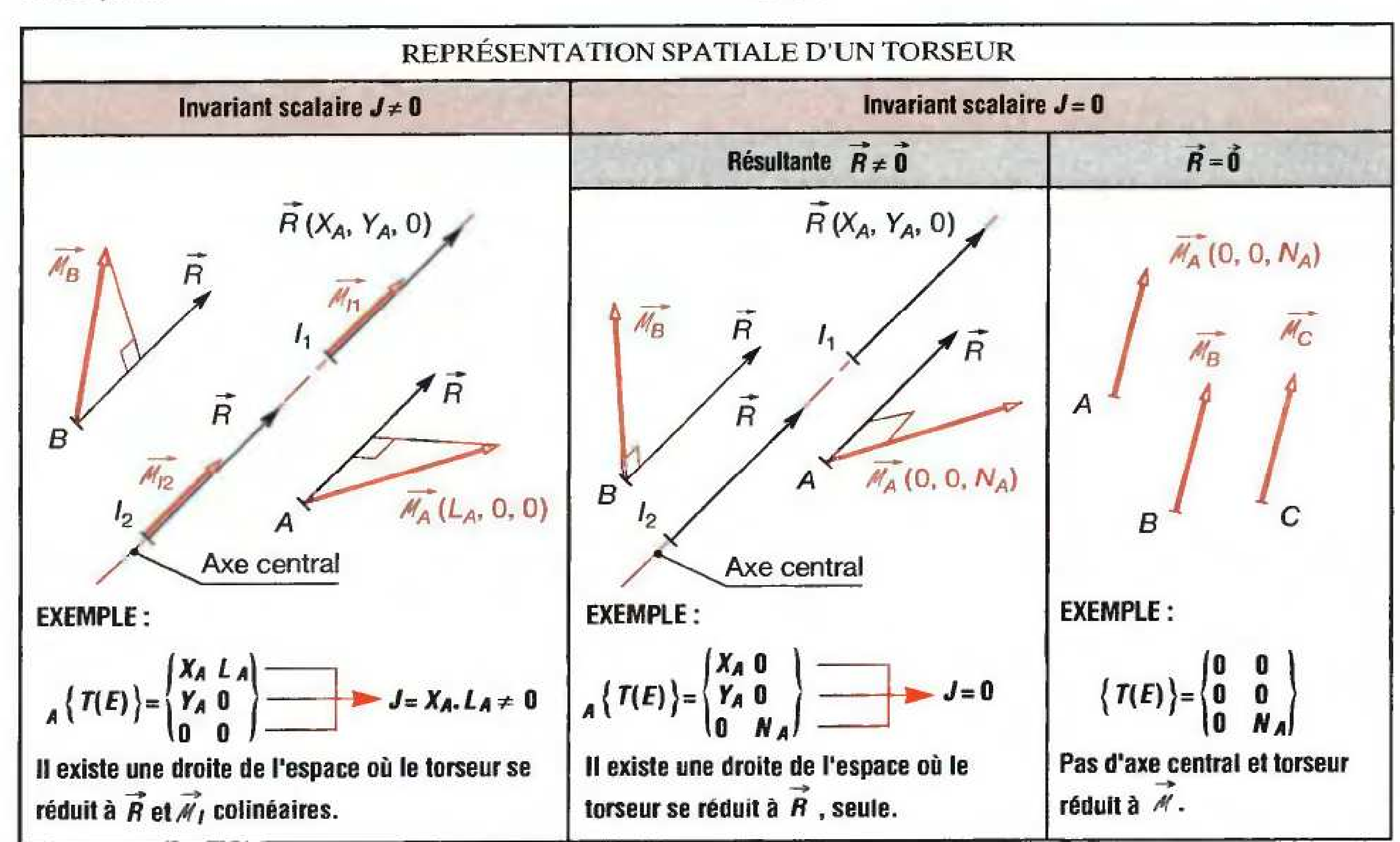
74.4 Axe central

C'est une droite de l'espace en tous points de laquelle le moment du torseur est colinéaire à sa résultante :

Il est unique, pour un torseur donné (à l'exception du torseur-couple pour lequel il n'est pas défini, voir ci-dessous).

REMARQUES :

- Un torseur ayant une résultante non nulle et un invariant scalaire J nul se réduit sur l'axe central à un torseur univecteur à résultante ; il se représente par sa résultante.
- Un torseur ayant une résultante non nulle et dont l'invariant scalaire J est différent de zéro, se réduit sur l'axe central à sa résultante et à un moment. Ce moment a alors une norme minimale.
- Un torseur dont la résultante est nulle a même vecteur moment en tous points de l'espace. Il s'agit d'un torseur univecteur à moment – ou torseur couple – représenté par son seul vecteur moment.



Achevé d'imprimer en France par Jean-Lamour
Dépôt légal: 9812.02/2001
Collection n° 53 - Edition n° 03
16/7585/9